Teoria dei Gruppi
Esame Scritto
10/04/08

1 Domande Brevi

Si dica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa, fornendo un argomento per sostenere la propria scelta. Nel caso di affermazioni false, si corregga l'errore.

- Il gruppo fondamentale (primo gruppo di omotopia) del toro bidimensionale $\mathcal{T}_2$ è $\Pi_1(\mathcal{T}_2) = \mathbf{Z} \otimes \mathbf{Z}$.
- I poliedri regolari nello spazio tridimensonale sono quattro: il tetraedro, l'ottaedro, il cubo e il dodecaedro.
- Il gruppo delle permutazioni di cinque oggetti, S_5, ammette 7 rappresentazioni irriducibili inequivalenti .
- Il gruppo $ISO(2)$ è il prodotto semidiretto $SO(2) \otimes_s T_2$, dove T_2 è il gruppo delle traslazioni in $\mathbf{R}^2$, dunque si tratta di un gruppo abeliano.
- Il gruppo delle permutazioni di tre oggetti, S_3, non è né semplice né semisemplice.
- Il gruppo $SO(3)$ è compatto e semplicemente connesso.
- L'algebra delle matrici triangolari in senso stretto (cioè con gli elementi della diagonale principale nulli) è nilpotente.
- La metrica di Cartan-Killing dell'algebra $iso(3)$ soddisfa $\det g = -2$.
- Le radici dell'algebra $so(4)$ sono rappresentabili come vettori nel piano euclideo. In particolare vi sono $p = 4$ radici non nulle e $q = 2$ radici nulle.
- Le algebre di Lie $so(5)$ e $sp(4)$ hanno lo stesso diagramma di Dynkin per cui sono isomorfe.

2 Domande

2.1 Domanda N. 1

Si definisca formalmente la nozione di gruppo di Lie. In particolare

- Lavorando in un carta locale in cui l'operazione di traslazione (sinistra) di un elemento h di coordinate locali β^μ per opera di un elemento g di coordinate α^μ, sia data da $\phi^\mu(\alpha, \beta)$, si descrivano le condizioni cui devono sottostare le funzioni ϕ^μ per un gruppo di Lie.

- Utilizzando la differenziabilità delle funzioni ϕ^μ, si definiscano i generatori delle trasformazioni infinitesime del gruppo, e si mostri che essi sono associati a vettori tangenti alla varietà di gruppo nell'identità.

- Si enuncino i due teoremi di Lie in termini di proprietà dei campi vettoriali definiti sula varietà di gruppo dai generatori infinitesimi.

2.2 Domanda N. 2

Si enuncino le proprietà di completezza e ortonormalità degli elementi di matrice e dei caratteri delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi finiti, e si descriva la restrizione che queste proprietà impongono sulla dimensionalità delle rappresentazioni irriducibili stesse.