

1 Problemi

1.1 Problema N. 1

Si definiscano le nozioni di prodotto diretto e prodotto semidiretto di due gruppi, indicando le differenze salienti. Si mostri poi se le seguenti affermazioni siano vere o false.

- Il gruppo diedro D_2 è isomorfo al prodotto diretto $\mathbf{Z}_2 \otimes \mathbf{Z}_2$.
- Il gruppo $SU(2)$ è isomorfo al prodotto diretto $SO(3) \otimes \mathbf{Z}_2$.
- Il gruppo \mathbf{Z}_6 è isomorfo al prodotto diretto $\mathbf{Z}_2 \otimes \mathbf{Z}_3$.
- Il gruppo di Poincaré $ISO(1, 3)$ è isomorfo al prodotto semidiretto $SO(1, 3) \otimes_s T_4$, con T_4 il gruppo delle traslazioni in \mathbf{R}^4 .

1.2 Problema N. 2

- Si definisca la rappresentazione regolare di un gruppo finito G , e si mostri esplicitamente che la definizione data soddisfa alle proprietà richieste per una rappresentazione.
- Si costruisca esplicitamente la rappresentazione regolare del gruppo S_3 a partire dalla tabella di moltiplicazione del gruppo.
- Utilizzando le note proprietà della rappresentazione regolare, si derivino le dimensionalità delle rappresentazioni irriducibili di S_3 .
- Si costruiscano le matrici delle rappresentazioni irriducibili di S_3 e si componga la tabella dei caratteri.

2 Domande

2.1 Domanda N. 1

Utilizzando la nozione di rappresentazione aggiunta di un'algebra di Lie, si definisca la metrica di Cartan-Killing e si enunci il criterio di Cartan per stabilire se l'algebra sia o no semisemplice. Si utilizzi poi la metrica di Cartan per definire gli operatori di Casimir. Cosa caratterizza la metrica di Cartan-Killing per algebre semisemplici di gruppi compatti?

2.2 Domanda N. 2

Si enuncino commentandole brevemente le proprietà di completezza e ortonormalità degli elementi di matrice e dei caratteri delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi finiti.