Teoria dei Gruppi
Esame Scritto
10/07/09

1 Problemi

1.1 Problema N. 1

- Si definisca il concetto di poliedro regolare nello spazio euclideo tridimensionale.
- Si derivi la disequazione diofantina che lega tra di loro il numero f delle facce che concorrono in ogni dato vertice del poliedro, e il numero n dei lati di ogni data faccia.
- Si enumerino i poliedri regolari in tre dimensioni ('solidi platonici') corrispondenti alle soluzioni dell'equazione diofantina prima derivata, e se ne descrivano le proprietà salienti.
- Si consideri il gruppo di simmetria T del più semplice dei solidi platonici, il tetraedro. Se si considerano le sole trasformazioni corrispondenti a rotazioni proprie, si individua un sottogruppo $T_d \subset T$, che è di ordine $n = 12$. Si mostri che T_d è isomorfo ad A_4, il gruppo delle permutazioni pari di quattro oggetti, identificando le rotazioni rilevanti con le corrispondenti permutazioni delle posizioni dei vertici del tetraedro.

1.2 Problema N. 2

Si considerino le matrici

$$M(y) = \begin{pmatrix} \cosh y & \sinh y \\ \sinh y & \cosh y \end{pmatrix} ,$$

con y reale.

- Si mostri che esse realizzano il gruppo $SO(1,1)$.
- Si deduca la forma del generatore dell'algebra $so(1,1)$.
- Si verifichi esplicitamente l'operatività della mappa esponenziale in questo caso.
- Si consideri parallelamente il caso dell'algebra $so(2)$. Cosa si può dire circa le complessificazioni delle due algebre?

2 Domande

2.1 Domanda N. 1

Si enuncino commentandole brevemente le proprietà di ortogonalità e di completezza degli elementi di matrice e dei caratteri delle rappresentazioni irriducibili dei gruppi finiti. Si fornisca un semplice esempio illustrativo.

2.2 Domanda N. 2

Facendo riferimento alla forma canonica (base di Cartan-Weyl) di un'algebra di Lie semisemplice di dimensione d e rango r, si definiscano i seguenti concetti.

- Sottoalgebra di Cartan.
- Radici dell'algebra.
- Radici positive.
- Radici semplici.
- Diagramma di Dynkin.