Teoria dei Gruppi
Esame Scritto
13/01/09

1 Problemi

1.1 Problema N. 1

Si consideri il gruppo delle permutazioni di cinque oggetti, S_5.

- Quali sono l'ordine e il rango di S_5? Qual è il sottogruppo proprio massimale (di massimo ordine) di S_5, e qual è il suo ordine?
- Quale tra i gruppi diedrali $\{D_3, D_8, D_{13}\}$ può essere un sottogruppo di S_5? Si individui concretamente almeno una copia di tale sottogruppo in S_5.
- Si enumerino la classi di equivalenza di S_5, e le si caratterizzino con i corrispondenti diagrammi di Young.
- Quante sono quindi le rappresentazioni irriducibili inequivalenti di S_5, e quali informazioni abbiamo sulle loro dimensionalità?

1.2 Problema N. 2

Si considerino il gruppo $U(1)$, costituito dai numeri complessi unimodulari, e le sue rappresentazioni. In particolare

- Qual è la dimensionalità delle rappresentazioni irriducibili di $U(1)$?
- Si scriva esplicitamente l'espressione per le rappresentazioni irriducibili di $U(1)$, $\mathcal{D}_m(\theta)$, motivando il risultato e specificando in particolare i possibili valori del parametro m.
- Quali delle $\mathcal{D}_m(\theta)$ sono fedeli?
- La rappresentazione bidimensionale che definisce il gruppo $SO(2) \sim U(1)$ come gruppo delle rotazioni del piano euclideo è riducibile. La si scomponga in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili.
- Si scrivano le relazioni di ortonormalità e completezza per i caratteri delle rappresentazioni irriducibili di $U(1)$, notando l'importanza della scelta della misura di integrazione.

2 Domande

2.1 Domanda N. 1

Si definiscano formalmente i gruppi di Lie e le algebre di Lie. Si discuta *brevemente* come si può associare ad ogni gruppo di Lie un'algebra di Lie, dapprima utilizzando la caratterizzazione geometrica dei gruppi di Lie come varietà differenziabili, e poi utilizzando la loro caratterizzazione algebrica come gruppi di matrici.

2.2 Domanda N. 2

Si definiscano i concetti di rappresentazione di un gruppo, sottospazio invariante, rappresentazione irriducibile, riducibile, e completamente riducibile. Si spieghi perché, nel caso di gruppi finiti, questi ultimi due concetti si equivalgono. Si enuncino i due lemmi di Schur e si utilizzi il primo di essi per mostrare che tutte le rappresentazioni irriducibili dei gruppi abeliani sono unidimensionali.