

1 Problemi

1.1 Problema N. 1

Si consideri il gruppo delle permutazioni di quattro oggetti, S_4 .

- Quali sono l'ordine e il rango di S_4 ? Quali sono gli ordini ammissibili per i sottogruppi di S_4 ?
- Si elenchino gli elementi del gruppo nella notazione dei cicli.
- Si suddividano gli elementi in classi di equivalenza.
- Esistono solo due rappresentazioni irriducibili unidimensionali di S_4 . Quali sono?
- Utilizzando le informazioni precedenti, quante sono in tutto le rappresentazioni irriducibili inequivalenti di S_4 , e quali sono le loro dimensionalità?

1.2 Problema N. 2

Si consideri il gruppo $ISO(2)$ delle rototraslazioni del piano euclideo, rappresentate in un sistema di coordinate ortogonali da

$$x' = \cos \theta x + \sin \theta y + a, \quad y' = -\sin \theta x + \cos \theta y + b. \quad (1)$$

- Si tratta di un gruppo compatto? Semplice? Semisemplice?
- E' noto che $ISO(2)$ può essere rappresentato in termini di matrici tridimensionali operanti su vettori colonna di componenti $\{x, y, 1\}$. Si scriva esplicitamente questa rappresentazione e la si utilizzi per fornire una rappresentazione matriciale dei generatori dell'algebra del gruppo, $iso(2)$.
- Si calcolino le relazioni di commutazione e si verifichi se l'algebra è semplice, semisemplice, solubile.
- Utilizzando le costanti di struttura così determinate si calcoli la metrica di Cartan-Killing.

2 Domande

2.1 Domanda N. 1

Si definisca formalmente la nozione di gruppo di Lie. In particolare, lavorando in un carta locale in cui l'operazione di traslazione (sinistra) di un elemento h di coordinate locali β^μ per opera di un elemento g di coordinate α^μ , sia data da $\phi^\mu(\alpha, \beta)$, si descrivano le condizioni cui devono sottostare le funzioni ϕ^μ per un gruppo di Lie. Utilizzando poi la differenziabilità delle ϕ^μ , si definiscano i generatori delle trasformazioni infinitesime del gruppo, per traslazioni destre e sinistre.

2.2 Domanda N. 2

Si discutano i gruppi di simmetria delle figure piane, e in particolare i gruppi diedri D_n . Di questi si forniscano esempi, si indichi ordine e rango, si dia una rappresentazione matriciale e una presentazione formale in termini di generatori.