Esercizio 1

a) Il campo elettrico vale $\mathbf{E} = E_0\ \mathbf{u}_r$, per a<r<b e $\mathbf{E} = 0$ per r<a ed r>b.

La densità volumica di carica la ricaviamo sfruttando il teorema di Gauss in forma differenziale, $\nabla\cdot\ \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$. Da cui ricaviamo che:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_0) = \frac{2\epsilon_0 E_0}{r} \qquad a < r < b$$

$$\rho = 0 \qquad\qquad r < a, r > b$$

b) Per calcolare la densità superficiale di carica passiamo dall'espressione di $\mathbf{D} = \epsilon_0\ \mathbf{E}$, però poichè D = σ abbiamo:

$$\sigma(a) = \epsilon_0 E_0 \qquad e \qquad \sigma(b) = -\epsilon_0 E_0$$

c) Possiamo determinare la carica libera totale presente nel sistema in due modi diversi.

Nel primo dei due utilizziamo il teorema di Gauss, calcolando il flusso attraverso una superficie sferica di raggio r>b dove abbiamo E = 0.

$$\Phi(D) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q = 0$$

Nel secondo modo calcoliamo direttamente la carica totale sommando le cariche superficiali e quelle di volume:

$$Q = \sigma(a)4\pi a^2 + \sigma(b)4\pi b^2 + \int_a^b \rho dV = \epsilon_0 E_0 4\pi(a^2 - b^2) + \int_a^b \frac{2\epsilon_0 E_0}{r} 4\pi r^2 dr = 0$$

d) L'energia elettrostatica del sistema vale:

$$U = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV = \int_a^b \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi}{3}\epsilon_0 E_0^2 (b^3 - a^3)$$

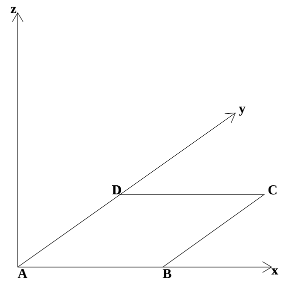
e) Essendo il campo elettrico radiale e costante (per a<r<b) la forza che agisce sulle due cariche del dipolo è uguale in modulo e diretta in verso opposto. Per cui la risultante R è nulla.

Esercizio 2

a) Calcoliamo la forza che agisce su ogni segmento e poi sommiamo (nel seguito chiameremo B il valore 0.1 che compare nell'espressione del campo magnetico).

Lato AB) Lungo il lato AB il valore del campo magnetico varia per cui consideriamo elementi infinitesimi di lunghezza dx e calcoliamo la forza d$\mathbf{F}$ su questo elemento:

$$d\mathbf{F} = id\mathbf{l} \times \mathbf{B} = -idxB(x)\mathbf{u_y}$$



integrando su tutto il segmento abbiamo:

$$\mathbf{F}_{AB} = \int_0^a d\mathbf{F} = -iB\frac{a^2}{2}\mathbf{u_y}$$

Lato BC) Sul lato BC il campo magnetico è costante per cui:

$$\mathbf{F}_{BC} = iBa^2\mathbf{u_x}$$

Lato CD) Valgono gli stessi ragionamenti fatti per il lato AB, ma ora, essendo i orientata verso le x negative, la forza è rivolta in verso contrario.

$$\mathbf{F}_{CD} = iB\frac{a^2}{2}\mathbf{u_y}$$

Lato DA) Su questo lato il campo magnetico è costante ed, essendo $x = 0$, è nullo. Quindi anche $\mathbf{F}_{DA} = 0$.

Sommando i quattro contributi osserviamo che $\mathbf{F}_{AB}$ = - $\mathbf{F}_{CD}$ per cui la risultante delle quattro forze è pari a $\mathbf{F}_{BC}$:

$$\mathbf{F} = 10^{-2}N\mathbf{u_x}$$

b) Le due forze: $\mathbf{F}_{AB}$ ed $\mathbf{F}_{CD}$ tendono a deformare la spira ma non a porla in rotazione intorno al punto O. Per cui l'unica forza che tende a far ruotare la spira è quella applicata sul lato BC il cui momento rispetto al punto O vale:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = -rF_{BC}sen\theta\mathbf{u_z}$$

ma $rsen\theta$ = a/2, essendo r la distanza tra il punto O ed il punto medio del segmento BC, quindi:

$$\tau = -\frac{a}{2}F_{BC}\mathbf{u_z} = -5 \times 10^{-4}Nm\mathbf{u_z}$$