Esercizio 1 Data la simmetria piana del problema, il campo elettrico dipende solo dalla distanza x dalla piastra sinistra del condensatore.

Le piastre sono collegate a terra e sulle loro superfici interne si accumulano delle cariche superficiali con densità incognita $\sigma_1 = \sigma(0)$ e $\sigma_2 = \sigma(2d)$.

Le due piastre sono di materiale conduttore, quindi al loro interno il campo elettrico è nullo, per cui il flusso del campo elettrico attraverso una superficie cilindrica con basi di area Σ interne alle piastre e parallele a queste di è nullo. Da questo otteniamo una relazione che lega le densità superficiali e di volume di carica presenti nel sistema.

$$\Phi(E) = \frac{\sigma_1 \Sigma}{\epsilon_0} + \frac{\rho \Sigma d}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_2 \Sigma}{\epsilon_0} = 0$$

cioè:

$$\sigma_2 = -\sigma_1 - \rho d$$

.

Per calcolare il valore del campo elettrico per $0 < x < 2$d usiamo il teorema di Gauss applicato al campo $\mathbf{D}$ usando come superficie un cilindro con una base all'interno dell'armatura posta ad $x = 0$ e la seconda a distanza x dalla stessa. Le basi del cilindro sono parallele all'armatura. Otteniamo

0< $x <$ d $\qquad \Phi(\mathbf{D}) = D(x)\Sigma = \sigma_1\Sigma + \rho\Sigma x \qquad \Rightarrow \qquad D(x) = \sigma_1 + \rho x$

d< $x <$ 2d $\qquad \Phi(\mathbf{D}) = D(x)\Sigma = \sigma_1\Sigma + \rho\Sigma d \qquad \Rightarrow \qquad D(x) = \sigma_1 + \rho d$

Da questo posso ricavare il valore del campo elettrico nelle stesse regioni:

0< $x <$ d $\qquad E(x) = \frac{\sigma_1 + \rho x}{2\epsilon_0}$

d< $x <$ 2d $\qquad E(x) = \frac{\sigma_1 + \rho d}{\epsilon_0}$

Per conoscere completamente il valore del campo elettrico E dobbiamo calcolare il valore di σ_1, questo si calcola imponendo che la differenza di potenziale tra le due armature sia nulla.

$$\Delta V = \int_0^{2d} E(x)dx = \int_0^d \frac{\sigma_1 + \rho x}{2\epsilon_0} dx + \int_d^{2d} \frac{\sigma_1 + \rho d}{\epsilon_0} = 0$$

da cui otteniamo che

$$\sigma_1 = -\frac{5}{6}\rho d$$

. Che sostituito nelle espressioni di E(x) ci dà:

0< $x <$ d $\qquad E(x) = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\left(x - \frac{5}{6}d\right)$

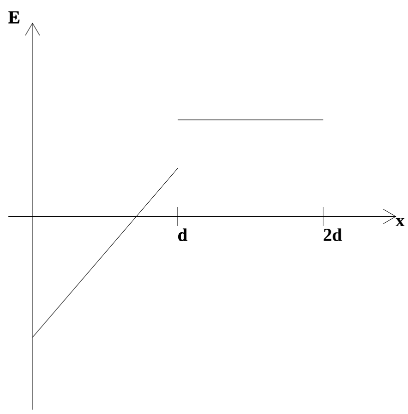
d< $x<$ 2d $\qquad E(x)=\frac{\rho d}{6\epsilon_0}$

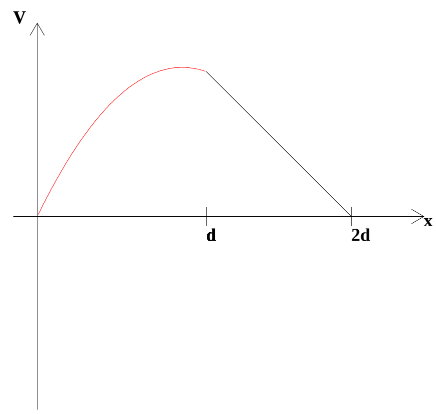
Avendo determinato le espressioni del campo elettrico E possiamo ricavare quelle del potenziale V(x)

0< $x<$ d $\qquad V(x)=\int_0^x E(x)dx=\frac{\rho x}{4\epsilon_0}\left(x-\frac{5}{3}d\right)$

d< $x<$ 2d $\qquad V(x)=V(d)+\int_d^x E(x)dx=\frac{\rho d}{6\epsilon_0}\left(x-2d\right)$

Gli andamenti di queste funzioni sono riportati in figura.





Cariche di Polarizzazione

Innanzi tutto valutiamo le cariche di polarizzazione presenti sulle due superfici del dielettrico.

$$\sigma_P=\mathbf{P}\cdot\mathbf{u_n}$$

Dove il vettore polarizzazione $\mathbf{P}$ è dato da:

$$\mathbf{P}=\chi\epsilon_0\mathbf{E}=\chi\epsilon_0\frac{\sigma_1+\rho x}{2\epsilon_)}=\frac{\sigma_1+\rho x}{2}$$

essendo $\chi=1$.

$$\sigma_P(0)=-\frac{\sigma_1}{2}\qquad\sigma_P(d)=\frac{\sigma_1+d}{2}$$

La densità volumica della carica di polarizzazione è invece data da:

$$\rho_P=-\nabla\cdot\mathbf{P}=-\frac{\partial P}{\partial x}=-\frac{\rho}{2}$$

quindi la carica totale di polarizzazione è:

$$Q_P=\sigma_P(0)\Sigma+\sigma_P(d)\Sigma+\rho_P\Sigma d=0$$

La forza per unità di superficie sul conduttore in $x = 2$d è:

$$\frac{\mathbf{F}}{\Sigma} = \frac{\sigma_2^2}{2\epsilon_0}\mathbf{u_n} = -\frac{\sigma_2^2}{2\epsilon_0}bf u_x$$

con

$$\sigma_2 = -\sigma_1 - \rho d = -\frac{\rho d}{6}$$

quindi

$$\frac{F}{\Sigma} = \frac{\rho^2 d^2}{72\epsilon_0} = 15.7N$$

Esercizio 2