Esercizio 1

a) Il campo elettrico, data la distribuzione delle cariche, è diretto radialmente. Per trovarne il modulo al variare della distanza dal centro delle sfere utilizziamo il teorema di Gauss.

r<R) Essendo la sfera di materiale conduttore la carica si distribuirà sulla superficie esterna (r = R). Per cui quando calcoliamo il flusso del campo elettrico attraverso una sfera di raggio r<R abbiamo che al suo interno la carica elettrica è nulla.

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{E} = 0$$

R<r<3R) Utilizziamo lo stesso procedimento visto in precedenza.

$$\Phi(\mathbf{E}) = E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{2Q}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2}\mathbf{u_r}$$

r>3R) Sempre utilizzando il teorema di Gauss otteniamo che:

$$\Phi(\mathbf{E}) = E4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

b) La differenza di potenziale tra r=R ed r= 3R è data da:

$$\Delta V = \int_R^{3R} \mathbf{E}{\cdot}d\mathbf{r} = \int_R^{3R} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{3\pi\epsilon_0 R}$$

c) Poichè la sfera interna è di materiale conduttore quando le due sfere vengono collegate la nuova condizione di equilibrio viene raggiunta quando tutta la carica si distribuisce sulla superficie più esterna. Per cui alla fine abbiamo una carica Q distribuita sulla sfera di raggio 3R e carica nulla sulla sfera piena di raggio R.

Esercizio 2

La variazione nel tempo di **B** produce una variazione del suo flusso attraverso la spira, questa provoca una forza elettromotrice indotta e quindi il passaggio di corrente nella spira.

$$i(t) = \frac{f_{em}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\alpha B_0 A}{R}e^{-\alpha t}$$

Questa corrente genera un campo magnetico che si oppone alla variazione del flusso di **B**, quindi $i(t)$ scorre in verso orario.

Al passaggio della corrente nella spira siamo in presenza di una forza **F** = i **l** × **B** che tende ad espandere la spira.

La carica totale che passa nella spira, mentre il campo magnetico diminuisce la sua intensità fino a raggiungere il valore di zero, può essere calcolata come segue:

$$\Delta q = \int_0^\infty i(t)dt = \frac{\alpha AB_0}{R}\int_0^\infty e^{-\alpha t} = \frac{AB_0}{R} = 3\times 10^{-7}C$$

Per calcolare l'energia dissipata nella spira calcoliamo la potenza dissipata e poi integriamo sul tempo.

$$P = i(t)^2R = \frac{\alpha^2 A^2 B_0^2}{R}\exp^{-2\alpha t}$$

$$E = \int_0^\infty \frac{\alpha^2 A^2 B_0^2}{R}\exp^{-2\alpha t}dt = \frac{\alpha A^2 B_0^2}{2R} = 2.25\times 10^{-10}J$$