

1 Problemi

1.1 Problema N. 1

Si consideri il gruppo $SL(2, \mathbf{R})$, e la sua estensione complessa $SL(2, \mathbf{C})$.

- Si definiscano i due gruppi, se ne stabilisca la dimensionalità, e si dica se si tratti di gruppi compatti. $SL(2, \mathbf{C})$ è semplice, o semisemplice?
- Si caratterizzi l'algebra di Lie del gruppo $SL(2, \mathbf{R})$, e se ne fornisca una esplicita rappresentazione in termini di matrici bidimensionali.
- Si consideri ora il gruppo costituito dagli automorfismi del piano complesso esteso $\mathbf{C} \cup \infty$. Si mostri che tale gruppo è costituito dall'insieme delle trasformazioni lineari fratte invertibili, con la naturale operazione di composizione di funzioni.
- Si mostri esplicitamente che il gruppo definito al punto precedente, di solito indicato con $PSL(2, \mathbf{C})$ è isomorfo al quoziente di $SL(2, \mathbf{C})$ diviso per un suo sottogruppo invariante \mathbf{Z}_2 .

1.2 Problema N. 2

Si consideri l'algebra $su(2)$.

- Si scrivano esplicitamente le matrici dell'algebra nella rappresentazione fondamentale e nella rappresentazione aggiunta.
- Si calcoli la metrica di Cartan-Killing e si deduca se l'algebra sia semplice o semisemplice.
- Stabilito il rango dell'algebra e scelta una sottoalgebra di Cartan, si scrivano esplicitamente i generatori della rappresentazione aggiunta e le loro relazioni di commutazione nella forma canonica di Cartan-Weyl.
- Si costruisca quindi il diagramma delle radici di $su(2)$.

2 Domande

2.1 Domanda N. 1

Si definiscano le nozioni di curva continua, di composizione di curve, e il concetto di omotopia su una varietà topologica \mathcal{M} . In particolare, si definisca il primo gruppo di omotopia o gruppo fondamentale $\Pi_1(\mathcal{M})$, facendo qualche esempio. Si discuta brevemente l'utilizzo del concetto di omotopia nella teoria dei gruppi di Lie, in particolare in relazione al "terzo teorema di Lie".

2.2 Domanda N. 2

Si definisca e si discuta il gruppo delle permutazioni di n oggetti, S_n . In particolare: se ne indichino ordine e rango; si introduca la notazione dei cicli; si individuino le classi di coniugazione; si definiscano i diagrammi di Young.