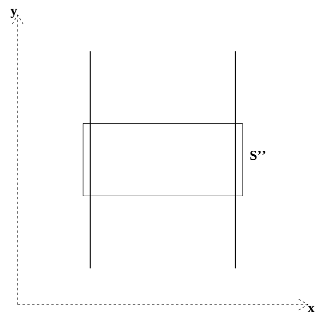

Esercizio 1

a) Per calcolare la densità di carica libera presente sulla seconda armatura del condensatore sfruttiamo il teorema di Gauss, infatti essendo il campo elettrico nullo all'esterno del condensatore utilizziamo come superficie per il calcolo del flusso quella laterale di un cilindro con le basi parallele alle armature del condensatore e poste al di fuori dello stesso (vedi figura). Il flusso di **D** attraverso questa superficie è nullo quindi possiamo scrivere che:

$$\Phi(D) = 0 = \sigma_1 S + \rho d S + \sigma_2 S$$

Da cui otteniamo:

$$\sigma_2 = -(\sigma_1 + \rho d) = -2\rho d$$

b) Per calcolare la differenza di potenziale tra le due armature dobbiamo prima ricavare l'espressione del campo elettrico tra le armature del condensatore. Sfruttiamo di nuovo il teorema di Gauss usando come superficie sempre quella laterale di un cilindro con basi parallele alle armature del condensatore, una esterna e l'altra interna ad una distanza x dall'armatura di sinistra.

$$\Phi(D(x)) = D(x)S = \sigma_1 S + \rho x S$$

$$D(x) = \rho(x + d)$$

Avendo determinato l'espressione di D(x) ricaviamo quella di E(x):

$$E(x) = \frac{D(x)}{\epsilon} = \frac{\rho}{\epsilon}(x + d)$$

Infine calcoliamo la differenza di potenziale tra le due armature del condensatore:

$$\Delta V = \int_0^d E(x)dx = \frac{\rho}{\epsilon}\int_0^d (x + d)dx = \frac{3}{2}\frac{\rho}{\epsilon}d^2$$

c) La densità di volume di carica di polarizazzione presente nel dielettrico è data da:

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot (\epsilon_0\chi)\mathbf{E} = -\nabla \cdot (\frac{\epsilon_0\chi}{\epsilon})\mathbf{D}$$

per il teorema di Gauss sappiamo che:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

, che sostituito nell'espressione precedente ci permette di ricavare che:

$$\rho_P = -\frac{\epsilon_0\chi}{\epsilon}\rho$$

Esercizio 2

a) Per ricavare il coefficente di mutua induzione calcoliamo il flusso del campo magnetico generato dalla corrente che circola nel filo attraverso la bobina rettangolare. Utilizziamo la legge di Biot Savart per trovare l'espressione del campo magnetico generato da una corrente I che scorre nel filo: $B(x) = \mu_0 I/2\pi x$; con x pari alla distanza dal filo. Siccome questo campo non è costante all'interno della bobina dobbiamo suddividere questa in superfici infinitesime al cui interno posso considerarlo costante; $d\Phi(B(x)) = B(x)adx$. Integrando questa espressione su tutta la spira otteniamo il flusso attraverso una sezione quadrata; moltiplicando per N (numero di spire) abbiamo il flusso attraverso la bobina.

$$\Phi = N\int_a^{2a} d\Phi(B(x)) = \frac{\mu_0 aNI}{2\pi}ln2$$

Da cui ricaviamo il coefficente di mutua induzione:

$$M = \frac{\Phi(B)}{I} = \frac{\mu_0 aN}{2\pi}ln2$$

b) Il campo magnetico generato dalla bobina è dato da:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Per il calcolo del flusso di questo campo magnetico attraverso la bobina stessa usiamo un procedimento simile a quello seguito nel punto *a)*:

$$\Phi(B) = \frac{\mu_0 iaN^2}{2\pi}\int_a^{2a}\frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 iaN^2}{2\pi}ln2$$

Da cui ricaviamo che:

$$L = \frac{\Phi(B)}{i} = \frac{\mu_0 aN^2}{2\pi}ln2 = MN$$