Esercizio 1 La carica elettrica presente sulla piastra **I** si distribuirà sulle sue superfici, bisogna calcolare come si divide la carica tra le due superfici. Sulla piastra **II** si ha una riditribuzione della carica totale per induzione completa (dovuta al campo elettrico generato dalla carica presente sulla piastra **I**, anche in questo caso dobbiamo determinare come si distribuisce la carica tra le due superfici.

Chiamiamo Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 le cariche presenti sulla quattro superfici (vedi figura). Per determinarle imponiamo le seguenti condizioni:

- La somma delle cariche sulla piastra **I** deve valure Q.

$$Q = Q_1 + Q_2$$

.

- La somma delle cariche sulla piastra **II** deve essere nulla.

$$Q_3 + Q_4 = 0$$

.

- Siccome le due piastre sono di materiale conduttore applico il teorema di Gauss scegliendo some superficie quella indicata in figura (con linea tratteggiata). Data la geometria del problema il flusso attraverso la superficie laterale è nullo in quanto il campo elettrico è perpendicolare alla normale a questa superficie. Anche il flusso attraverso le due basi del cilindro (di area A) è nullo in quanto queste sono scelte all'interno dei conduttori e quindi in regioni in cui il campo elettrico è nullo. Quindi

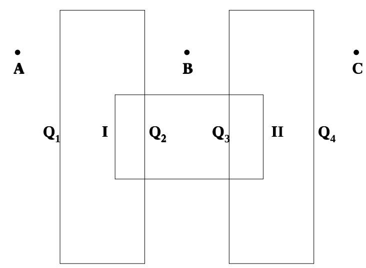
$$\Phi(E) = \frac{\sigma_2 A}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_3 A}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_2 + Q_3 = 0$$

- Sfruttiamo di nuovo il fatto che le due piastre sno di materiale conduttore imponendo che il campo all'interno di una di queste due (ad esempio **I** sia nullo). Calcolo il campo in **I** come sovrapposizione dei campi generati da quattro superfici piane di dimensioni infinite.

$$E_{\mathbf{I}} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0$$

Risolvendo questo sistema si ottiene:

$$Q_1 = \frac{Q}{2}, Q_2 = \frac{Q}{2}, Q_3 = -\frac{Q}{2}, Q_4 = \frac{Q}{2}$$



I campi nei punti A, B, C si calcolano applicando il principio di sovrapposizione e sommando i quattro campi generati dalle quattro superfici piane. La direzione di questi campi è quella perpendicolare alle superfici piane, il verso è dato dal segno (positivo verso destra nella figura).

$$E_A = -\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = -\frac{Q}{2S\epsilon_0}$$

$$E_B = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2S\epsilon_0}$$

$$E_C = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2S\epsilon_0}$$

Dopo aver chiuso l'interruttore T le due piastre diventano un unico corpo conduttore, la carica totale Q si ridistribuisce sulle quattro superfici in modo che le due piastre siano equipotenziali. Per calcolare la nuova distribuzione delle cariche posso applicare le seguenti condizioni:

- La carica totale sulle due piastre **I** e **II** è Q.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q$$

- Applico il teorema di Gauss come fatto in precedenza (sulla stessa superficie chiusa):

$$\Phi(E) = \frac{\sigma_2 A}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_3 A}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_2 + Q_3 = 0$$

- Di nuovo sfrutto il fatto che all'interno dei conduttori il campo elettrico è nullo.

$$E_{\mathbf{I}} = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_1 - Q_2 - Q_3 - Q_4 = 0$$

- Essendo ora le due piastre equipotenziali il campo elettrico nel punto B (posto tra le due piastre) deve essere nullo, quindi:

$$E_B = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\epsilon_0} = 0 \Rightarrow Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_4 = 0$$

Risolvendo questo sistema si ottiene:

$$Q_1 = \frac{Q}{2}, Q_2 = 0, Q_3 = 0, Q_4 = \frac{Q}{2}$$

Esercizio 2

Poichè la spira sta fuoriuscendo dalla regione in cui è presente il campo magnetico **B** il flusso attraverso questa diminuisce nel tempo, quindi siamo in presenza di una forza elettromotrice indotta che provoca il passaggio della corrente elettrica.

Chiamando x la coordinata del lato inferiore della spira al tempo t il flusso attraverso la spira vale:

$$\Phi(B) = Bl(l - x)$$

Quindi la forza elettromotrice indotta vale:

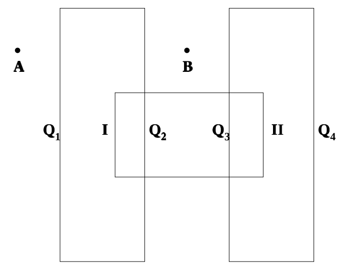
$$fem = -\frac{\partial \Phi(B)}{\partial t} = Blv$$

e di conseguenza nella spira circola una corrente:

$$i = \frac{BlV}{R}$$

Poichè la spira sta uscendo dal campo magnetico il flusso attraverso essa diminuisce, quindi la corrente indotta deve generare un campo magnetico che si oppone a questa diminuzione. Il campo magnetico da essa generato deve quindi sommarsi a quello esistente per cui la corrente circola nella spira in senso orario.

Per calcolare la forza magnetica agente sulla spira calcoliamo separatamente il contributo sui quattro lati. I due lati AD e BC (vedi figura) sono percorsi da corrente in verso opposto e quindi le forze F_{AD} e F_{BC} sono uguali



in modulo e direzione ma agiscono in verso opposto, elidendosi a vicenda. Il segmento AB si trova in una regione in cui il campo magnetico è nullo quindi tale risulta pure la forza magnetica agente su di esso. Sul lato DC agisce la seguente forza:

$$\mathbf{F_{DC}} = i\mathbf{DC} \times \mathbf{B} = -iBl\mathbf{u_x} = -\frac{B^2 l^2 v}{R}\mathbf{u_x}$$

Sulla spira agisce anche, in verso contrario a quella magnetica, la forza gravitazionale. La risultante delle due forze è nulla quando la velocità v con cui cade la spira vale:

$$\frac{B^2 l^2 v}{R} = mg \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2 l^2}$$