Esercizio 1

a) La carica totale contenuta nelle due piastre è:

$$Q = \rho_0 S a + (-2\rho_0) S \frac{a}{2} = 0$$

Quindi al di fuori della regione in cui sono contenute le cariche elettriche il campo elettrico è nullo.

$$x < a \qquad ed \qquad x > \frac{a}{2} \qquad \Rightarrow \qquad D(x) = E(x) = 0$$

Per calcolare il campo elettrico nella regione in cui è contenuta la carica elettrica utilizziamo il teorema di Gauss. Calcoliamo il flusso del campo D (in modo da poter considerare solo le cariche libere) attraverso la superficie laterale di un cilindro di base S' (contenuta nel piano ortogonale all'asse x) ed altezza dal punto x = -a ad x.

$$\Phi(D) = D(x)S' = \int_{-a}^{x} \rho(x) S' dx$$

-a < x < 0

$$D(x)S' = (a + x)\rho_0 S'$$

quindi

$$D(x) = \rho_0(a + x)$$

ed anche

$$E(x) = \frac{D(x)}{\epsilon_1} = \frac{\rho_0(a + x)}{\epsilon_1}$$

0 < x < a/2

$$D(x)S' = -2\rho_0 x S' + \rho_0 a S'$$

quindi

$$D(x) = \rho_0(a - 2x)$$

ed anche

$$E(x) = \frac{D(x)}{\epsilon_2} = \frac{\rho_0(a - 2x)}{\epsilon_2}$$

b) Per calcolare la differenza di potenziale tra x = - a ed x = 2 a utilizziamo la definizione stessa di potenziale

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{-a}^{a/2} E(x) dx = \int_{-a}^{0} \frac{\rho_0(a + x)}{\epsilon_1} dx + \int_{0}^{a/2} \frac{\rho_0(a - 2x)}{\epsilon_2} dx =$$

$$= \rho_0 \frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right)$$

c) La densità di volume delle cariche di polarizzazione è data da

$$\rho_{pol} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \chi \epsilon_0 \mathbf{E} = -\frac{\chi}{\epsilon_r} \nabla \cdot \mathbf{D} = -\frac{\chi}{\epsilon_r} \frac{\partial D(x)}{\partial x}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che **D** dipende solo da x e dove con ϵ_r intendiamo la costante dielettrica relativa del mezzo.

- a < x < 0

$$\rho_{pol} = -\frac{\chi_1}{\epsilon_{r1}} \rho_0 = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \rho_0$$

0 < x < a/2

$$\rho_{pol} = -\frac{\chi_2}{\epsilon_{r2}} (-2\rho_0) = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2} 2\rho_0$$

d) La densità superficiale di carica di polarizzazione sulla superficie di separazione dei due mezzi (x = 0) è data da:

$$\sigma_{pol} = -\mathbf{P_1} \cdot \mathbf{u_n} - \mathbf{P_2} \cdot \mathbf{u_n} = P_1 - P_2 = \chi_1 \epsilon_0 E_1(0) - \chi_2 \epsilon_0 E_2(0) =$$

$$= \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \rho_0 a - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2} \rho_0 a$$

Esercizio 2

a Una corrente I che scorre nel filo di lunghezza indefinita genera un campo magnetico il cui valore, ad una distanza x dal filo, è dato dalla legge di Biot-Savart.

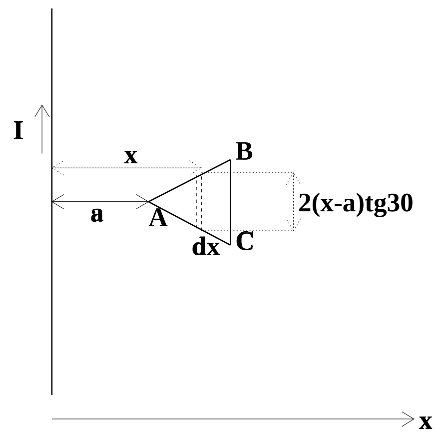
$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Il coefficente di mutua induzione M è dato da:

$$M = \frac{\Phi(B)}{I}$$

dove $\Phi(B)$ è il flusso del campo magnetico, generato dalla corrente I, attraverso la superficie delimitata dalla spira a forma di triangolo. Siccome il valore del campo magnetico dipende dalla distanza x dal filo suddividiamo la spira in rettangoli infinitesimi di lati dx e 2(x - a) tg 30°; e calcoliamo il flusso infinitesimo dΦ attraverso esse:

$$d\phi(B) = B(x)dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} 2(x - l) tg 30° dx$$



Integrando il flusso infinitesimo tra x = a ed x = a + a $\sqrt{3}/2$ otteniamo il flusso attraverso il triangolo equilatero.

$$\Phi(B) = \frac{\mu_0 I}{\sqrt{3}\pi} \int_a^{a+a\sqrt{3}/2} \frac{x-l}{x} dx$$

cioè

$$\Phi(B) = \frac{\mu_0 I a}{\sqrt{3}\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + ln \frac{2}{2+\sqrt{3}} \right)$$

Da cui ricaviamo che:

$$M = 5.34 \times 10^{-9} H$$

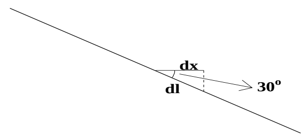
b) Ricaviamo la forza che agisce sulla spira calcolando separatamente i contributi dei tre lati del triangolo. La forza che agisce è sempre quella che si ha su un conduttore percorso da corrente in presenza di un campo magnetico esterno.

$$\mathbf{F} = i\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Lato BC

consideriamo questo lato perchè su di esso il campo magnetico generato dalla corrente I è costante, quindi

$$\mathbf{F}_{BC} = ia\mathbf{u_y} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi a(1+\sqrt{3}/2)} \mathbf{u_z} = \frac{\mu_0 i I}{2\pi(1+\sqrt{3}/2)} (-\mathbf{u_x})$$



Lati AB e AC

su questi due lati il campo magnetico generato da I varia di intensità per cui consideriamo elementi infinitesimi dx sui quali possiamo considerare costante il valore del campo magnetico. Sommando i contributi d**F** di due elementi dx, posti alla stessa distanza dal filo, uno posto sul lato AB e l'altro su quello AC otteniamo che la risultante è diretta lungo l'asse x (cioè le componenti lungo l'asse y soono uguali e contrarie). Calcoliamo quindi le sole componenti x di $d\mathbf{F}$

$$dF_x = idl\frac{\mu_0 I}{2\pi x}cos30^\circ$$

dove dl è l'elemento infinitesimo di lato del triangolo. Mettiamo in relazione dl con l'elemento corrispondente dx lungo l'asse x. $dl = \frac{dx}{cos30^\circ}$ (vedi figura)

$$dF_x = \frac{\mu_0 iI}{2\pi x}dx$$

per cui integrando su tutta la lunghezza dei segmenti abbiamo (per ciascuno di due lati):

$$F_x = \frac{\mu_0 iI}{2\pi}\int_a^{a+a\sqrt{3}/2}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 iI}{2\pi}ln(1+\sqrt{3}/2)$$

Sommando i contributi di tutti e tre i segmenti otteniamo:

$$F = F_{BC} + 2F_{AB} = \frac{\mu_0 iI}{2\pi}\left[ln(1+\sqrt{3}/2) - \frac{1}{1+\sqrt{3}/2}\right]$$