Problema A

Un condensatore sferico è costituito da un guscio sferico conduttore interno di raggio $r_1 = 3cm$ e un guscio sferico esterno di raggio $r_2 = 5cm$. Lo spazio tra i gusci è riempito uniformemente di dielettrico lineare isotropo ed omogeneo di costante relativa $k = 3$.

a) Si derivi l'espressione della capacità del condensatore e se ne calcoli il valore numerico.

b) Immaginiamo ora che il dielettrico non occupi tutta la regione tra i due gusci, ma soltanto tra $r = r_1$ e $r = r_0 = 4cm$. I gusci sono collegati ad un generatore che mantiene una differenza di potenziale di 15V. Si calcolino le espressioni dei campi E e D in in funzione di r e i valori delle cariche di polarizzazione (specificandone la locazione).

c) Si calcoli l'energia elettrostatica del condensatore nelle configurazioni del punto a) e b). Si confronti con il lavoro fatto dal generatore (a potenziale costante) durante l'ipotetica estrazione di una parte del dielettrico. Si discuta il bilancio energetico.

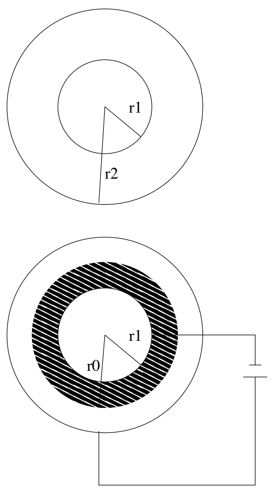
Problema B

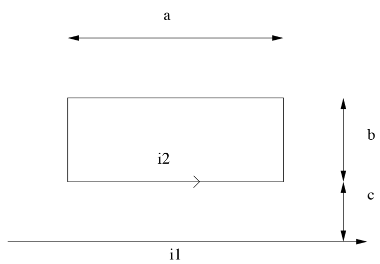
Un filo rettilineo indefinito è percorso da una corrente $i_1 = 3A$ ed una spira rettangolare da una corrente $i_2 = 5A$ come in figura. Due lati della spira sono paralleli al filo e lunghi a=10 cm, gli altri due lati sono ortogonali al filo e lunghi b=3cm. La spira dista c=2cm dal filo.

a) Calcolare la forza tra filo e spira

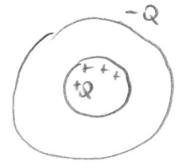
b) Calcolare il coefficiente di mutua induzione.

c) Assumere che la spira non sia percorsa da corrente, ma si muova con velocità $v = 5m/s$ allontanandosi dal filo perpendicolarmente ad esso. Si ricavi l'espressione della fem indotta.





PROBLEMA A



1) La definizione di capacità: $C = \frac{Q}{V}$

Il campo tra le due piastre:

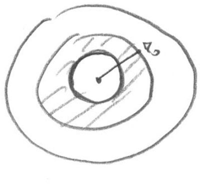
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 K}\frac{Q}{r^2} \quad (\text{Gauss})$$

Il potenziale:

$$V = V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\,dr = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 K \frac{R_2 R_1}{R_2 - R_1} = \frac{1 \cdot K}{9\times10^{9}\ \frac{Nm^2}{C^2}} = \frac{3}{9\times10^{9}\ \frac{Nm^2}{C^2}}\ \frac{0.05\times0.03}{0.05-0.03} = 0.025\times10^{-9} =$$
$$= 25\ pF$$

2)



Calcolo la capacità equivalente, sono due condensatori in serie...

$$C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \qquad C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 \frac{r_0 r_1}{r_0 - r_1} = \frac{3}{9\times10^9}\ \frac{0.04\cdot0.03}{0.04-0.03} = 40\ pF$$

$$= 14.27\ pF \qquad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_0 r_2}{r_2 - r_0} = \frac{1}{9\times10^9}\ \frac{0.04\cdot0.05}{0.05-0.04} = 22.2\ pF$$

La carica sulle piastre del condensatore è

$$Q' = C'V = 14.27\times10^{-12}\times 15 = 214\ pC$$

Posso valutare il vettore D usando il teorema di Gauss

$D = 0 \quad r < r_1,\ r > r_2$

$D = Q/4\pi r^2 \quad r_1 < r < r_2$ diretto radialmente, non cambia dentro e fuori al dielettrico

$E = 0 \quad r < r_1,\ r > r_2$

$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r 4\pi r^2} \quad r_1 < r < r_0$

$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \quad r_0 < r < r_2$

Per valutare le cariche di polarizzazione:

$$P = \varepsilon_0 (K-1) E$$

$\sigma_1 = -\varepsilon_0 (K-1) E(r_1)$ $\qquad q_{P1} = -\sigma_1 \cdot 4\pi r_1^2 = \varepsilon_0(K-1)\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 K r_1^2} 4\pi r_1^2$
$\qquad = -\frac{K-1}{K} Q = 143\ pC$

$\sigma_2 = \varepsilon_0 (K-1) E(r_0)$ $\qquad q_{P2} = \sigma_2\, 4\pi r_0^2 = -q_{P1}$

Si dispongono sulle superfici del dielettrico

3)

Nella situazione 1)

$U_1 = \frac{1}{2} C V^2 = 2.8 * 10^{-9}$ J

Nella situazione 2)

$U_2 = \frac{1}{2} C' V^2 = 1.6 * 10^{-9}$ J $\quad \Delta U = \frac{1}{2} (C'-C) V^2 = 1.2 * 10^{-9}$ J

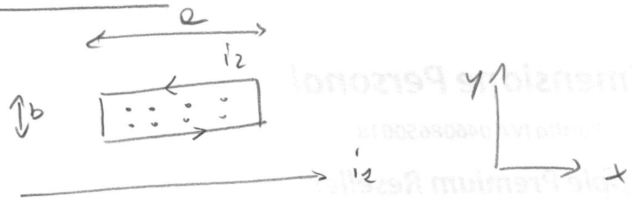
Il generatore fa un lavoro

$U_{gen} = \Delta Q \cdot V = (C-C') V^2$

che è il doppio della differenza di energia elettrostatica. L'altra metà è spesa sotto forma di lavoro per estrarre il dielettrico

PROBLEMA B

1)



$\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}$ su ogni lato della spira

Il campo generato dal filo è

$$B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi r}$$ uscente dal foglio sulla superficie della spira

I lati perpendicolari al filo non contribuiscono (F uguali e opposte)

$$F = i_2 a \frac{\mu_0 i_1}{2\pi c} - i_2 a \frac{\mu_0 i_1}{2\pi (b+c)} = i_2 a \frac{\mu_0 i_1}{2\pi}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b+c}\right) = 7 \times 10^{-6} N$$

attrattiva

2) Per calcolare M conviene calcolare il flusso che il filo genera sulla spira

$$\Phi = \int B \, d\Sigma = \int_c^{b+c} \frac{\mu_0 i_1}{2\pi y} a \, dy = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} a \ln \frac{b+c}{c}$$

$$M = \frac{\Phi}{i} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln \frac{b+c}{c} = 1.8 \times 10^{-8} H$$

3) Si vede il compito 8 Gennaio 2007