Teoria dei Gruppi
Esame Scritto
19/12/07

1 Problemi

1.1 Problema N. 1

Si considerino i gruppi alternanti A_n, ovvero i gruppi delle permutazioni pari di n oggetti.

- Si spieghi precisamente come si può definire A_n come sottogruppo di S_n. Qual è l'ordine di A_n?
- Si consideri il caso $n = 3$. Qual è il rango di A_3? Si costruisca la tabella di moltiplicazione e si individuino le classi di coniugazione di A_3. Che cosa se ne può concludere circa le rappresentazioni irriducibili del gruppo? Si dimostri che A_3 è il gruppo derivato di S_3.
- Si consideri ora il caso $n = 4$. Si elenchino esplicitamente gli elementi del gruppo. Si mostri che A_4 non è abeliano, e che ammette un sottogruppo normale isomorfo al gruppo diedro D_2.
- Si mostri che A_3 e A_4 sono gruppi solubili, costruendo la loro serie di inclusione normale.

1.2 Problema N. 2

Si consideri il gruppo degli automorfismi conformi del piano complesso esteso, $PSL(2, \mathbf{C})$, in altre parole il gruppo delle trasformazioni razionali fratte

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \ , \qquad ad - bc = 1 \ . \tag{1}$$

- Si verifichi esplicitamente che queste trasformazioni formano un gruppo.
- Si fornisca una rappresentazione matriciale del gruppo in termini di matrici complesse 2×2, indicando come tali matrici realizzano l'azione del gruppo definita in Eq. (1).
- Si stabilisca precisamente la relazione tra il gruppo $PSL(2, \mathbf{C})$ e il gruppo $SL(2, \mathbf{C})$, si costruisca l'algebra di Lie e si calcolino le costanti di struttura.
- Il gruppo $PSL(2, \mathbf{C})$ è semplicemente connesso? Se no, qual è il suo gruppo fondamentale? Il gruppo è compatto? La corrispondente algebra di Lie è semplice?

- L'algebra di Lie $sl(2, \mathbf{C})$ è l'estensione complessa di $sl(2, \mathbf{R})$. Si mostri che essa ammette (anche) una sezione reale isomorfa a $su(2)$.

2 Domande

2.1 Domanda N. 1

Si definiscano i concetti di rappresentazione di un gruppo, sottospazio invariante, rappresentazione irriducibile e completamente irriducibile. Si spieghi perché nel caso di gruppi finiti questi ultimi due concetti si equivalgono. Si enuncino i due lemmi di Schur e si utilizzi il primo di essi per mostrare che tutte le rappresentazioni irriducibili dei gruppi abeliani sono unidimensionali.

2.2 Domanda N. 2

Si dica quando un gruppo di Lie viene detto semplicemente connesso, e quando due gruppi di Lie si dicono localmente isomorfi. Si utilizzino queste due definizioni per enunciare il terzo teorema di Lie, definendo così anche il concetto di gruppo universale ricoprente. Si illustrino le definizioni date con un esempio.