

# Capitolo 1

## Interferenza e diffrazione

### Contenuto

---

<b>1.1 Sorgente singola</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>1.2 Interferenza tra onde emesse da due fenditure strette</b> . . . . .	<b>3</b>
1.2.1 Trattazione semplificata . . . . .	3
1.2.2 (NPE) Trattazione accurata . . . . .	5
1.2.3 (NPE) Sorgenti incoerenti . . . . .	7
<b>1.3 Interferenza da reticolo</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1.4 Diffrazione da una fenditura estesa</b> . . . . .	<b>12</b>
1.4.1 Calcolo diretto . . . . .	12
1.4.2 Limite del reticolo . . . . .	14
1.4.3 (NPE) Trattazione accurata . . . . .	14
<b>1.5 Interferenza e diffrazione da due (o più) fenditure estese</b> . . . . .	<b>16</b>

---

*I paragrafi indicati con “(NPE)” non sono programma*

*d’esame.*

L’interferenza e la diffrazione sono proprietà tipiche dei fenomeni ondulatori. L’interferenza è il fenomeno per cui due o più onde che si incontrano nello spazio si combinano per sovrapposizione; l’onda risultante è la somma delle onde componenti: questa proprietà è conseguenza della linearità dell’equazione delle onde.

La diffrazione è il fenomeno per cui le onde “girano” attorno al bordo di un ostacolo quando esso intercetta una parte del fronte d’onda. Nel caso della luce, ad esempio, a causa della diffrazione le zone d’ombra dietro l’ostacolo non sono nettamente distinte dalle zone illuminate. Il fenomeno della diffrazione è tanto più evidente quanto più le dimensioni dell’ostacolo sono piccole rispetto alla lunghezza d’onda.

Entrambi i fenomeni non sono spiegabili nell’ambito dell’ottica geometrica.

Tra la fine del ’700 e l’inizio dell’800 fu proprio grazie all’osservazione sperimentale di fenomeni di interferenza e diffrazione che si dimostrò la natura ondulatoria della luce.

### 1.1 Sorgente singola

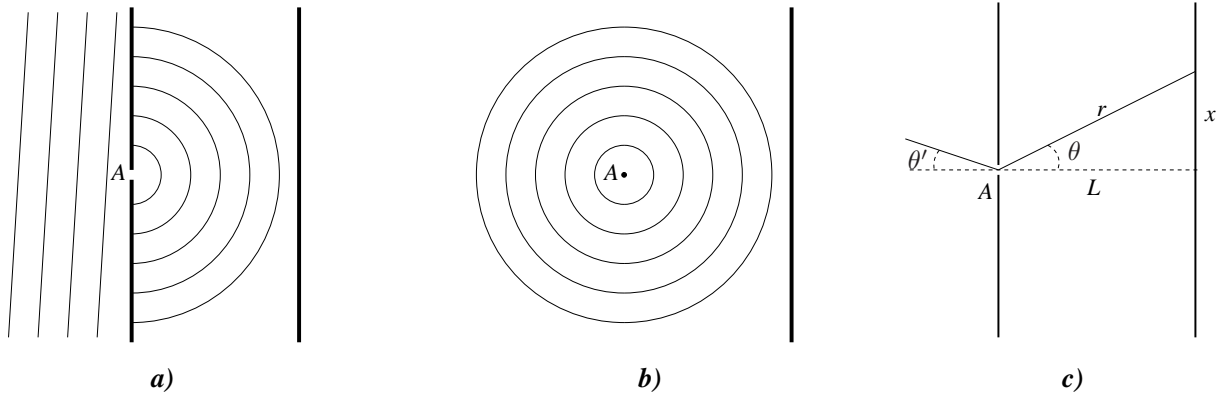
In figura 1.1a è rappresentata un’onda piana di lunghezza d’onda  $\lambda$  che incide su un piano assorbente su cui è praticata un’apertura molto stretta  $A$ <sup>1</sup>. Per il principio di Huygens il punto  $A$  è sorgente di un’onda secondaria che si propaga nella regione dietro il piano e viene osservata sullo schermo a distanza  $L$ .

Il fronte dell’onda propagata dopo il piano è sferico, come se nel punto  $A$  si trovasse una sorgente puntiforme (fig. 1.1b):

$$s = C \cos(kr - \omega t) = \frac{\xi_0}{r} \cos(kr - \omega t) \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>Per “fenditura molto stretta” qui, e nel seguito, si intende un’apertura di larghezza molto minore di  $\lambda$ .



**Figura 1.1** Onda trasmessa da una fenditura puntiforme (a) e onda emessa da una sorgente puntiforme (b); le linee sottili rappresentano i fronti d'onda. c: definizione delle variabili

Nella formula precedente si è tenuto conto del fatto che l'ampiezza di un'onda sferica non è costante ma inversamente proporzionale alla distanza dal punto di emissione:  $C = \xi_0/r$ . In realtà l'ampiezza dell'onda secondaria dipende anche dall'angolo  $\theta$  di osservazione e dall'angolo di incidenza dell'onda primaria sul piano  $\theta'$ :  $C$  andrebbe perciò moltiplicata per un "fattore di obliquità"  $f(\theta, \theta')$  le cui approssimazioni più comuni sono:

$$\begin{aligned}
 f(\theta, \theta') &\simeq \frac{\cos \theta' + \cos \theta}{2} && \text{(approssimazione di Kirchhoff)} \\
 f(\theta, \theta') &\simeq \cos \theta && (1.2)
 \end{aligned}$$

Nel seguito ci limiteremo a considerare angoli  $\theta$  e  $\theta'$  sufficientemente piccoli da poter trascurare la variazione del fattore di obliquità e assumeremo  $f(\theta, \theta') = 1$ .

Nella maggior parte delle situazioni pratiche quello che si osserva è l'intensità dell'onda:

$$I \equiv \alpha s^2 = \alpha C^2 \cos^2(kr - \omega t) = \frac{\alpha \xi_0^2}{r^2} \cos^2(kr - \omega t) \tag{1.3}$$

La media dell'intensità in un intervallo di tempo  $NT$ , con  $N$  numero intero molto grande, è ( $T = 2\pi/\omega$ ):

$$\begin{aligned}
 \bar{I} &= \frac{1}{NT} \int_0^{NT} I(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \\
 &= \frac{1}{T} \alpha C^2 \int_0^T \cos^2(kr - \omega t) dt = \frac{\alpha C^2}{2} = \frac{\alpha \xi_0^2}{2r^2} = \frac{\alpha \xi_0^2}{2(x^2 + L^2)}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

il cui andamento in funzione di  $x$  (coordinata che identifica il punto di osservazione sullo schermo) ha una forma a campana.

## 1.2 Interferenza tra onde emesse da due fenditure strette

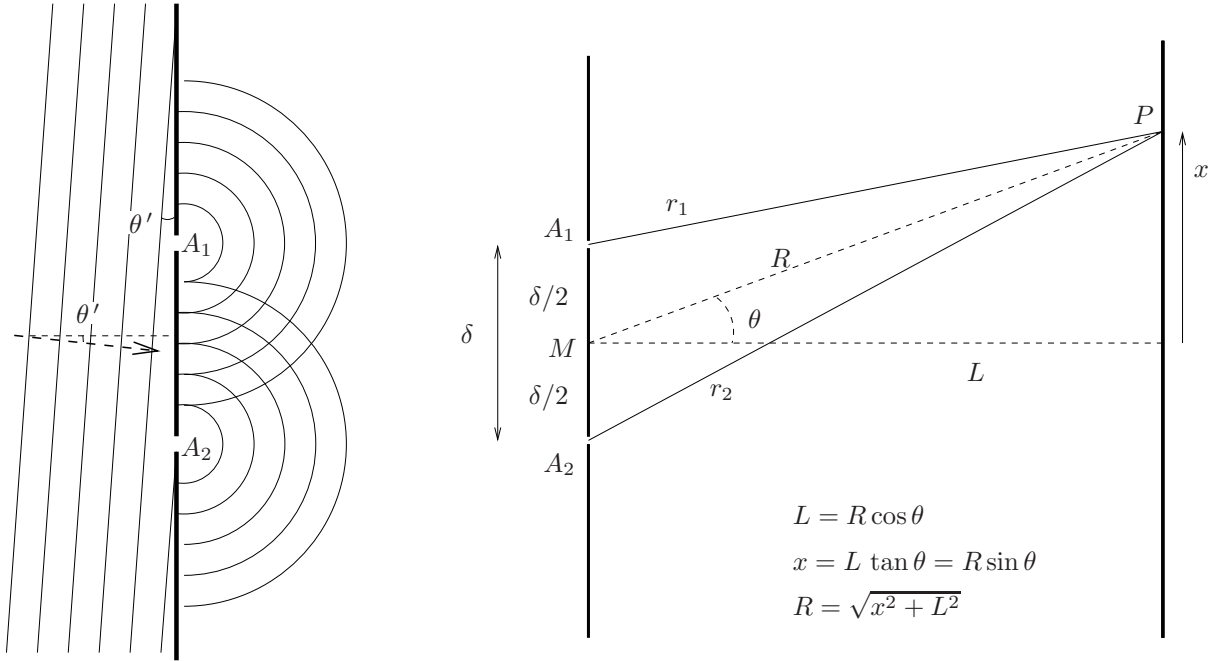


Figura 1.2 Doppia fenditura

Un'onda piana monocromatica incide su un piano assorbente su cui sono praticati due aperture di ampiezza trascurabile,  $A_1$  e  $A_2$ , distanti  $\delta$ , che diventano sorgenti di onde sferiche (vedere fig. 1.2):

$$\begin{aligned} s_1 &= C_1 \cos(kr_1 - \omega t + \phi_1) \\ s_2 &= C_2 \cos(kr_2 - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \quad (1.5)$$

