Esercizio 1 Per calcolare il valore della costante α utilizziamo il fatto che la carica totale nella sfera e' Q:

$$Q = \int_0^R \rho(r)dV = 4\pi\alpha \int_0^R r^3 dr = \pi\alpha R^4$$

da cui

$$\alpha = \frac{Q}{\pi R^4}$$

Essendo la carica distribuita radialmente anche il campo elettrico, da questa generato, ha la stessa simmetria. Per cui lo calcoliamo utilizzando il teorema di Gauss per una superficie di raggio r.

r < R

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r \rho(r)dV$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^4} r^2$$

r > R

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

La forza che agisce sulla particella (di carica positiva) che si avvicna alla sfera e' sempre repulsiva, per cui la sua azione è quella di rallentare la particella. Questa azione continua anche all'interno della sfera (il campo non è nullo per r < R) quindi la particella attraverserà la sfera solo se la sua energia cinetica iniziale supera l'energia elettrostatica massima che si raggiunge al centro della sfera.

$$U(0) = Q\int_0^R E(r)dr + Q\int_R^\infty E(r)dr = \frac{Q^2}{3\pi\epsilon_0 R}$$

da cui abbiamo:

$$v \geq \sqrt{\frac{2Q^2}{3\pi\epsilon_0 m R}}$$

L'energia elettrostatica può essere calcolata (nelle due configurazioni) utilizzando la densità di energia $u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2$ e integrando su tutto lo spazio.

Nelle condizioni iniziali abbiamo:

$$U_i = \frac{\epsilon_0}{2}\left[\int_0^R \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^4}\right)^2 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr\right] = \frac{Q^2}{7\pi\epsilon_0 R}$$

Nelle condizioni invece abbiamo:

$$U_f = \frac{\epsilon_)}{2}\int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Dunque:

$$\Delta U = U_i - U_f = \frac{Q^2}{56\pi\epsilon_0 R}$$

Esercizio 2 Il campo magnetico risultante è dato dalla somma dei campi generati dai due fili percorsi da corrente. Il campo generato da ciascuno di questi è dato dalla legge di Biot - Savart. Il campo è diretto in direzione tangente alla circonferenza centrata nel punto in cui passa il filo. Per cui quando sommiamo, nei punti dell'asse X, i campi generati dai due fili abbiamo i contributi lungo l'asse Y che si elidono, il campo risultante è diretto lungo l'asse X (vedi figura).

$$B_x = 2\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\theta = \frac{\mu_0 I a}{\pi(a^2 + x^2)}$$

Il campo B_x è massimo per $x = 0$.

La forza che agisce sul terzo filo percorso da corrente è esprimibile attraverso la seguente legge: $\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ (dove $\mathbf{l}$ ha lunghezza unitaria).

$$\mathbf{F} = I\mathbf{u_z} \times \frac{\mu_0 I a}{\pi(a^2 + x^2)}\mathbf{u_x} = \frac{\mu_o I^2 a}{\pi(a^2 + x^2)}\mathbf{u_y}$$

La forza è diretta in verso negativo (-u_y) se circola in verso entrante nel filo posto in P, in verso positivo (u_y) se circola in verso uscente.