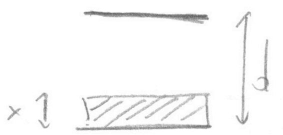
A

a) La capacità del condensatore equivalente è la capacità serie dei due condensatori, uno nel vuoto e uno con dielettrico



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2} = \frac{d-x}{\varepsilon_0 A} + \frac{x}{\varepsilon_0\varepsilon_r A} =$$

$$= \frac{\varepsilon_r(d-x)+x}{\varepsilon_0\varepsilon_r A}$$

$a=b= 5\ cm$

$\varepsilon_r = 2.5$

$C = 10\times10^{-12}\ F$

$$C_{eq} = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{A}{\varepsilon_r(d-x)+x} = 10\times10^{-12}\ F$$

$$(\varepsilon_r d - \varepsilon_r x + x) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{C_{eq}}$$

$$x(1-\varepsilon_r) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{C_{eq}} - \varepsilon_r d$$

$$x = \frac{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r A}{C_{eq}} - \varepsilon_r d}{1-\varepsilon_r} =$$

$$= \frac{\overbrace{\frac{8.85\times10^{-12}\frac{F}{m}\ 2.5\times 0.0025\ m^2}{10\times10^{-12}\ F}}^{0.55\times10^{-12}} - \overbrace{2.5\cdot 0.04\ m}^{0.1}}{1-2.5} =$$

$$= \frac{0.055\ m - 0.1\ m}{-1.5} = 0.029\ m$$

b) Fuori dal condensatore $E=0$

Come sopra si calcola C_{eq} se $x = x_0 = 1\ cm$

$$C_{eq} = \varepsilon_0\varepsilon_r \frac{A}{\varepsilon_r(d-x)+x} = 8.85\times10^{-12}\frac{F}{m}\ 2.5\times \frac{0.0025\ m^2}{2.5\times 0.03\ m + 0.01\ m} = 0.65\times10^{-12}\ F$$

La carica sulle piastre è $Q = C\cdot V = 32.5\times10^{-12}\ C$

La carica superficiale $\sigma = \frac{Q}{A} = 13\times10^{-9}\ \frac{C}{m^2}$

Dentro al condensatore ma fuori dal dielettrico:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{13\times10^{-9}\ \frac{C}{m^2}}{8.85\times10^{-12}\ \frac{F}{m}} = 1.47\times10^3\ \frac{C}{F\cdot m} = 1.47\times10^3\ \frac{V}{m} = 1470\ \frac{V}{m}$$

Dentro al dielettrico $E_d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = 0.59\times10^3\frac{V}{m} = 590\ \frac{V}{m}$

Alternativamente si può usare il fatto che $V = E_0 d_1 + \frac{E_0}{K} d_2$

Per calcolare σ_p calcolo $P = \varepsilon_0 \chi E$

$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} = \varepsilon_0 \chi E = 8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m} (2.5-1) \cdot 590 \frac{V}{m} = 7.8 \times 10^{-9} \frac{C}{m^2}$

$q_p = \sigma_p \cdot A =$

$= 1.95 \times 10^{-11}\ C$

positiva su una superficie del dielettrico, negativa sull'altra

c) $C_q = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{A}{\varepsilon_r (d-x) + x}$

ora chiamo $d \to x$
$x \to x_0$

$C_q = \varepsilon_0 \varepsilon_r \dfrac{A}{\varepsilon_r (x - x_0) + x_0}$

Q @ 50V già calcolata $= 37.5 \times 10^{-12}\ C$

$U = \dfrac{1}{2} \dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2} Q^2 \dfrac{\varepsilon_r (x - x_0) + x_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}$

$F = - \dfrac{dU}{dx} = - \dfrac{1}{2} \dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r A} \varepsilon_r = - \dfrac{1}{2} \dfrac{Q^2}{\varepsilon_0 A} =$

$= - \dfrac{1}{2} \dfrac{[37.5 \times 10^{-12}]^2 C^2}{8.85 \times 10^{-12} \frac{F}{m} \; 0.0025\, m^2} =$

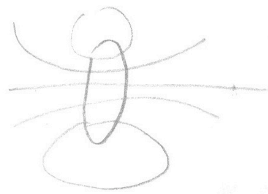
$= - 23870 \times 10^{-24} \times 10^{12} = -23870 \times 10^{-12}\ N =$

$= - 23 \times 10^{-9}\ N$

Forza attrattiva tra le piastre

B

a) Il campo generato da una spira sul suo asse è



$$B = \frac{\mu_0 i}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Bisogna tener conto che la prima bobina è costituita da n_1 spire

Campo generato sulla seconda: $B = \frac{4\pi\times10^{-7}}{2}\frac{H}{m}\, 2\cdot A\times 50 \frac{(0.30)^2\, m^2}{(0.30^2+0.1^2)^{3/2}\, m^3}$

$= 1823\times10^{-7} = 1.8\times10^{-4}\ T$

b) $\vec{m} = n_2 i S\cdot\vec{n} = 0,25\ A\cdot m^2$

Momento: $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B} \Rightarrow m B \sin\vartheta = 100\times\pi(0.02)^2\, 2A\cdot 1.8\times10^{-4}\,T\cdot\sin 30^\circ = 0.00226\times10^{-2}$

$= 2.26\times10^{-5}\ N\cdot m$

Energia potenziale: $U = -\vec{m}\cdot\vec{B}$

$\Delta U = -mB(\underbrace{\cos 0 - \cos 30^\circ}_{0.13}) = -5.85\times10^{-6}\ J$

Essendo la seconda spira molto più piccola, si può pensare che il campo generato dalla prima sia uniforme nello spazio occupato dalla seconda

c) $dU = -d(\vec{m}\cdot\vec{B}) = i\, dS\cdot B$

$U = -i\,\Phi_B$

$F = -\vec{\nabla}U = i\,\vec{\nabla}\int B\,dS = i\,\vec{\nabla}\Phi$

Calcolo il flusso del campo generato dalla prima spira sulla seconda, supponendo, siccome la seconda è piccola, che il campo sia costante sulla seconda superficie

$$\Phi_{12} = \frac{\mu_0 i_1}{2}\frac{r_1^2 n_1}{(r_1^2+z^2)^{3/2}}\,\pi r_2^2 n_2$$

$$\vec{F}_{12} = i_2\vec{\nabla}\Phi_{12} = i\frac{\partial}{\partial z}\Phi\ \vec{u}_z =$$

$$= n_1 n_2 i_2 i_1 \frac{\mu_0}{2}\pi r_1^2 r_2^2\left(-\frac{3}{2}\right)\left[r_1^2+z^2\right]^{-5/2}\cdot 2z =$$

$$= 5000\, 2A\cdot 2A\cdot\frac{4\pi\times10^{-7}}{2}\frac{H}{m}\,\pi(0.3)^2(0.02)^2\left(-\frac{3}{2}\right)\left[0.3^2+0.1^2\right]^{-5/2} 2(0.1) =$$

$$= 0.00285\times10^{-7}\times 316.23 = 1343\times10^{-4} = 1.3\times10^{-4}\ N$$