La differenza di fase  $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$  delle onde trasmesse dipende dall'angolo di incidenza  $\theta'$  dell'onda primaria,  $\Delta\phi = k\delta \sin \theta'$ , ed è costante nel tempo (onde coerenti).

Nelle considerazioni seguenti la differenza di fase  $\Delta\phi$  non ha grande rilevanza. Si porrà quindi per semplicità  $\phi_1 = \phi_2 = 0$ . Tutte le formule ricavate si possono facilmente generalizzare al caso  $\phi \neq 0$  con  $\Delta\phi \neq 0$ .

Se una sola delle due fenditure fosse aperta sullo schermo si osserverebbe la distribuzione di intensità (mediata nel tempo) data dall'eq. (1.4), cioè per la fenditura  $A_1$  si avrebbe  $\bar{I}_1$ , mentre per  $A_2$  si avrebbe  $\bar{I}_2$ , date da

$$\bar{I}_1 = \frac{\alpha \xi_0^2}{2[L^2 + (x - \delta/2)^2]} \quad \bar{I}_2 = \frac{\alpha \xi_0^2}{2[L^2 + (x + \delta/2)^2]} \quad (1.6)$$

Se sono aperte entrambe, la distribuzione di intensità non è la somma delle intensità  $I_1$  e  $I_2$ , perché le onde emesse da  $A_1$  ed  $A_2$  interferiscono. Per ottenere la distribuzione di intensità risultante bisogna sommare le onde di eq. (1.5):

$$I = \alpha s^2 = \alpha (s_1 + s_2)^2 = I_1 + I_2 + 2\alpha s_1 s_2. \quad (1.7)$$

L'intensità totale quindi differisce dalla somma delle intensità singole per la presenza del termine di interferenza  $2\alpha s_1 s_2$ .

### 1.2.1 Trattazione semplificata

Le ampiezze delle onde sferiche sono  $C_1 = \xi_0/r_1$  e  $C_2 = \xi_0/r_2$ . Nel limite  $L \gg d$  si può assumere  $r_1 = r_2$ , quindi  $C_1 = C_2 = C$ . (Una trattazione più accurata verrà fatta nel seguito).

L'onda risultante è data da:

$$s = s_1 + s_2 = 2C \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2}\right) \cos\left(k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t\right) \quad (1.8)$$

Applicando il teorema di Carnot ai triangoli  $A_1MP$  e  $A_2MP$ :

$$r_1^2 = R^2 + \frac{\delta^2}{4} - 2R\frac{\delta}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = R^2 + \frac{\delta^2}{4} - R\delta \sin \theta \quad (1.9)$$

$$r_2^2 = R^2 + \frac{\delta^2}{4} - 2R\frac{\delta}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = R^2 + \frac{\delta^2}{4} + R\delta \sin \theta \quad (1.10)$$

Nel limite  $\delta \ll L \leq R$  si ha :

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= \sqrt{R^2 + \frac{\delta^2}{4} - R\delta \sin \theta} + \sqrt{R^2 + \frac{\delta^2}{4} + R\delta \sin \theta} = \\ &= R \left\{ \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4R^2} - \frac{\delta}{R} \sin \theta} + \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4R^2} + \frac{\delta}{R} \sin \theta} \right\} = \\ &= R \left\{ 1 - \frac{\delta}{2R} \sin \theta + 1 + \frac{\delta}{2R} \sin \theta + O\left(\frac{\delta}{R}\right) \right\} \simeq 2R \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} r_2 - r_1 &= \sqrt{R^2 + \frac{\delta^2}{4} + R\delta \sin \theta} - \sqrt{R^2 + \frac{\delta^2}{4} - R\delta \sin \theta} = \\ &= R \left\{ 1 + \frac{\delta}{2R} \sin \theta - 1 + \frac{\delta}{2R} \sin \theta + O\left(\frac{\delta}{R}\right) \right\} \simeq \delta \sin \theta \end{aligned} \quad (1.12)$$

Sostituendo nell'eq. (1.8) si ha:

$$s = 2C \underbrace{\cos\left(\frac{k\delta \sin \theta}{2}\right)}_{\mathcal{A}} \cos(kR - \omega t) = \mathcal{A} \cos(kR - \omega t) \quad (1.13)$$

Intensità:

$$I \equiv \alpha s^2 = \alpha \mathcal{A}^2 \cos^2(kR - \omega t) \quad (1.14)$$

Media nel tempo ( $T = 2\pi/\omega$ ):

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \alpha \mathcal{A}^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(kR - \omega t) dt = \frac{1}{2} \alpha \mathcal{A}^2 = \\ &= 2\alpha C^2 \cos^2\left(\frac{k\delta \sin \theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

I nodi (interferenza distruttiva) si hanno per:

$$\frac{k\delta |\sin \theta|}{2} = k \frac{|r_1 - r_2|}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{max} \quad (1.16)$$

cioè

$$|r_1 - r_2| = \frac{2n + 1}{2} \frac{2\pi}{k} = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (1.17)$$

La condizione per avere un nodo nel punto di osservazione  $P$  quindi è che la differenza di cammino tra le due onde sia multiplo dispari di mezza lunghezze d'onda, in modo che le due onde arrivino in  $P$  in opposizione di fase.

Per determinare i massimi (interferenza costruttiva) bisogna calcolare la derivata della funzione  $\bar{I}$ , tenendo presente che l'ampiezza  $C$  dipende dalla distanza  $R$  e quindi dipende da  $\theta$  (o  $x$ ):  $C = \xi_0/R = \xi_0 \cos \theta/L = \xi_0/\sqrt{x^2 + L^2}$ .

I massimi vicini al centro della figura di interferenza (dove  $x$  è piccolo) sono situati approssimativamente in :

$$\frac{k\delta |\sin \theta|}{2} = k \frac{|r_1 - r_2|}{2} = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots, n'_{max} \quad (1.18)$$

cioè

$$|r_1 - r_2| = n \frac{2\pi}{k} = n\lambda \quad (1.19)$$

e la differenza di cammino tra le due onde è un multiplo di lunghezze d'onda (onde in fase nel punto  $P$ ).

Le altezze dei massimi diminuiscono all'aumentare di  $x$ , infatti:

$$\bar{I} = \frac{2\alpha\xi_0^2}{x^2 + L^2} \cos^2 \left( \frac{k\delta \sin \theta}{2} \right) \leq \frac{2\alpha\xi_0^2}{x^2 + L^2} \quad (1.20)$$

Dalle considerazioni fatte è evidente che l'esistenza di massimi e di nodi (e il loro numero) dipende crucialmente dal rapporto  $\delta/\lambda$ : se esso è molto piccolo vi è solo il picco centrale, senza massimi secondari né nodi. Il numero di oscillazioni di  $\bar{I}$  cresce al crescere di  $\delta/\lambda$ . Al tendere di  $\delta/\lambda$  ad infinito (cioè per una larghezza  $\delta$  macroscopica o per  $\lambda$  tendente a zero) le oscillazioni sono talmente fitte che diventa impossibile distinguerle: sullo schermo apparirà quindi una intensità media data da:

$$\langle \bar{I} \rangle = \frac{\alpha\xi_0^2}{x^2 + L^2} \quad (1.21)$$

cioè la somma di due sorgenti puntiformi (si confronti con l'eq. (1.4)).

Alcuni esempi della funzione  $\bar{I}$  per diversi valori del rapporto  $\delta/\lambda$  sono illustrati in figura 1.3.

