Esercizio 1 Dalla simmetria delle cariche possiamo dedurre che i campi **E** e **D** saranno radiali. Sfruttiamo il teorema di Gauss per arrivare a dedurre le cariche presenti sulle tre superfici.
$b < r < c$

Siamo all'interno di un materiale conduttore per cui il campo elettrico è nullo quindi:

$$\Phi(D) = D(r)4\pi r^2 = Q_{tot}$$

ma essendo D(r) = 0 (in questo intervallo di r) abbiamo $Q_{tot} = 0$.

$$Q_{tot} = Q_a + Q_b = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q_b = -Q_a = -Q$$

$r > c$

Usiamo di nuovo il teorema di Gauss:

$$\Phi D(r) = D(r)4\pi r^2 = Q_{tot} = Q_a + Q_b + Q_c = Q_c$$

per ricavare il valore di Q_c usiamo la condizione che la superficie esterna della sfera è mantenuta a potenziale V_0.

$$V_c = \int_c^{\infty} E(r)dr = \frac{Q_c}{4\pi\epsilon_0 c} = V_0$$

$$Q_c = 4\pi\epsilon_0 c V_0$$

b) Per calcolare le densità superficiali delle cariche di polarizzazione usiamo la relazione: $\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u_n}$. Per cui dobbiamo calcolare il valore di **P** che è legato ad **E** dalla seguente relazione: $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$.

Quindi ricaviamo i valori della densità superficiale delle cariche di polarizzazione per $r = a$ ed $r = b$.
$\sigma_P(a)$

$$\sigma_P(a) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u_n} = -P(a) = -\chi(a)\epsilon_0 E(a)$$

ma siccome $\chi(a) = \epsilon_r(a) - 1 = 0$ abbiamo che:

$$\sigma_P(a) = 0$$

$\sigma_P(b)$

$$\sigma_P(b) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u_n} = P(b) = -\chi(b)\epsilon_0 E(b)$$

con

$$\chi(b) = \epsilon_r(b) - 1 = \frac{k}{\epsilon_0}(b - a)$$

ed $E(b)$ ricavabile applicando il teorema di Gauss

$$E(b) = \frac{Q}{4\pi\epsilon(b)b^2} = \frac{Q}{4\pi[\epsilon_0 + k(b-a)]b^2}$$

Per cui in definitiva abbiamo che:

$$\sigma_P(b) = \frac{k(b-a)\epsilon_0 Q}{4\pi[\epsilon_0 + k(b-a)]b^2}$$

ρ_P *(r)*

La densità volumica di carica di polarizzazione si ricava da:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

che essendo $\mathbf{P}$ un vettore radiale diventa:

$$\rho_P = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 P(r))}{\partial r}$$

Dobbiamo quindi trovare un espressione per $\mathbf{P}(r) = \epsilon_0\chi(r)\mathbf{E}(r)$. Dove:

$$\chi(r) = \epsilon_r(r) - 1 = \frac{k}{\epsilon_0}(r-a) \qquad \mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon(r)r^2}$$

con $\epsilon(r) = \epsilon_0 + k(r-a)$.

Quindi mettendo tutto insieme abbiamo che:

$$\rho_P = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{kQ(r-a)}{4\pi[\epsilon_0 + k(r-a)]}\right]$$

$$\rho_P = -\frac{k\epsilon_0 Q}{4\pi r^2[\epsilon_0 + k(r-a)]^2}$$

c) Quando si mettono in contatto le due superfici queste diventano equipotenziali il campo elettrico per r < c diventa nullo e quindi tutta la carica si distribuisce sulla superficie esterna. Siccome questa resta al potenziale V_0 la carica Q_c resta invariata.

Come detto in precedenza nel dielettrico il campo elettrico è nullo, per cui anche il vettore polarizzazione è nullo. Infatti $\mathbf{P} = \chi\epsilon_0\ \mathbf{E}$, quindi essendo nullo $\mathbf{E}$ lo è anche $\mathbf{P}$. Per cui otteniamo che:

$$\sigma_P(a) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u_n} = 0$$

$$\sigma_P(b) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u_n} = 0$$

$$\rho_p(r) = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$$

Esercizio 2 Quando la spira cade verso il basso ed inizia ad uscire dalla regione interessata dal campo magnetico abbiamo una variazione nel tempo del flusso del campo magnetico attraverso essa. Quindi si genera una forza elettromotrice indotta che causa il passaggio di corrente nella spira.

$$\Phi(B) = Blx \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial t} = Blv$$

$$i = -\frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{Blv}{R}$$

Siccome la corrente indotta genera un campo magnetico che si oppone alla variazione del flusso attraverso la spira, e siccome mentre la spira cade abbiamo una diminuzione del flusso. Il campo magnetico generato dalla spira deve sommarsi a quello esistente opponendosi così alla diminuzione del flusso. Quindi la corrente deve circolare in verso orario nella spira.

b) La forza magnetica che agisce sulla spira è $\mathbf{F} = \mathrm{i}\,\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. I contributi sui due lati "verticali della spira sono uguali ed opposti, mentre resta la forza che agisce sul lato "più alto" della spira

$$F = ilB = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

rivolta verso l'alto.

c) La forza risultante agente sulla spira è nulla quando si equivalgono la forza magnetica e quella gravitazionale.

$$\frac{B^2 l^2 v}{R} = mg \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{Rmg}{B^2 l^2}$$