Laurea Magistrale in Fisica
Corso di Cosmologia
a.a. 2011-12

Soluzioni della prova scritta del 24-07-12

[1] Dalle relazioni valide nell'approssimazione di Zel'dovich si ricava $v_1/v_2 = (a_1/a_2)(\dot{D}_1/\dot{D}_2)$, con a il fattore di scala e $\dot{D}$ la derivata temporale del fattore di crescita. Dalla definizione $f(a) = \mathrm{d}\log D/\mathrm{d}\log a$ si ricava $\dot{D} = fDH$, con $H = \dot{a}/a$. In un universo di Einstein-de Sitter $f(a) = 1$, $D \propto a$ e $H(a) = H_0 E^{1/2}(a) = H_0 a^{-3/2}$, e quindi $v_1/v_2 = (a_1/a_2)^{1/2}$. Lo stesso risultato si ricava più rapidamente ricordando che in un universo di Einstein-de Sitter le velocità peculiari crescono con il tempo secondo la legge $v \propto t^{1/3}$. Nell'era dominata dalla materia $a \propto t^{2/3}$ e quindi $v \propto a^{1/2}$. In definitiva $v_1/v_2 = [(1+z_2)/(1+z_1)]^{1/2}$. Con i valori forniti dal problema si ottiene $v = 420(1.1/2.2)^{1/2} = 297$ km s^{-1}.

[2] Il semiasse maggiore proprio della galassia è $R = D_A\theta$, dove $D_A = x/(1+z)$ è la distanza angolare e x la coordinata radiale comovente. Essendo $\Omega_{\Lambda 0} = 0$, x può essere ricavata dalla formula di Mattig, che, con i valori dei parametri forniti dal testo, dà $x = 5532.26$ Mpc. Essendo $\theta = 1.8\pi/(3600 \times 180) = 8.73 \times 10^{-6}$ rad, si ottiene $R = 15.09$ kpc. Analogamente la magnitudine assoluta si determina dal modulo di distanza $m - M = 5\log_{10} D_L - 5 + K(z)$, con $D_L = x(1+z)$ la distanza di luminosità in parsec e la correzione K esprimibile con la relazione $K(z) = 2.5(\alpha - 1)\log_{10}(1+z)$, essendo l'intensità spettrale descritta da una legge di potenza con indice $\alpha = 2.2$. Dal valore di x ottenuto precedentemente, si ottiene $D_L = 17703.2$ Mpc e $m - M = 47.76$, ossia $M = -22.06$.

Nel secondo modello di universo si ha $x' = 4070.61$ Mpc, e quindi, se le dimensioni e la magnitudine assoluta trovate sono le corrette proprietà intrinseche della galassia, si trova $\theta' = R/D'_A = 1.186 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad} = 2.45$ arcsec e $m = -22.06 + 5\log_{10}[x'(1+z) \times 10^6/\mathrm{pc}] - 5 + K(z) = 25.03$. Gli scarti relativi per dimensioni e magnitudine apparente sono rispettivamente $\varepsilon_\theta = |2.45 - 1.8|/1.8 = 0.3$ e $\varepsilon_m = |25.03 - 25.7|/25.7 = 0.026$. Gli errori relativi devono quindi essere minori di questi scarti per poter distinguere tra i due modelli di universo. Chiaramente la dimensione apparente è la quantità più appropriata a questo scopo, poiché variando del 30% è relativamente più sensibile della magnitudine apparente alla variazione dei parametri cosmologici.

[3] La proporzionalità $T \propto a^{-1}$ vale a tutte le epoche, sia a $t < t_{\rm eq}$, quando, in un universo di Einstein-de Sitter, $a \propto t^{1/2}$, sia a $t > t_{\rm eq}$, quando $a \propto t^{2/3}$. Pertanto si può scrivere $T = T_0 a_0/a = T_e a_e/a$ dove l'indice 0 indica il tempo presente e l'indice e l'epoca dell'annichilazione di elettroni e positroni. Si ha quindi $T_e = T_0(a_0/a_e) = T_0(a_0/a_{\rm eq})(a_{\rm eq}/a_e)$, che diventa $T = T_0(t_0/t_{\rm eq})^{2/3}(t_{\rm eq}/t_e)^{1/2}$. Sostituendo T_e nella relazione $T = T_e a_e/a = T_e(t_e/t)^{1/2}$, si ottiene $t = t_0^{4/3} t_{\rm eq}^{-1/3}(T_0/T)^2$. Essendo $t_{\rm eq} = t_0(a_{\rm eq}/a_0)^{3/2} = t_0(1+z_{\rm eq})^{-3/2}$, si ricava $t = t_0(1+z_{\rm eq})^{1/2}(T_0/T)^2$. Sostituendo i valori forniti e sapendo che $t_0 = 2/(3H_0) = 2/(300h)$ km^{-1} s Mpc e $\Omega_0 = 1$, si ha finalmente

$$t = 176\left(\frac{0.1\,\mathrm{MeV}}{T}\right)^2\,\mathrm{s}\,.$$