

1 Problemi

1.1 Problema N. 1

Si considerino il gruppo $U(1)$, costituito dai numeri complessi unimodulari, e le sue rappresentazioni. In particolare

- Qual è la dimensionalità delle rappresentazioni irriducibili di $U(1)$? Da quale teorema discende questo risultato?
- Si scriva esplicitamente l'espressione per le rappresentazioni irriducibili di $U(1)$, $\mathcal{D}_m(\theta)$, motivando il risultato.
- Quali delle $\mathcal{D}_m(\theta)$ sono fedeli?
- La rappresentazione bidimensionale che definisce il gruppo $SO(2) \sim U(1)$ come gruppo delle rotazioni del piano euclideo è riducibile. La si scomponga in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili.
- Si scrivano le relazioni di ortonormalità e completezza per i caratteri delle rappresentazioni irriducibili di $U(1)$, notando l'importanza della scelta della misura di integrazione.

1.2 Problema N. 2

Si consideri l'algebra $su(2)$.

- Si scrivano esplicitamente le matrici dell'algebra nella rappresentazione fondamentale e nella rappresentazione aggiunta.
- Si calcoli la metrica di Cartan-Killing
- Stabilito il rango dell'algebra e scelta una sottoalgebra di Cartan, si scrivano esplicitamente i generatori della rappresentazione aggiunta e le loro relazioni di commutazione nella forma canonica di Cartan-Weyl.
- Si costruisca quindi il diagramma delle radici di $su(2)$.
- L'algebra $su(2)$ è isomorfa a $so(3)$. Come differisce dall'algebra del gruppo di Lorentz tridimensionale $so(1,2)$? Qual è la metrica di Cartan-Killing per $so(1,2)$?

2 Domande

2.1 Domanda N. 1

Si caratterizzino le matrici che compongono le algebre di Lie dei gruppi matriciali classici $GL(n, \mathbf{R})$, $SL(n, \mathbf{R})$, $U(n, \mathbf{C})$, $SU(n, \mathbf{C})$, $O(n, \mathbf{R})$, $SO(n, \mathbf{R})$, $SP(n, \mathbf{R})$, partendo dalle proprietà definitive dei corrispondenti gruppi. In particolare si verifichi che le algebre così costruite abbiano la corretta dimensionalità, e si notino le necessarie modifiche nel caso dei gruppi pseudo-ortogonali $O(p, q; \mathbf{R})$.

2.2 Domanda N. 2

Si definiscano le misure di integrazione invarianti a destra (o a sinistra) sulle varietà di gruppo, e in particolare la misura di Haar. Si fornisca un esempio esplicito.