Teoria dei Gruppi
Esame Virtuale
13/11/06

1 Problemi

1.1 Problema N. 1

Si consideri il gruppo diedro D_3, definito come gruppo di simmetria del triangolo equilatero nel piano euclideo.

- Si determinino l'ordine e il rango di D_3.
- Si costruisca esplicitamente la rappresentazione matriciale bidimensionale del gruppo, in una prescelta base ortonormale nel piano.
- Quali sono i sottogruppi di D_3? Ci sono sottogruppi invarianti? In caso positivo, quali sono i corrispondenti gruppi quoziente?
- Quante sono le rappresentazioni irriducibili di D_3, e quali sono le rispettive dimensionalità?

1.2 Problema N. 2

Si consideri il gruppo $\mathcal{C}$ delle trasformazioni lineari della retta reale, $x' = ax + b$.

- Si caratterizzi il gruppo come varietà differenziabile, individuando e motivando eventuali restrizioni sui parametri.
- Si costruiscano i generatori infinitesimi delle trasformazioni del gruppo in termini di operatori differenziali sulle funzioni di x, e se ne calcoli l'algebra.
- Si consideri $\mathcal{C}$ come sottogruppo del gruppo modulare reale $M_{\mathbf{R}} = SL(2,\mathbf{R})/\mathbf{Z_2}$. Si identifichino i generatori di $\mathcal{C}$ tra quelli di $M_{\mathbf{R}}$ e si verifichi che soddisfano la stessa algebra.

2 Domande

2.1 Domanda N. 1

Si definisca il concetto di omotopia su una varietà topologica $\mathcal{M}$, e in particolare si definisca il primo gruppo di omotopia o gruppo fondamentale $\Pi_1(\mathcal{M})$. Si discuta l'utilizzo del concetto di omotopia nella teoria dei gruppi di Lie, in particolare in relazione al "terzo teorema di Lie".

2.2 Domanda N. 2

Si enuncino i due lemmi di Schur per gruppi finiti, e si discuta brevemente la loro importanza nella teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti.