Problema A

Un condensatore a facce piane parallele quadrate di lato L=10 cm e distanti d=1cm è inizialmente riempito per metà di dielettrico con costante relativa k_1= 4 e per metà di dielettrico con costante relativa k_2= 5. Il condensatore è connesso ad un generatore di tensione V=25V.

a) Calcolare il valore del campo elettrico e del vettore induzione elettrica nelle due regioni.

b) Calcolare il valore delle cariche di polarizzazione nelle due regioni.

c) I dielettrici vengono sostituiti da un dielettrico non omogeneo, che varia linearmente da k_1 per x=0 a k_2 per x=L secondo figura. Calcolare la capacità del condensatore e le cariche di polarizzazione superficiali e volumiche.

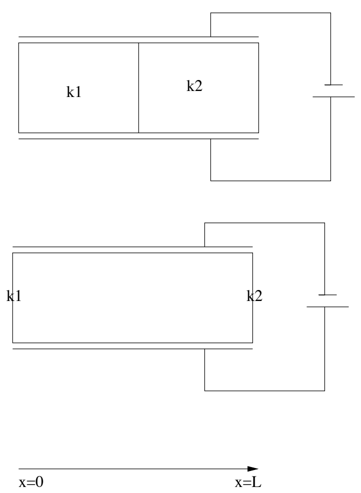
Problema B

Una sbarra metallica lunga L si muove di velocità costante, partendo dal centro O di un solenoide toroidale in aria la cui sezione circolare ha raggio M=0.5L, e muovendosi lungo il raggio del toro (N) con velocità v. La sbarra si muove lungo due rotaie connesse elettricamente da una resistenza R. Il solenoide è percorso da corrente i=1A e ha 12000 spire/m. (v=10 m/s, R=5Ω, L=10cm, N=1m)

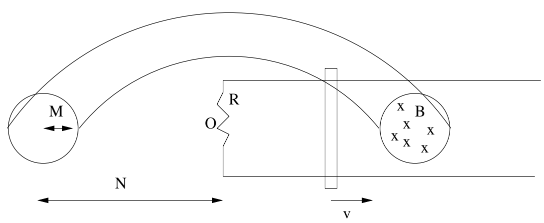
a) Calcolare il campo magnetico all'interno del solenoide ed in particolare il suo valore al centro della sezione.

b) Assumendo che il campo dentro il toro sia uniforme ed il suo valore ovunque pari al valore nel centro della sezione, si ricavi l'espressione della fem indotta in funzione del tempo e della forza di attrito magnetico agente sulla sbarra.

c) Con la stessa assunzione di sopra si calcoli l'energia totale dissipata per effetto Joule. Si discuta il bilancio energetico.



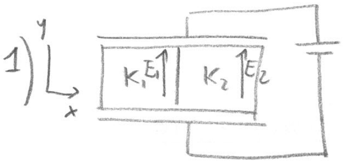
Problema 1



Problema 2

A

1)



Il campo elettrico è uniforme tra le due piastre

$$V = E \cdot d$$

$$E_1 = E_2 = \frac{V}{d} = \frac{25\ V}{0.01\ m} = 2500 \frac{V}{m}$$

Il campo è uguale nelle due regioni perché la componente tangenziale di E si conserva. $D_1 = \varepsilon K_1 E$
$D_2 = \varepsilon K_2 E$

2) $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$

$$\sigma_{p1} = P_1 = \varepsilon_0 \chi E = \varepsilon_0 (K_1 - 1) E = 6.64 \times 10^{-8}\ C/m^2$$

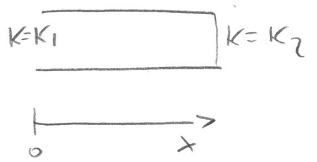
$$\sigma_{p2} = \varepsilon_0 (K_2 - 1) E = 8.85 \times 10^{-8}\ C/m^2$$

$q_{p1} = \sigma_{p1} \cdot A$;

$q_{p2} = \sigma_{p2} \cdot A$;

Le cariche di polarizzazione q_{p1} e q_{p2} si distribuiscono sulle superfici delle due regioni

3)



