

# 1 Problemi

## 1.1 Problema N. 1

Si consideri il gruppo diedro  $D_4$ , cioè il gruppo di simmetria di un quadrato nel piano euclideo.

- Si enumerino e si descrivano le trasformazioni di  $D_4$ , determinando così la dimensionalità del gruppo. Si fornisca una presentazione del gruppo in termini di generatori, stabilendo il rango.
- Si costruisca esplicitamente una rappresentazione matriciale bidimensionale di  $D_4$  e si verifichi se il gruppo sia o no abeliano. Quali trasformazioni costituiscono il centro di  $D_4$ ?
- La rappresentazione bidimensionale ora costruita è irriducibile?
- Quante sono le rappresentazioni irriducibili di  $D_4$  e quali sono le loro dimensionalità?

## 1.2 Problema N. 2

Si consideri l'algebra  $so(4)$  del gruppo delle rotazioni nello spazio euclideo di dimensione  $d = 4$ .

- Stabilita la dimensionalità dell'algebra, si forniscano due rappresentazioni esplicite dei generatori, una in termini di matrici  $4 \times 4$ , e una in termini di operatori differenziali agenti sulle coordinate  $x, y, z, w$  dello spazio  $\mathbf{R}^4$ , generalizzando opportunamente la nota forma degli operatori di momento angolare nello spazio  $\mathbf{R}^3$ .
- Si calcolino le costanti di struttura dell'algebra nella base scelta.
- Si mostri che è possibile costruire semplici combinazioni lineari dei generatori che ripartiscono l'algebra in due ideali, e si identifichino questi ideali.
- Si deduca se l'algebra  $so(4)$  è semplice, semisemplice, solubile.

## 2 Domande

### 2.1 Domanda N. 1

Facendo riferimento alla forma canonica (base di Cartan-Weyl) di un'algebra di Lie semisemplice di dimensione  $d$  e rango  $r$ , si definiscano i seguenti concetti.

- Sottoalgebra di Cartan.
- Radici dell'algebra.
- Radici semplici.
- Diagramma di Dynkin.

### 2.2 Domanda N. 2

Si discuta il gruppo delle permutazioni di  $n$  oggetti,  $S_n$ . In particolare

- se ne indichino ordine e rango;
- si introduca la notazione dei cicli;
- si enunci il teorema di Cayley;
- si individuino le classi di coniugazione;
- si definiscano i diagrammi di Young.