### 1.2.2 (NPE) Trattazione accurata

Per le considerazioni seguenti è importante ripristinare la dipendenza (trascurata sino a qui) dell'ampiezza dell'onda sferica dalla distanza:

$$C_1 \equiv \frac{\xi_0}{r_1} \quad C_2 \equiv \frac{\xi_0}{r_2} \quad (1.22)$$

L'espressione esatta per l'onda risultante perciò è:

$$s = s_1 + s_2 = C_1 \cos(kr_1 - \omega t) + C_2 \cos(kr_2 - \omega t) \quad (1.23)$$

Definiamo :

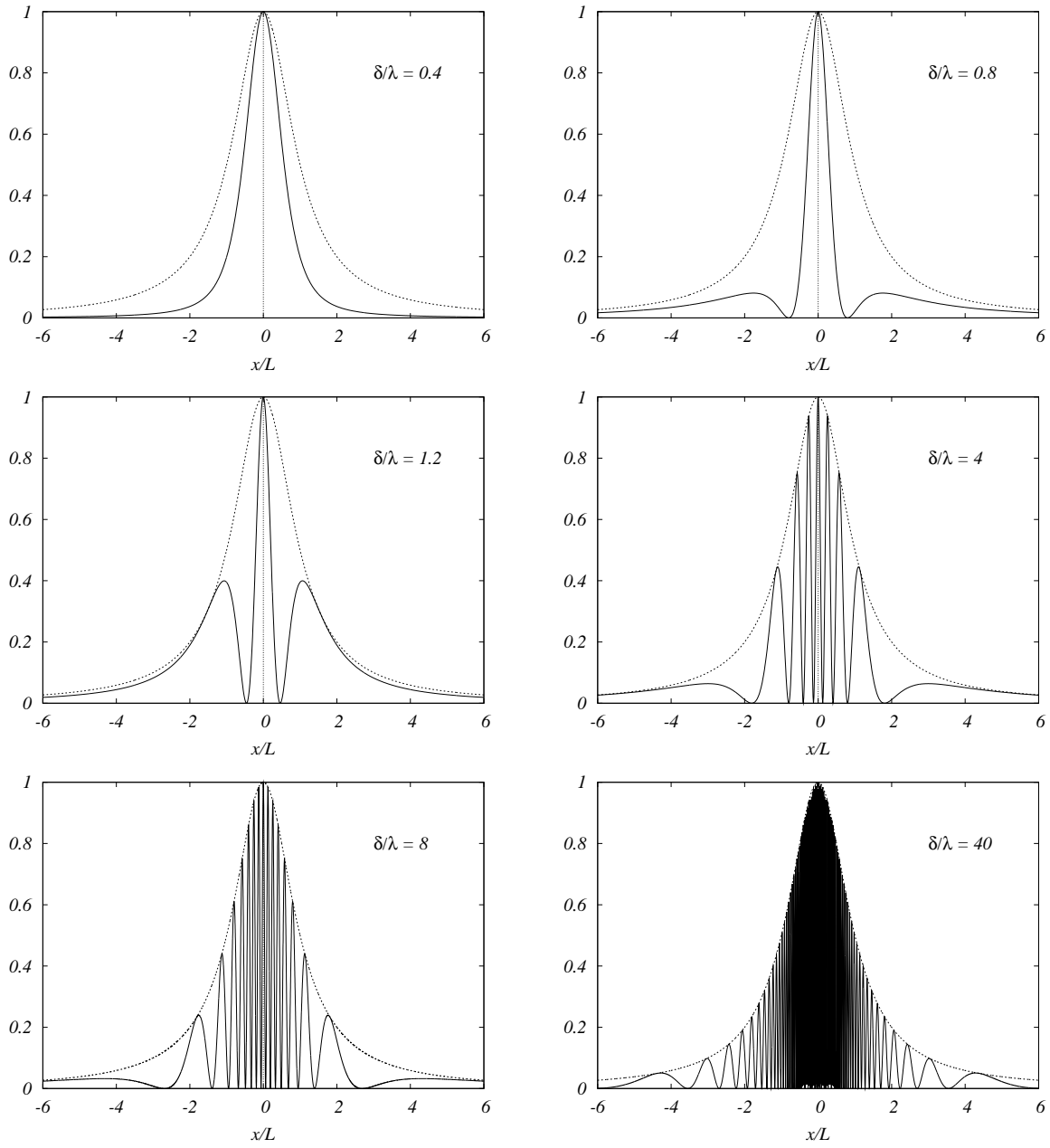
$$C = \frac{C_1 + C_2}{2} \quad e \quad \bar{C} = \frac{C_1 - C_2}{2}, \quad (1.24)$$

si ha:  $C_1 = C + \bar{C}$ ,  $C_2 = C - \bar{C}$ . Sostituendo in (1.23):

$$\begin{aligned} s &= C [\cos(kr_1 - \omega t) + \cos(kr_2 - \omega t)] + \bar{C} [\cos(kr_1 - \omega t) - \cos(kr_2 - \omega t)] = \\ &= 2C \cos \left( k \frac{r_1 - r_2}{2} \right) \cos \left( k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t \right) - 2\bar{C} \sin \left( k \frac{r_1 - r_2}{2} \right) \sin \left( k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t \right) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Nel limite  $\delta \ll L$  si ha:

$$\begin{aligned} C &= \frac{\xi_0}{2} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\xi_0}{2} \left( \frac{1}{R\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4R^2} - \frac{\delta}{R} \sin \theta}} + \frac{1}{R\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4R^2} + \frac{\delta}{R} \sin \theta}} \right) = \\ &= \frac{\xi_0}{2R} \left\{ 1 + \frac{\delta}{2R} \sin \theta + 1 - \frac{\delta}{2R} \sin \theta + O \left( \frac{\delta}{R} \right) \right\} \simeq \frac{\xi_0}{R} \end{aligned} \quad (1.26)$$



**Figura 1.3** Alcuni esempi della funzione  $\bar{I}L^2/(2\alpha\xi_0^2)$  di eq. (1.13), per diversi valori di  $\delta/\lambda$  (linea continua). La linea tratteggiata rappresenta la funzione  $1/((x/L)^2 + 1)$ .

e

$$\bar{C} = \frac{\xi_0}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\xi_0}{2R} \left\{ 1 + \frac{\delta}{2R} \sin \theta - 1 + \frac{\delta}{2R} \sin \theta + O\left(\frac{\delta}{R}\right) \right\} \simeq \frac{\xi_0}{2R} \frac{\delta}{R} \sin \theta \quad (1.27)$$

Si ha perciò  $C \gg \bar{C}$ .

Il termine proporzionale a  $C$  nell'equazione (1.25) è identico a (1.8); il termine successivo è molto più piccolo e può essere trascurato: questo giustifica la trattazione fatta nel paragrafo precedente.

Se si calcola l'intensità media a partire dall'espressione esatta (1.25), senza trascurare  $\bar{C}$ , si trova:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= 2\alpha C^2 \cos^2 \left( k \frac{r_1 - r_2}{2} \right) + 2\alpha \bar{C}^2 \sin^2 \left( k \frac{r_1 - r_2}{2} \right) = \\ &= \alpha [C^2 + \bar{C}^2 + (C^2 - \bar{C}^2) \cos(k(r_1 - r_2))] = \\ &= \frac{\alpha \xi_0^2}{2r_1^2 r_2^2} \{ (r_1^2 + r_2^2) + 2r_1 r_2 \cos(k(r_1 - r_2)) \} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Sostituendo  $r_1 = \sqrt{(x - \delta/2)^2 + L^2}$  ed  $r_2 = \sqrt{(x + \delta/2)^2 + L^2}$  si ottiene una funzione di  $x$  che ammette massimi e minimi: i minimi in generale non sono "nodi", cioè la funzione non è rigorosamente zero, anche se il suo valore è molto piccolo rispetto all'altezza dei massimi (il rapporto è dell'ordine di  $(\delta/R)^2$ ). In pratica, le approssimazioni usate in precedenza sono molto buone.

Se la differenza di fase  $\phi_1 - \phi_2$  delle onde non è zero (si veda l'eq. (1.5)), le precedenti espressioni per il numero e le posizioni di massimi e nodi non sono valide; la sostanza comunque non cambia: a causa dell'interferenza costruttiva/distruttiva si avranno massimi/nodi in numero finito nei punti in cui la differenza di cammino è multiplo pari/dispari di mezze lunghezze d'onda.

### 1.2.3 (NPE) Sorgenti incoerenti

In natura sono frequenti gli esempi di sorgenti incoerenti. Ad esempio in una comune lampadina ad incandescenza la luce è costituita da pacchetti d'onde emessi da elettroni in modo indipendente l'uno dall'altro, con fasi  $\phi$  casuali. L'onda prodotta può essere ben rappresentata dall'espressione  $s = C \cos(kr - \omega t + \phi)$ , in cui la fase  $\phi$  varia in modo casuale nel tempo (trascuriamo, per semplicità la variazione della frequenza). È ragionevole supporre che la fase  $\phi$  vari in un intervallo di tempo molto maggiore del periodo  $T = 2\pi/\omega$ , in modo da poterla considerare costante durante un periodo  $T$ .

Calcoliamo la media temporale dell'intensità dell'onda durante un intervallo di tempo  $\Delta T$  molto lungo ("macroscopico"):  $\Delta T = NT$ , con  $N$  molto grande. L'integrale su  $\Delta T$  può essere calcolato come somma di integrali su molti sottointervalli "microscopici"  $[(n-1)T; nT]$  durante i quali  $\phi$  assume i valori  $\phi_n$  e non varia apprezzabilmente:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \alpha C^2 \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \cos^2(kr - \omega t + \phi) dt \\ &\simeq \alpha C^2 \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} \cos^2(kr - \omega t + \phi_n) dt = \alpha C^2 \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} = \frac{\alpha C^2}{2}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

l'intensità risulta, in questo caso, uguale a quella di una sorgente coerente.

La situazione cambia se si considera l'interferenza tra due sorgenti incoerenti di questo tipo. Usando le notazioni della fig. 1.2, supponiamo che nei punti  $A_1$  ed  $A_2$  si trovino due sorgenti indipendenti ed incoerenti:

$$s_1 = C_1 \cos(kr - \omega t + \phi_1) \quad s_2 = C_2 \cos(kr - \omega t + \phi_2) \quad (1.30)$$

L'intensità dell'onda risultante, con l'approssimazione  $C_1 = C_2 = C$ , è:

$$\begin{aligned} I &= \alpha s_1^2 + \alpha s_2^2 + 2\alpha s_1 s_2 = I_1 + I_2 + 2\alpha C^2 \cos(kr_1 - \omega t + \phi_1) \cos(kr_2 - \omega t + \phi_2) = \\ &= I_1 + I_2 + \alpha C^2 \left( \cos[k(r_1 - r_2) + \phi_1 - \phi_2] + \cos[k(r_1 + r_2) - 2\omega t + \phi_1 + \phi_2] \right). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Quando si calcola la media nel tempo  $\Delta T$ , i primi due termini danno, analogamente a quanto visto nell'eq. (1.29), il contributo delle rispettive onde singole; il terzo termine, l'interferenza, deve essere considerato attentamente (usiamo inoltre le approssimazioni (1.11,1.12)):

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \frac{\alpha C^2}{NT} \int_0^{NT} dt \left( \cos[k(r_1 - r_2) + \phi_1 - \phi_2] + \cos[k(r_1 + r_2) - 2\omega t + \phi_1 + \phi_2] \right) \simeq \\ &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \frac{\alpha C^2}{NT} \sum_{n=1}^N \left( \int_{(n-1)T}^{nT} dt \cos[k\delta \sin \theta + (\Delta\phi)_n] + \int_{(n-1)T}^{nT} dt \cos[2kR - 2\omega t + \phi_1 + \phi_2] \right)\end{aligned}$$

dove  $(\Delta\phi)_n$  è il valore che la differenza di fase  $\phi_1 - \phi_2$  assume nell'intervallo  $[(n-1)T; nT]$ : in tale intervallo le fasi  $\phi_1$  e  $\phi_2$  si possono considerare costanti per cui l'integrazione sul tempo per il primo integrale dà  $T$ , mentre per il secondo è zero. Otteniamo quindi

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \alpha C^2 \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \cos[k\delta \sin \theta + (\Delta\phi)_n] = \\ &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \alpha C^2 \left[ \cos(k\delta \sin \theta) \overline{\cos(\Delta\phi)_n} - \sin(k\delta \sin \theta) \overline{\sin(\Delta\phi)_n} \right] = \bar{I}_1 + \bar{I}_2,\end{aligned}\tag{1.32}$$

i valori medi di  $\cos(\Delta\phi)_n$  e di  $\sin(\Delta\phi)_n$  sono nulli perché nell'intervallo di tempo macroscopico  $NT$  le fasi  $\phi_1$  e  $\phi_2$  variano molto in modo casuale.

Si conclude perciò che il termine di interferenza delle due onde incoerenti è, mediamente, zero: l'intensità totale è semplicemente la somma delle intensità delle onde singole.

Un'ultima osservazione : queste considerazioni valgono solo se nei punti  $A_1$  e  $A_2$  vi sono due sorgenti indipendenti. Con un'unica sorgente (situata a distanza molto grande, in modo da avere, con buona approssimazione, fronti d'onda piani) e un piano con una doppia fenditura, cioè esattamente il dispositivo della figura 1.2, le due onde originate in  $A_1$  ed  $A_2$  hanno una differenza di fase costante  $\Delta\phi = k\delta \sin \alpha$  (purché  $\delta$  sia piccolo), anche se l'onda originaria, a sinistra del piano, è incoerente, cioè anche se  $\phi_1$  e  $\phi_2$  variano molto nell'intervallo macroscopico  $NT$ . Si hanno perciò, in questo caso, i fenomeni di interferenza studiati nei paragrafi precedenti.



### 1.3 Interferenza da reticolo

Consideriamo  $N$  fenditure di larghezza infinitesima a distanza costante  $\delta$ , con  $d = (N - 1)\delta$ . Assumeremo  $d \ll L$ .

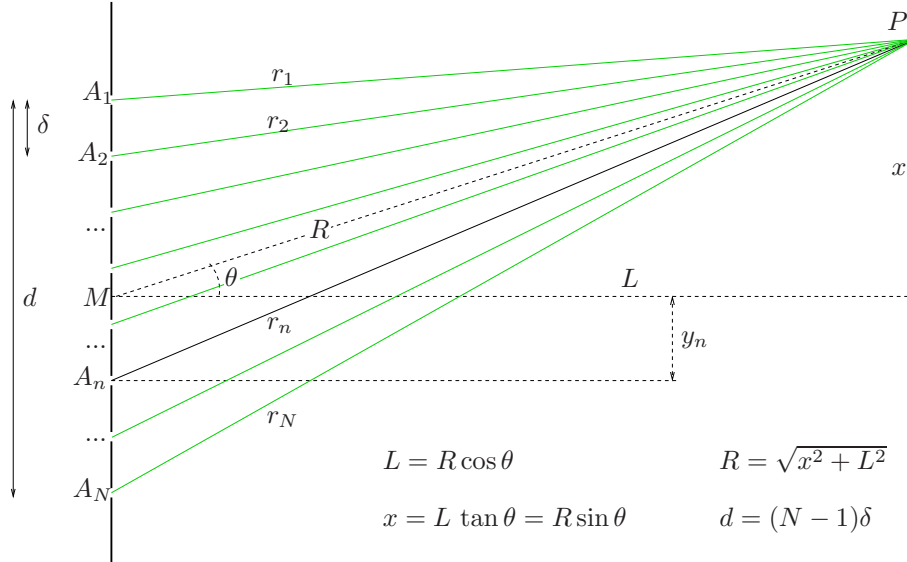


Figura 1.4 Reticolo

L'onda che si propaga dalla fenditura  $A_n$  è:

$$s_n = C_n \cos(kr_n - \omega t) \quad (1.33)$$

con  $C_n = \xi_0/r_n$ . L'approssimazione  $C_n \simeq \xi_0/R = C$  è giustificata dall'ipotesi  $d \ll L$ . L'onda risultante dalla sovrapposizione delle onde emesse da tutte le fenditure, osservata in  $P$ , è

$$s = \sum_{n=1}^N s_n = C \sum_{n=1}^N \cos(kr_n - \omega t) = C \Re \left\{ \sum_{n=1}^N e^{i(kr_n - \omega t)} \right\} \quad (1.34)$$

È facile vedere che

$$r_n = \sqrt{R^2 + y_n^2 - 2Ry_n \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{R^2 + y_n^2 + 2Ry_n \sin\theta} \simeq R \left(1 + \frac{y_n}{R} \sin\theta\right) = R + y_n \sin\theta \quad (1.35)$$

inoltre

$$y_n = -\frac{d}{2} + (n-1)\delta \quad (1.36)$$

(casi particolari:  $y_1 = -\frac{d}{2}$ , cioè il punto  $A_1$ ;  $y_N = -\frac{d}{2} + (N-1)\delta = -\frac{d}{2} + d = \frac{d}{2}$ , cioè il punto  $A_N$ ) quindi

$$r_n = R + \left(-\frac{d}{2} + (n-1)\delta\right) \sin\theta \quad (1.37)$$

Sostituendo in (1.34)

$$\begin{aligned} s &= C \Re \left\{ e^{i\left[k\left(R - \frac{d}{2} \sin\theta\right) - \omega t\right]} \sum_{n=1}^N e^{ik(n-1)\delta \sin\theta} \right\} = C \Re \left\{ e^{i\left[k\left(R - \frac{d}{2} \sin\theta\right) - \omega t\right]} \frac{e^{iNk\delta \sin\theta} - 1}{e^{ik\delta \sin\theta} - 1} \right\} = \\ &= C \Re \left\{ e^{i\left[k\left(R - \frac{d}{2} \sin\theta\right) - \omega t\right]} e^{ik\frac{(N-1)\delta}{2} \sin\theta} \right\} \frac{\sin \frac{Nk\delta \sin\theta}{2}}{\sin \frac{k\delta \sin\theta}{2}} = C \frac{\sin \frac{Nk\delta \sin\theta}{2}}{\sin \frac{k\delta \sin\theta}{2}} \cos(kR - \omega t). \end{aligned} \quad (1.38)$$

Con  $N = 2$  si ritrova esattamente l'eq. (1.13).

L'intensità mediata nel tempo è

$$\bar{I} = \frac{1}{2} \alpha C^2 \left( \frac{\sin \frac{Nk\delta \sin \theta}{2}}{\sin \frac{k\delta \sin \theta}{2}} \right)^2 \quad (1.39)$$

Vi sono nodi in corrispondenza dei valori di  $\theta$  tali che:

$$\frac{Nk\delta |\sin \theta|}{2} = \frac{\pi N\delta |\sin \theta|}{\lambda} = n\pi \quad \text{purché} \quad \sin \left( \frac{k\delta \sin \theta}{2} \right) \neq 0,$$

cioè

$$|\sin \theta| = \frac{n\lambda}{N\delta} \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ ma } n \neq N, 2N, 3N, \dots \quad (1.40)$$

o anche

$$x = R \sin \theta = \pm \frac{n}{N} \frac{R}{\delta} \lambda \quad (1.41)$$

La differenza di cammino tra le onde emesse da due fenditure adiacenti è:

$$r_j - r_{j-1} = \sqrt{R^2 + y_j^2 + 2Ry_j \sin \theta} - \sqrt{R^2 + y_{j-1}^2 + 2Ry_{j-1} \sin \theta} \simeq (y_j - y_{j-1}) \sin \theta = \delta \sin \theta \quad (1.42)$$

quindi la (1.40) si può riscrivere come

$$|r_j - r_{j-1}| \simeq \frac{n}{N} \lambda \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ ma } n \neq N, 2N, 3N, \dots \quad (1.43)$$

I punti con  $n = n'N = N, 2N, 3N, \dots$  sono massimi (principali) in cui l'intensità vale:

$$I^{(M)} = \frac{1}{2} \alpha C^2 N^2 = \frac{\alpha \xi_0^2}{2(x^2 + L^2)} N^2; \quad (1.44)$$

si noti che in corrispondenza dei massimi principali, la differenza di cammino  $|r_j - r_{j-1}|$  tra le onde provenienti da due fenditure adiacenti è  $n'\lambda$ , cioè un multiplo di lunghezze d'onda.

Sullo schermo la distanza di separazione tra due massimi principali è:

$$\Delta x = \frac{R}{\delta} \lambda \simeq \frac{L}{\delta} \lambda \quad (1.45)$$

I massimi principali sono intervallati da massimi secondari di altezza  $I^{(m)} \leq 4I^{(M)}/\pi^2$ .

La distanza minima tra due nodi (cioè la distanza tra due nodi adiacenti non separati da un massimo principale) è  $L\lambda/N\delta$  e la distanza tra due nodi separati da un massimo principale dà la larghezza del massimo stesso:

$$\Gamma = \frac{2R}{N\delta} \lambda \simeq \frac{2L}{N\delta} \lambda. \quad (1.46)$$

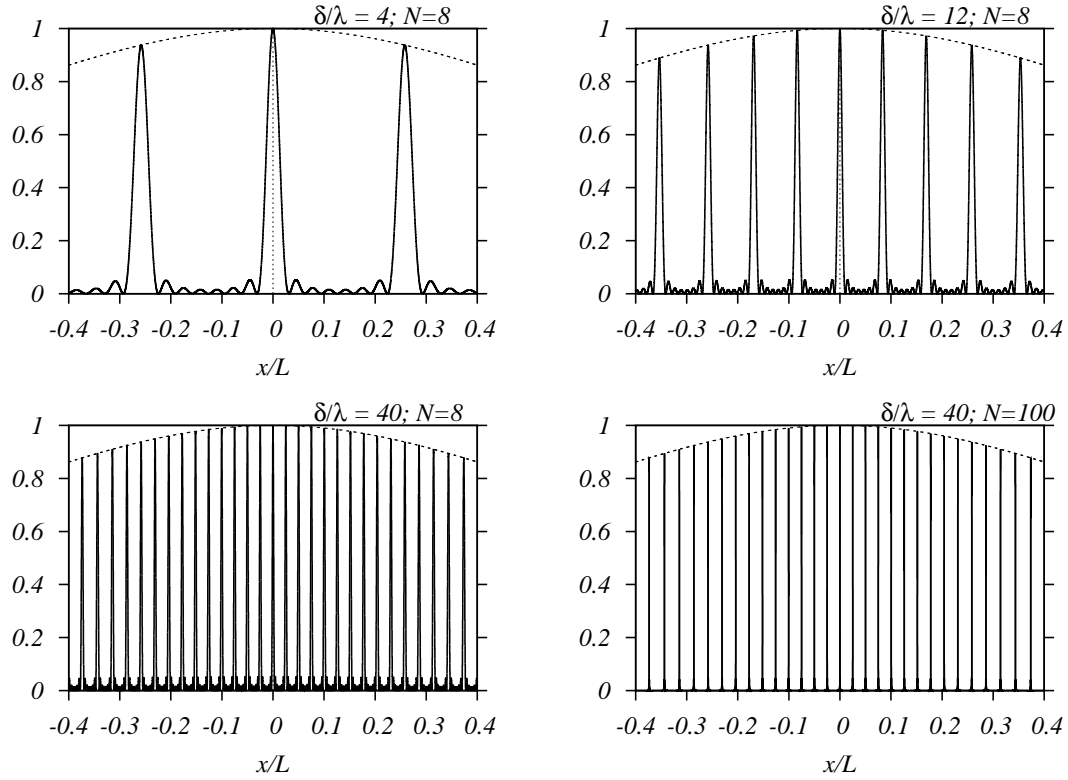
Si ha sempre :

$$\bar{I} \leq \frac{\alpha \xi_0^2 N^2}{2(x^2 + L^2)} \quad (1.47)$$

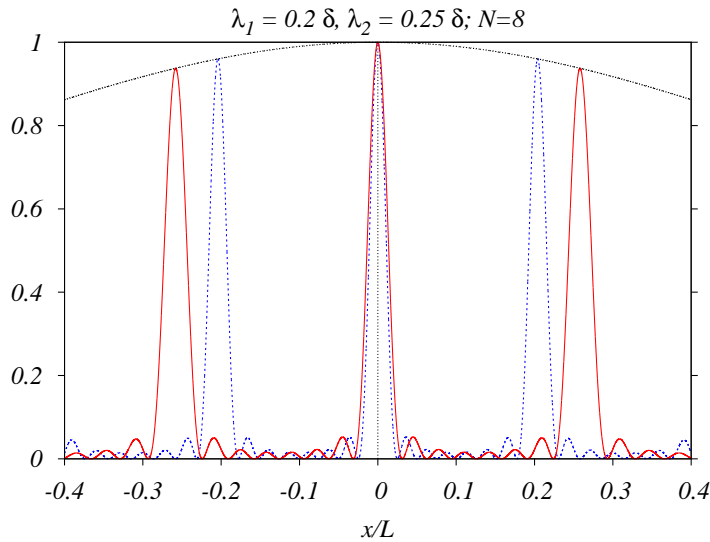
La figura 1.5 mostra alcuni esempi di figure di interferenza da reticolo.

Si noti che la distanza di separazione tra due massimi è proporzionale alla lunghezza d'onda: se l'onda incidente è una sovrapposizione di due onde (coerenti) con lunghezze d'onda  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , a seguito della diffrazione i massimi e minimi per le due onde sullo schermo sono separati (coincidono solo i massimi centrali), come si vede in fig. 1.6.

Nella pratica, l'eq. (1.45) è molto utile per determinare sperimentalmente la lunghezza d'onda della luce emessa da una sorgente coerente tramite un reticolo di passo  $\delta$  noto, infatti le grandezze  $\Delta x$ ,  $R \simeq L$  sono facilmente misurabili sperimentalmente. Viceversa, se è nota  $\lambda$ , l'eq. (1.45) può essere usata per determinare il passo del reticolo  $\delta$ . Un'applicazione molto importante è lo studio dei reticoli cristallini mediante raggi X.



**Figura 1.5** Esempi della funzione in eq. (1.39) (moltiplicata per le costanti  $2/\alpha C^2 N^2$ ) per diversi valori di  $\delta/\lambda$  e di  $N$ . Viene rappresentata solo la zona centrale della figura di interferenza (piccoli  $x$ ): le formule calcolate non sono valide per grandi  $x$  a causa delle approssimazioni introdotte (trascurato il fattore di obliquità). Le curve tratteggiate rappresentano la funzione  $1/((x/L)^2 + 1)$ .



**Figura 1.6** Confronto tra le figure di interferenza per due onde coerenti di diversa lunghezza d'onda. L'onda con  $\lambda$  maggiore viene allargata di più.

## 1.4 Diffrazione da una fenditura estesa

In questo paragrafo adotteremo le stesse approssimazioni usate nel calcolo della figura di interferenza da reticolo, cioè  $d \ll L$  e angoli  $\theta$  piccoli (che implica  $L \simeq R$ ). Le variabili sono definite in Fig. 1.7.

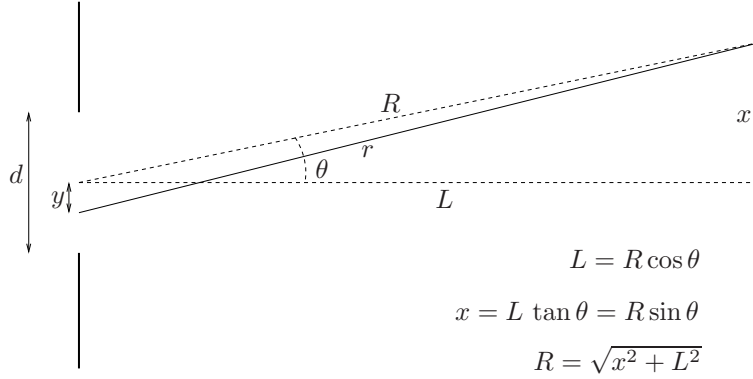


Figura 1.7 Fenditura estesa.

### 1.4.1 Calcolo diretto

Ogni punto della fenditura è sorgente di un'onda secondaria. Consideriamo il contributo del punto che dista  $y$  dal centro della fenditura ( $-d/2 \leq y \leq d/2$ ):

$$ds = C \cos(kr - \omega t) dy. \quad (1.48)$$

Si ha

$$r = \sqrt{y^2 + R^2 + 2Ry \sin \theta} \simeq R + y \sin \theta. \quad (1.49)$$

L'onda risultante è

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{-d/2}^{d/2} C \cos(kr - \omega t) dy \\
 &\simeq C \int_{-d/2}^{d/2} dy \cos(kR - \omega t + ky \sin \theta) = \\
 &= C \int_{-d/2}^{d/2} dy \left[ \cos(kR - \omega t) \cos(ky \sin \theta) - \sin(kR - \omega t) \sin(ky \sin \theta) \right] = \\
 &= C \cos(kR - \omega t) \frac{2 \sin \frac{kd \sin \theta}{2}}{k \sin \theta} = Cd \frac{\sin \frac{kd \sin \theta}{2}}{\frac{kd \sin \theta}{2}} \cos(kR - \omega t)
 \end{aligned} \quad (1.51)$$

L'intensità mediata nel tempo è:

$$\bar{I} = \frac{\alpha C^2 d^2}{2} \left( \frac{\sin \frac{kd \sin \theta}{2}}{\frac{kd \sin \theta}{2}} \right)^2 = \frac{\alpha C^2 d^2}{2} \left( \frac{\sin \left( \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \right)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta} \right)^2 \quad (1.52)$$

È evidente che la figura di diffrazione dipende dal rapporto  $d/\lambda$ . In fig. 1.8 sono illustrati alcuni esempi. Esiste un massimo principale a  $x = 0$ , che vale  $I^{(M)} \equiv \alpha C^2 d^2 / 2$ .

I nodi sono situati nei punti  $x$  che soddisfano:

$$\frac{kd|\sin\theta|}{2} = n\pi \quad n = 1, 2, \dots, n_{max} \quad (1.53)$$

La distanza tra due nodi è:

$$x_n - x_{n-1} \simeq \frac{\lambda}{d}L \quad n = 2, 3, \dots, n_{max} \quad (1.54)$$

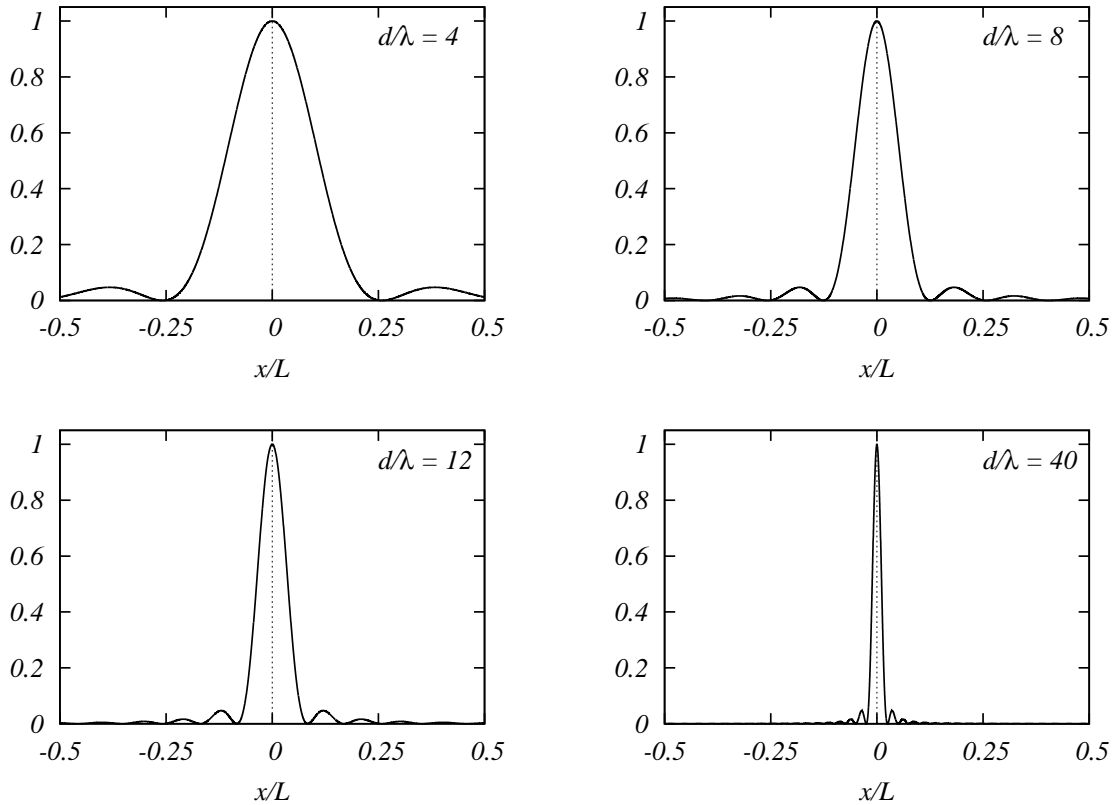
La larghezza del picco principale è  $2\lambda L/d$ .

Per le posizioni e le altezze dei massimi secondari si possono ottenere delle espressioni approssimate:

$$\frac{kd|\sin\theta|}{2} \simeq (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (1.55)$$

$$I_n^{(m)} \simeq \frac{4I^{(M)}}{\pi^2(2n+1)^2} \quad (1.56)$$

Se la larghezza della fenditura è molto più grande della lunghezza d'onda, i nodi e i massimi secondari non si distinguono, in pratica si vede solo il picco principale. Nel limite  $\lambda/d \rightarrow 0$ , la (1.52) tende ad una funzione delta di Dirac (vale sempre l'ipotesi  $d \ll L$ ). Alcuni esempi dell'espressione data in eq. (1.52), per diversi valori di  $d/\lambda$  sono illustrati in fig. 1.8.



