Teoria dei Gruppi
Esame Scritto
25/01/08

1 Domande

Si dica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa, fornendo una breve giustificazione della propria scelta. Nel caso di affermazioni false, si corregga l'errore.

- Il gruppo delle permutazioni S_4 ammette 5 rappresentazioni irriducibili inequivalenti.
- Il rango del gruppo diedro D_n, è pari a n.
- Il gruppo derivato del gruppo S_3 è il gruppo banale $\{e\}$.
- Il primo gruppo di omotopia (gruppo fondamentale) di $SO(3)$ è $\Pi_1(SO(3)) = \mathbf{Z}_2$.
- Il centro del gruppo $U(N)$ è il gruppo $U(1)$.
- Il gruppo diedro D_n ammette, $\forall n$, una rappresentazione irriducibile di dimensione $d = n - 1$.
- Il gruppo $GL(n, \mathbf{R})$ è semplicemente connesso.
- Le algebre $su(2)$ e $sl(2, \mathbf{R})$ sono sezioni reali di $sl(2, \mathbf{C})$.
- Le radici dell'algebra $so(4)$ sono rappresentabili come vettori nel piano euclideo. In particolare vi sono $p = 6$ radici non nulle e $q = 2$ radici nulle.
- Il gruppo $SO(4)$ è semisemplice.

2 Problemi

2.1 Problema N. 1

Si considerino i gruppi ciclici $\mathbf{Z}_n$ e le loro rappresentazioni irriducibili. In particolare

- Qual è la dimensionalità delle rappresentazioni irriducibili di $\mathbf{Z}_n$? Quante sono quindi le rappresentazioni irriducibili inequivalenti?
- Si definisca la rappresentazione regolare per $\mathbf{Z}_n$, se ne indichi la dimensionalità, e la si costruisca esplicitamente fornendo una rappresentazione matriciale del generatore.

- Si determini la forma esplicita delle rappresentazioni irriducibili di $\mathbf{Z}_n$ diagonalizzando la rappresentazione regolare.
- Si scrivano le relazioni di ortonormalità e completezza per i caratteri delle rappresentazioni irriducibili di $\mathbf{Z}_n$.
- Si deduca la forma delle rappresentazioni irriducibili del gruppo $U(1)$ effettuando un limite formale per $n \to \infty$.

2.2 Problema N. 2

Si considerino le matrici della forma

$$M(\theta, c) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

con θ reale e definito $\bmod 2\pi$, e c complesso.

- Si mostri che esse formano un gruppo. In particolare si determinino i parametri che caratterizzano M^{-1} in funzione dei parametri di M.
- Qual è la dimensionalità reale del gruppo? Si tratta di un gruppo compatto? Semplicemente connesso?
- Si costruisca l'algebra di Lie del gruppo (come algebra su $\mathbf{R}$). Si tratta di un'algebra semplice, o semisemplice? Si verifichi la risposta calcolando la metrica di Cartan-Killing.