Teoria dei Gruppi
Esame Scritto
05/07/07

1 Domande

Si dica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa, fornendo un argomento preciso per sostenere la propria scelta. Nel caso di affermazioni false, si corregga l'errore.

- L'unico gruppo discreto di ordine $d = 7$ (modulo isomorfismi) è il gruppo ciclico $\mathbf{Z}_7$.
- Il rango del gruppo delle permutazioni di n oggetti, S_n, è $|S_n| = n$.
- Non esiste nessun gruppo unitario $U(N, \mathbf{C})$ che abbia la stessa dimensionalità reale di un gruppo ortogonale $O(M, \mathbf{R})$.
- Il primo gruppo di omotopia (gruppo fondamentale) del cerchio è $\Pi_1(S^1) = \mathbf{Z}$.
- Il centro del gruppo $SU(N)$ è costituito dalla sola identità.
- Il gruppo $\mathbf{Z}_5$ ammette una rappresentazione irriducibile di dimensione $d = 5$.
- Il gruppo S_4 ammette una rappresentazione irriducibile di dimensione $d = 5$.
- Gli operatori differenziali $J_{mn} = x_m \partial/\partial x_n - x_n \partial/\partial x_m$, con $\{m, n\} = 1, \ldots D$, costituiscono una realizzazione dei generatori dell'algebra $so(D)$.
- Le radici dell'algebra $su(3)$ sono rappresentabili come vettori nel piano euclideo. In particolare vi sono $p = 6$ radici non nulle e $q = 2$ radici nulle.
- Oltre alle quattro ben note serie infinite di algebre di Lie semisemplici, esistono quattro e solo quattro algebre eccezionali, G_2, F_4, E_6 ed E_8.

2 Problemi

2.1 Problema N. 1

Si consideri l'algebra $su(2) \sim so(3)$.

- Stabilita la dimensionalità dell'algebra, si forniscano due rappresentazioni esplicite dei generatori, una in termini di matrici complesse 2×2, e una in termini di matrici reali 3×3.
- Si calcolino le costanti di struttura dell'algebra nella base scelta.

- Si costruisca la metrica di Cartan-Killing.

- Come risulta modificata la metrica di Cartan-Killing se si considera invece l'algebra $so(2,1)$? Le due algebre sono semplici? semisemplici? compatte?

2.2 Problema N. 2

Si considerino le matrici

$$M(y) = \begin{pmatrix} \cosh y & \sinh y \\ \sinh y & \cosh y \end{pmatrix} \ ,$$

con y reale.

- Si mostri che esse forniscono una realizzazione del gruppo $SO(1,1)$.

- Si deduca la forma delle matrici dell'algebra $so(1,1)$, e del corrispondente generatore.

- Si verifichi esplicitamente l'operatività della mappa esponenziale in questo caso.

- Si consideri parallelamente il caso dell'algebra $so(2)$. Cosa si può dire circa le complessificazioni delle due algebre?