**Figura 1.8** Esempi della funzione in eq. (1.52) (moltiplicata per le costanti  $2/\alpha C^2 d^2$ ) per diversi valori di  $d/\lambda$  in funzione della variabile  $x/L$  connessa con  $\theta$  dalla relazione  $\sin\theta = (x/L)/\sqrt{1+x^2/L^2}$ . Viene rappresentata solo la zona centrale della figura di interferenza (piccoli  $x$ ): le formule calcolate non sono valide per grandi  $x$  a causa delle approssimazioni introdotte.

### 1.4.2 Limite del reticolo

Si può ottenere la figura di diffrazione da una fenditura partendo dalla formula (1.38) con il limite  $N \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  con  $N\delta \rightarrow d$ . Si noti che anche l'ampiezza di ogni onda va presa infinitesima (in modo che l'energia totale resti finita), si porrà perciò  $Cd/N$  al posto di  $C$ . Dall'eq. (1.38) si ha pertanto:

$$s_N = \frac{Cd}{N} \frac{\sin \frac{Nk\delta \sin \theta}{2}}{\sin \frac{k\delta \sin \theta}{2}} \cos(kR - \omega t) = Cd \frac{\sin \frac{Nk\delta \sin \theta}{2}}{N \frac{k\delta \sin \theta}{2}} \frac{k\delta \sin \theta}{\sin \frac{k\delta \sin \theta}{2}} \cos(kR - \omega t) \quad (1.57)$$

Quindi nel limite indicato si ottiene:

$$s = Cd \frac{\sin \frac{kd \sin \theta}{2}}{\frac{kd \sin \theta}{2}} \cos(kR - \omega t), \quad (1.58)$$

esattamente come nel calcolo diretto, eq. (1.51).

### 1.4.3 (NPE) Trattazione accurata

In questa sezione riprenderemo il calcolo della figura di diffrazione da una fenditura estesa tenendo conto della dipendenza dell'ampiezza dell'onda secondaria dalla distanza dal punto di emissione e senza usare l'approssimazione (1.49). Manterremo l'approssimazione per piccoli angoli  $\theta$ , in modo da poter trascurare la variazione del fattore di obliquità.

L'onda infinitesima emessa da un punto della fenditura è:

$$ds = \frac{\xi_0}{r} \cos(kr - \omega t) dy \quad (1.59)$$

L'onda totale è

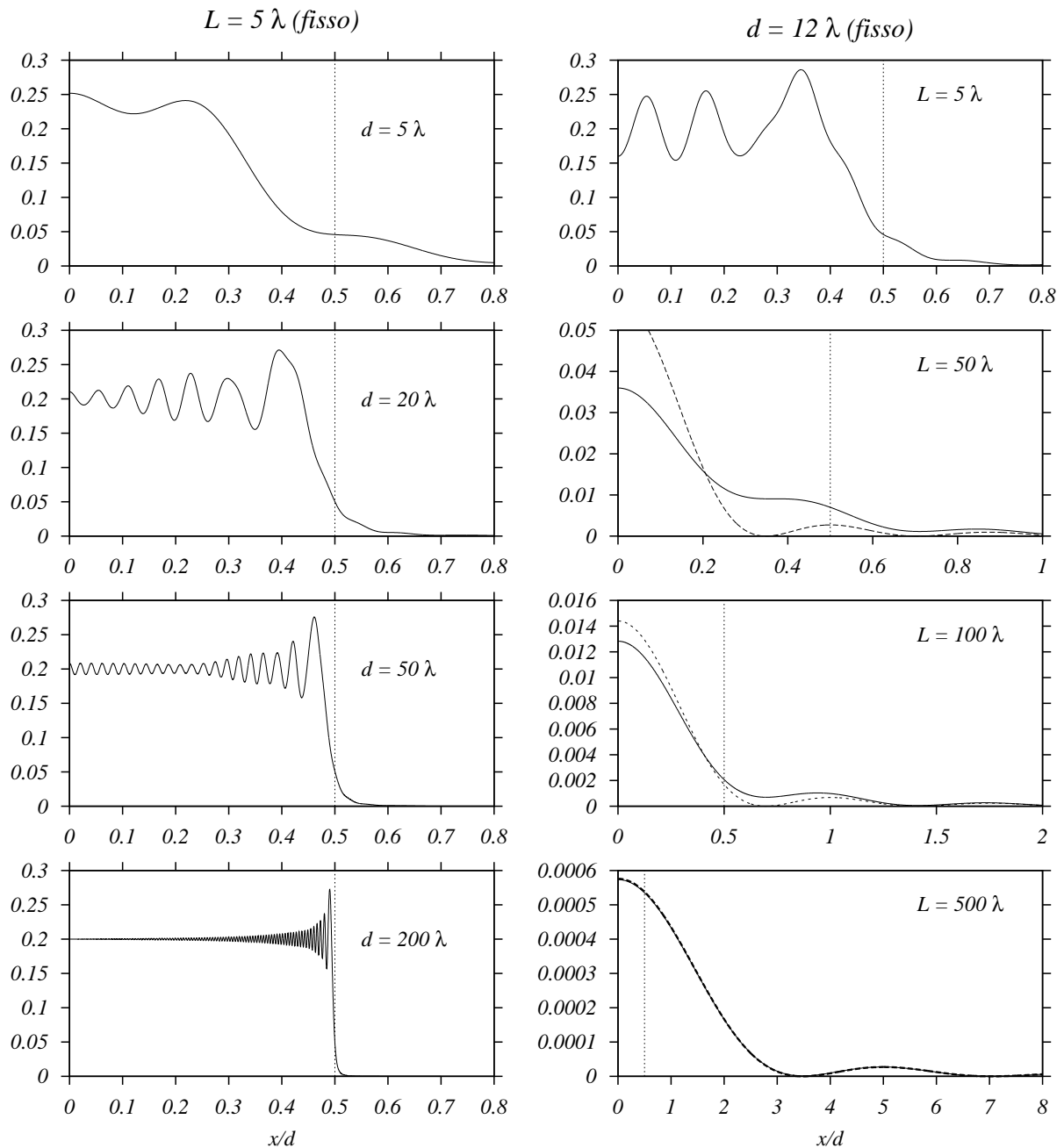
$$s = \xi_0 \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} dy = \xi_0 \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\cos(k\sqrt{R^2 + y^2 - 2Ry \sin \theta} - \omega t)}{\sqrt{R^2 + y^2 - 2Ry \sin \theta}} dy \quad (1.60)$$

L'intensità mediata nel tempo si calcola secondo la solita procedura:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\alpha}{T} \int_0^T s^2 dt = \frac{\alpha \xi_0^2}{T} \int_0^T dt \left\{ \int_{-d/2}^{d/2} \frac{\cos(kr - \omega t)}{r} dy \right\}^2 = \\ &= \frac{\alpha \xi_0^2}{2} \left\{ \left[ \int_{-d/2}^{d/2} dy \frac{\cos(kr)}{r} \right]^2 + \left[ \int_{-d/2}^{d/2} dy \frac{\sin(kr)}{r} \right]^2 \right\} = \frac{\alpha \xi_0^2}{2} \left| \int_{-d/2}^{d/2} dy \frac{e^{ikr}}{r} \right|^2 \end{aligned} \quad (1.61)$$

I risultati ottenuti tramite integrazione numerica per alcuni valori particolari di  $d$  e  $L$  sono mostrati in fig. 1.9. Si nota che al crescere di  $d$  e  $L$  (per un dato  $\lambda$ ) i massimi e minimi di interferenza diventano sempre più fitti, fino a giungere al limite di una funzione a scalino, corrispondente all'ottica geometrica.

Nel limite  $d \rightarrow 0$  invece si ritrova la distribuzione per una fenditura singola stretta.



**Figura 1.9** Esempi della funzione in eq. (1.61) (moltiplicata per le costanti  $2/\alpha\xi_0^2$ ) per diversi valori di  $d$  (larghezza della fenditura) ed  $L$  (distanza tra la fenditura e lo schermo). L'origine è posto al centro della fenditura, i bordi della fenditura sono situati in  $\pm 0.5$  (linea verticale punteggiata). Nei tre riquadri inferiori della colonna di destra la linea tratteggiata rappresenta la funzione approssimata di eq. (1.52): si nota che l'approssimazione è valida per  $L$  molto più grande di  $\lambda$ , come previsto. Si noti che le costanti di moltiplicazione, sia per la scala verticale che per quella orizzontale, sono diverse da quelle usate per la figura 1.8.