K varia secondo la legge

$$K(x) = K_1 + \frac{K_2 - K_1}{L} x$$

Posso vedere il sistema come composto da tanti condensatori in parallelo ognuno con capacità $dC = \varepsilon_0 K(x) \frac{L \cdot dx}{d}$

$$C = \int_0^L \varepsilon_0 \left(K_1 + \frac{K_2 - K_1}{L} x \right) \frac{L}{d}\, dx = \varepsilon_0 \frac{L}{d} \int_0^L \left(K_1 + \frac{K_2 - K_1}{L} x \right) dx =$$

$$= \varepsilon_0 \frac{L}{d} \left(K_1 L + \frac{K_2 - K_1}{2L} L^2 \right) = \varepsilon_0 \frac{L}{d} \left(\frac{K_1}{2} L + \frac{K_2}{2} L \right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{L^2}{d} (K_1 + K_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi \times 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}} \frac{(0.01)\ m^2}{0.01\ m} \cancel{(4+5)} = \frac{1}{8\pi} \times 10^{-9}\ F =$$

$$= 3.98 \times 10^{-11}\ F$$

La σ_p varia lungo x:

$$\sigma_p = P(x) = \varepsilon_0 (k(x)-1) E = \varepsilon_0 \left(K_1 - 1 + \frac{K_2-K_1}{L} x\right) E$$

La carica superficiale totale sarà

$$q_P = \int_A P(x)\, dA = L \cdot \int_0^L P(x)\, dx =$$

$$= LE \int_0^L \varepsilon_0 \left(K_1 - 1 + \frac{K_2-K_1}{L} x\right) dx = EL\varepsilon_0 \left[(K_1-1)L + \frac{K_2-K_1}{2L} L^2 \right] =$$

Ci sarà una $+q_P$ su una faccia del condensatore e una $-q_P$ sull'altra

$$= \varepsilon_0 L^2 E \left[K_1 - 1 + \frac{K_2-K_1}{2} \right] =$$

$$= \frac{4\pi}{9\times10^9 \frac{N\cdot m^2}{C^2}} (0.01) m^2 \; 2500 \frac{N}{C} \cdot \frac{m}{m} \cdot \frac{7}{2} =$$

$$= 12.2 \times 10^{-8}\ C$$

La carica volumica:

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) = 0$$

infatti $P_x = P_z = 0$ e P_y non dipende da y

$$q_{P,V} = \int \rho_P \, dV = 0$$

B

a) Il campo nel solenoide toroidale si calcola con la legge di Ampère:

$$\oint B\,dl = \mu_0 i_c$$

$$\cancel{2\pi} r B = \mu_0 N i_c = \mu_0 n \cdot \cancel{2\pi} R\, i$$

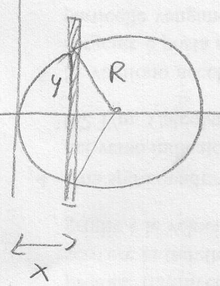
$$B = \frac{\mu_0 n R}{r}\, i$$

Nel centro della sezione vale $B = \mu_0 n i =$

$$= 4\pi\times10^{-7}\,\frac{T\cdot m}{A}\cdot 12\times10^{3}\cdot 1\,A =$$

$$= 151\times10^{-4} = 1.51\times10^{-2}\ T$$

b)



$$\mathcal{E}_i = \int_0^l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \int_0^l vB\,dl$$

dove l è la porzione di sbarra immersa nel campo

$$l = 2\sqrt{R^2-(R-x)^2} = 2\sqrt{R^2-R^2-x^2+2Rx} =$$

$$= 2\sqrt{2Rx-x^2}$$

$x = v\cdot t$

$$\mathcal{E}_i = vBl = 2vB\sqrt{2Rvt - v^2t^2}$$

$$i = \frac{\mathcal{E}_i}{R}, \quad \vec{F} = i\vec{l}\times\vec{B} = \frac{2vB^2}{R}\left(2Rvt - v^2t^2\right)$$

Comunque sia diretta la corrente nel solenoide la forza è di attrito opposta alla velocità

c) Si dissipa tutto il lavoro fatto dalla forza esterna che bilancia l'attrito magnetico per mantenere v costante

$$W = \int F\cdot dl = \int_0^{2R} \frac{2vB^2}{R}\left(2Rx - x^2\right)dx$$