Laurea Magistrale in Fisica
Corso di Cosmologia
a.a. 2011-12

Soluzioni della prova scritta del 28-09-12

[1] La magnitudine apparente della galassia si ricava dalla relazione $m = M + K(z) + 5\log_{10} D_L - 5$, dove $K(z)$ è la correzione K, $D_L = x(1+z)$ è la distanza di luminosità e x la distanza radiale comovente. Il modello di universo ha costante cosmologica nulla. Quindi, per x, posso applicare la formula di Mattig e ottenere $x = 7410.73$ Mpc e $D_L = 3.113 \times 10^4$ Mpc. Per uno spettro con legge di potenza $I \propto \nu^{-\alpha}$, la correzione $K(z) = 2.5(\alpha - 1)\log_{10}(1+z)$. Nel nostro caso $\alpha = 2.1$ e $K(z) = 1.714$. Sostituendo nella relazione per m si ottiene $m = 26.88$. Il diametro angolare apparente sarà $\theta = 2R/D_A$, dove $R = 15$ kpc è il raggio proprio della galassia e $D_A = x/(1+z)$ la distanza angolare. Si ottiene quindi $\theta = 1.7 \times 10^{-5}$ rad, ossia $\theta = 3.5$ arcsec.

[2] Per piccoli valori di z la magnitudine assoluta si può esprimere come $M = m - [25 - 5\log_{10} H_0 + 5\log_{10} cz + 1.086(1 - q_0)z]$, con le quantità nelle opportune unità di misura.

- ▹ In un universo di Einstein-de Sitter il parametro di decelerazione è $q_0 = \Omega_0/2 - \Omega_{\Lambda 0} = 1/2$. La costante di Hubble si ottiene dalla relazione $v = H_0 d$, sapendo che per $v = 6400$ km s^{-1} $d = 91$ Mpc. Si ottiene quindi $M = -17.22$.
- ▹ Se questa è la vera magnitudine assoluta della galassia, in un universo con $\Omega_0 = 0.3$ e $\Omega_{\Lambda 0} = 0.7$ la magnitudine apparente sarà $m = 21.32$, avendo utilizzato ancora la relazione $m = M + 25 - 5\log_{10} H_0 + 5\log_{10} cz + 1.086(1 - q_0)z$, con $q_0 = -0.55$ e gli altri parametri invariati. La differenza in magnitudine apparente tra i due modelli è quindi di appena 0.12 magnitudini che implica una incertezza relativa massima dello 0.56% per la misura delle magnitudini apparenti per poter distinguere i due modelli.
- ▹ Rispetto al primo quesito, la magnitudine assoluta $M = -17.22$ deve essere semplicemente diminuita della correzione K, che nel nostro caso vale $K(z) = 2.5(3 - 1)\log_{10}(1 + 0.11) = 0.2266$. Si ottiene quindi $M = -17.44$.

[3] Nell'approssimazione di Zel'dovich le velocità crescono secondo la legge

$$v = -\frac{\mathrm{d}D/\mathrm{d}\tau}{4\pi G\rho a^3}\nabla_x \phi_0$$

con ovvio significato dei simboli. Essendo il denominatore una costante per la conservazione della massa, per il rapporto delle velocità ai due tempi si ottiene $v_1/v_2 = (a_1/a_2)[\dot{D}(a_1)/\dot{D}(a_2)]$ con $\dot{D} = \mathrm{d}D/\mathrm{d}t$. Con il fattore di crescita $f(a) = \mathrm{d}\log D/\mathrm{d}\log a$ e $H(a) = \dot{a}/a$, si ottiene $v_1/v_2 = (a_1/a_2)[f(a_1)D(a_1)H(a_1)]/[f(a_2)D(a_2)H(a_2)]$. Per il rapporto dei fattori di Hubble si ottiene $H(a_1)/H(a_2) = \{(a_2^3/a_1^3)[E(a_1)/E(a_2)]\}^{1/2}$ e quindi

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{f(a_1)D(a_1)a_2^{1/2}E^{1/2}(a_1)}{f(a_2)D(a_2)a_1^{1/2}E^{1/2}(a_2)} \,.$$

Ricordando che $\Omega(a) = \Omega_0/E(a)$ e $\Omega_\Lambda = \Omega_{\Lambda 0}a^3/E(a)$, ed essendo $a = 1/(1+z)$, e quindi $a_1 = 1$ per $z = 0$, e $a_2 = 0.4545$ per $z = 1.2$, si ottiene $f(a_1)/f(a_2) = 0.4971/0.8915 = 0.5576$ e $D(a_1)/D(a_2) = 0.7779/0.4382 = 1.7752$. Per il rapporto dei fattori di crescita si è naturalmente tenuto conto che per un universo di Einstein-de Sitter $D(a) \propto a$. Si ottiene quindi il rapporto delle velocità $v_1/v_2 = 0.5576 \times 1.7752 \times (0.4545)^{1/2} \times (1/0.3657)^{1/2} = 1.1035$ e infine la velocità $v_2 = 353.4$ km s^{-1} a $z = 1.2$.