## 1.5 Interferenza e diffrazione da due (o più) fenditure estese

La trattazione del paragrafo 1.4.1 può essere applicata al caso di due fenditure estese, l'unica modifica consiste nella regione di integrazione dell'equazione (1.50), che ora è costituita dall'unione di due intervalli:  $[-d/2, d/2] \cup [D-d/2, D+d/2]$  essendo  $D$  la distanza tra le due fenditure, definita come la distanza tra i loro centri.

L'onda risultante è quindi data da:

$$\begin{aligned}
 s &= \int_{-d/2}^{d/2} C \cos(kr - \omega t) dy + \int_{D-d/2}^{D+d/2} C \cos(kr - \omega t) dy \\
 &\simeq C \int_{-d/2}^{d/2} dy \cos(kR - \omega t + ky \sin \theta) + C \int_{D-d/2}^{D+d/2} dy \cos(kR - \omega t + ky \sin \theta) = \\
 &= C \sum_{n=0}^1 \int_{nD-d/2}^{nD+d/2} dy \cos(kR - \omega t + ky \sin \theta) \tag{1.62}
 \end{aligned}$$

La sommatoria è stata introdotta per avere una notazione più compatta. In ogni termine si può effettuare un cambiamento della variabile di integrazione:

$$y = u + nD, \tag{1.63}$$

e l'onda risultante si può scrivere come:

$$\begin{aligned}
 s &= C \sum_{n=0}^1 \int_{-d/2}^{d/2} du \cos(kR - \omega t + knD \sin \theta + ku \sin \theta) = \\
 &= C \Re \left\{ \sum_{n=0}^1 e^{i(kR - \omega t + knD \sin \theta)} \int_{-d/2}^{d/2} du e^{iku \sin \theta} \right\} = \\
 &= C \Re \left\{ e^{i(kR - \omega t)} \frac{\sin \frac{kd \sin \theta}{2}}{\frac{k \sin \theta}{2}} \sum_{n=0}^1 (e^{ikD \sin \theta})^n \right\} = \tag{1.64}
 \end{aligned}$$

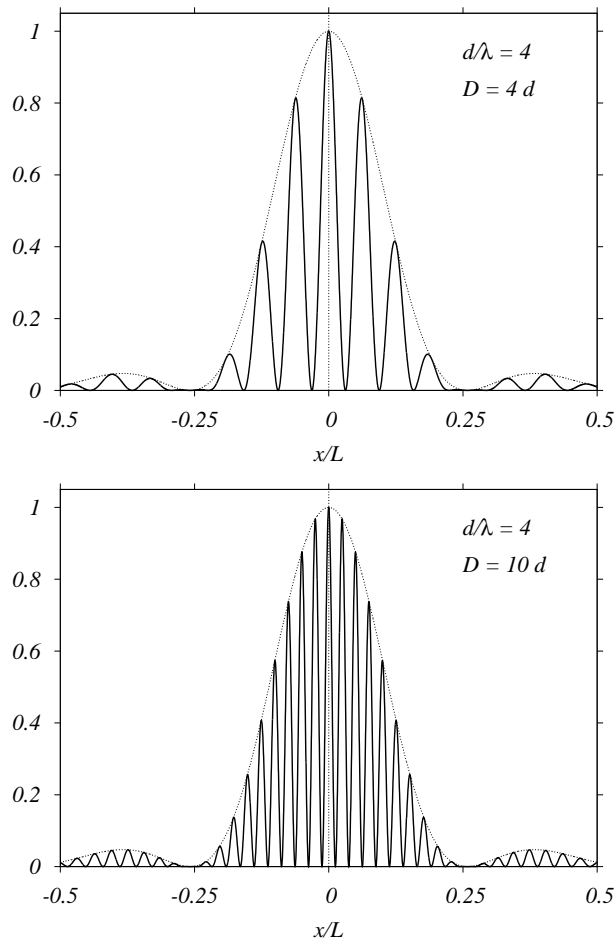
$$\begin{aligned}
 &= C \frac{\sin \frac{kd \sin \theta}{2}}{\frac{k \sin \theta}{2}} 2 \cos \frac{kD \sin \theta}{2} \Re \left\{ e^{i(kR - \omega t + kD \sin \theta/2)} \right\} = \\
 &= Cd \frac{\sin \frac{kd \sin \theta}{2}}{\frac{k \sin \theta}{2}} 2 \cos \frac{kD \sin \theta}{2} \cos \left( kR - \omega t + \frac{kD \sin \theta}{2} \right) \tag{1.65}
 \end{aligned}$$

Quando si calcola l'intensità mediata nel tempo, l'ultimo coseno dà un fattore 1/2, e si ha:

$$\bar{I}_2 = \frac{\alpha C^2 d^2}{2} \left( \frac{\sin \frac{kd \sin \theta}{2}}{\frac{k \sin \theta}{2}} \right)^2 4 \left( \cos \frac{kD \sin \theta}{2} \right)^2 = 4 \left( \cos \frac{kD \sin \theta}{2} \right)^2 \bar{I}_1, \tag{1.66}$$

dove  $\bar{I}_1$  è la distribuzione di intensità data da una fenditura singola, eq. (1.52). Il fattore di modulazione aggiuntivo (detto "fattore di interferenza") dipende solo dalla distanza tra le due fenditure. Due esempi di





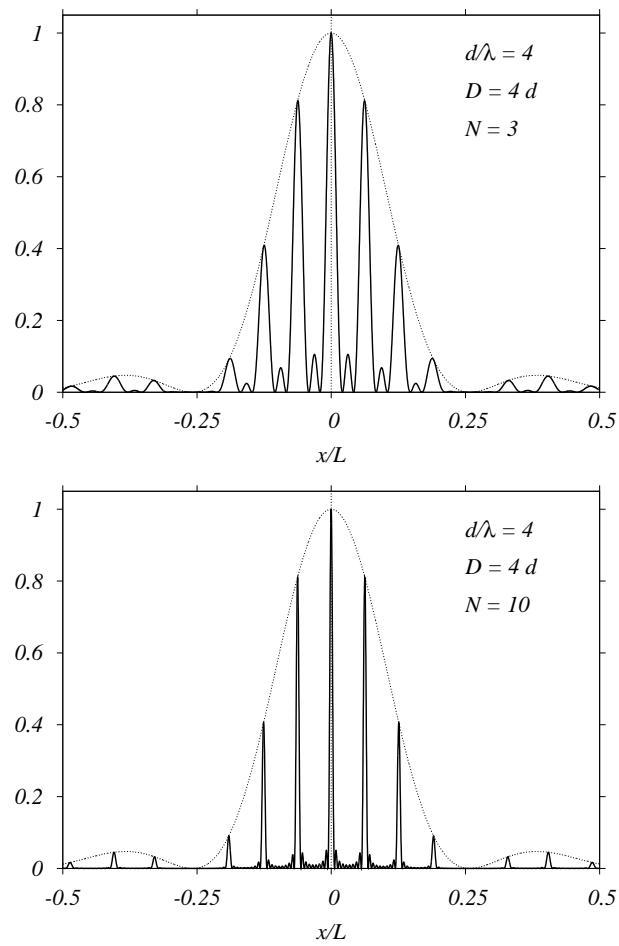
**Figura 1.10** Esempi della figura di diffrazione e interferenza di due fenditure estese (eq.(1.66), divisa per le costanti  $2\alpha C^2 d^2$ ) per diversi valori della distanza tra le due fenditure. La linea punteggiata rappresenta la figura di diffrazione per una fenditura singola (vedere figura 1.8)

figura diffrazione prodotte da due fenditure sono illustrati in figura 1.10: la larghezza delle fenditure  $d$  è la stessa (viene riproposto il caso  $d/\lambda = 4$  già mostrato nel primo riquadro della figura 1.8), e la distanza tra le due fenditure  $D$  varia da  $4d$  a  $10d$ .

La generalizzazione ad  $N$  fenditure estese è immediata: basta estendere il limite superiore della sommatoria in (1.62) e (1.64) a  $(N - 1)$ . Per l'intensità mediata si ottiene:

$$\bar{I}_N = \frac{\alpha C^2 d^2}{2} \left( \frac{\sin \frac{kd \sin \theta}{2}}{\frac{kd \sin \theta}{2}} \right)^2 \left( \frac{\sin \frac{NkD \sin \theta}{2}}{\sin \frac{kD \sin \theta}{2}} \right)^2 \quad (1.67)$$

Alcuni esempi sono illustrati in figura 1.11.



**Figura 1.11** Esempi della figura di diffrazione e interferenza di molte fenditure estese (eq.(1.67), divisa per le costanti  $2\alpha C^2 d^2 N^2$ ,  $N$  è il numero di fenditure). La linea punteggiata rappresenta la figura di diffrazione per una fenditura singola (vedere figura 1.8)