# Algoritmi numerici

- Zeri di una funzione
- Integrale di una funzione
- Soluzione di una equazione differenziale

# Zeri di una funzione

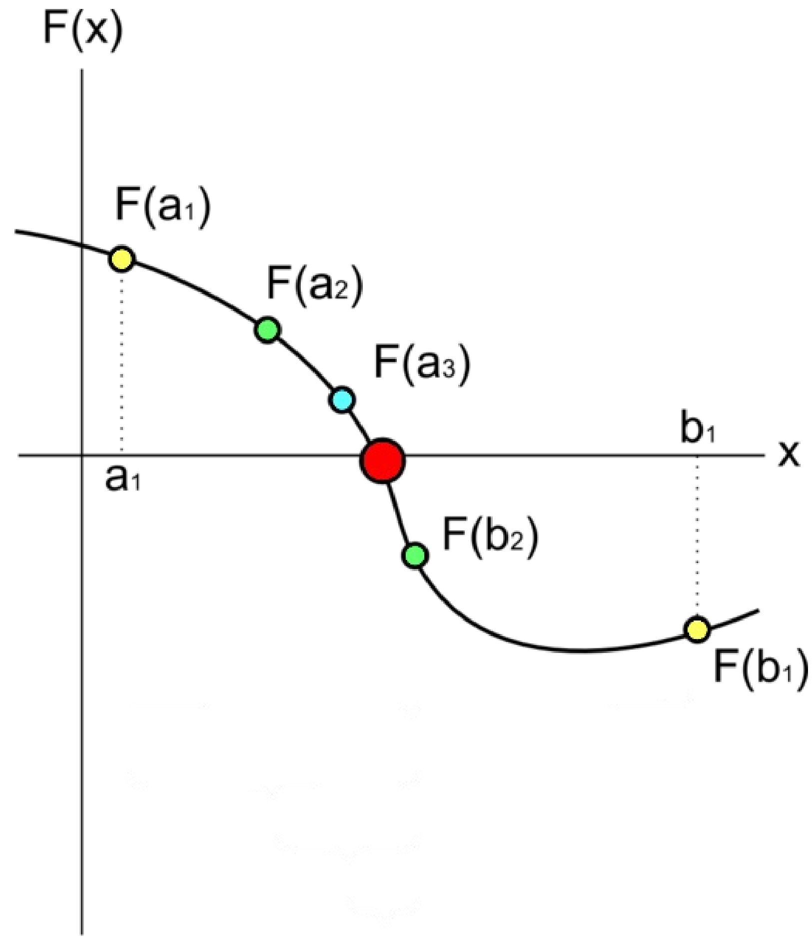
- Trovare le soluzioni di **f(x) = 0** dove f(x) e' una funzione reale di variabile reale.
- Due fasi:
  - Si separano gli zeri determinando gli intervalli della retta reale che contengono un solo zero.
  - Se $\boldsymbol{\alpha}$ e' lo zero compreso nell'intervallo **[a,b]** , abbiamo due valori approssimati di $\boldsymbol{\alpha}$: uno per difetto **a** ed uno per eccesso **b**. Occorre restringere l'intervallo per determinare $\boldsymbol{\alpha}$ con l'approssimazione $\boldsymbol{\varepsilon}$ con uno dei metodi descritti di seguito.

# Metodo della bisezione (1)

- Data f(x) continua in [a,b] con f(a)f(b) < 0, l'intervallo [a,b] contiene uno zero.
- Si determinano:

  $x_m = (b\text{-}a)/2$

  $f(x_m)$
- Se $f(x_m)=0$ allora $x_m$ è lo zero cercato; altrimenti tra i due intervalli $[a, x_m]$ e $[x_m,b]$ si sceglie quello ai cui estremi la funzione assume valori di segno opposto.



# Metodo della bisezione (2)

- Si ripete per questo intervallo il procedimento di dimezzamento e, così continuando si ottiene una successione di intervalli ognuno incluso nel precedente, di ampiezze $\mathbf{b_n - a_n = (b-a)/2^n}$
- I valori $a_i$ sono valori approssimati per difetto della radice, i valori di $b_i$ sono invece i valori della radice approssimati per eccesso. Gli $a_i$ formano una successione non decrescente limitata ed i $b_i$ formano una successione non crescente limitata. Le due successioni ammettono lo stesso limite che è lo zero di f(x) cercato.

# Metodo della bisezione (3)

- Si puo’ implementare con una funzione iterativa: double bisect(double xLeft, double xRight, double eps)
- Casi base:
  - Se: xRight – xLeft < eps: xm = (xRight – xLeft)/2 e’ la soluzione
  - Se: f(xm) = 0: xm e’ la soluzione
- Iterazione:
  - if(f(xLeft)*f(xm)<0)
    - Si dimezza [xLeft,xm]
  - Altrimenti
    - Si dimezza [xm,xRight]

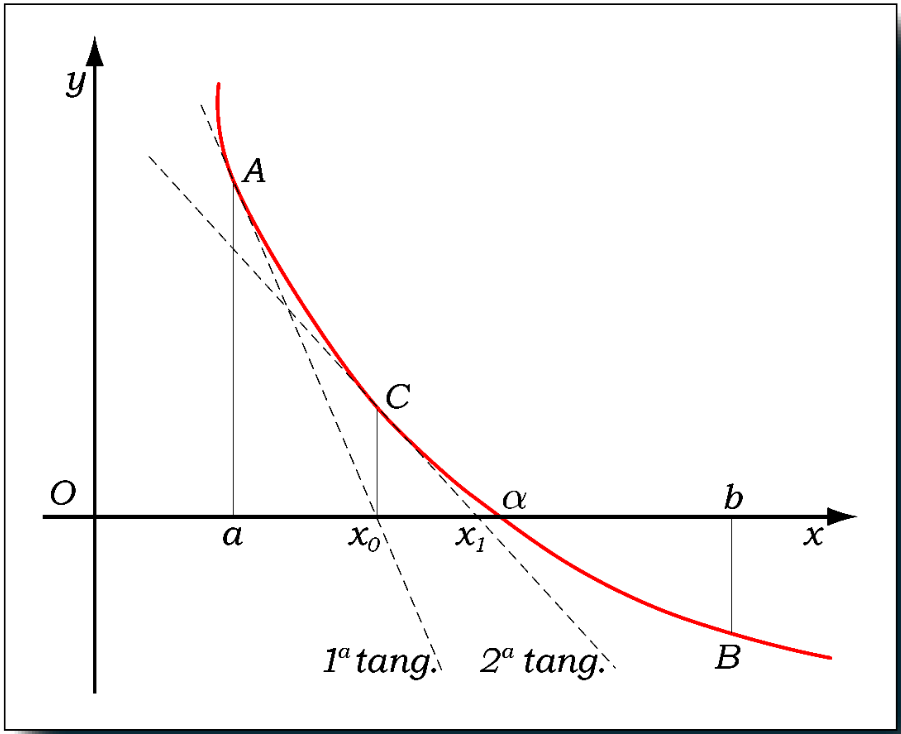
# Metodo delle tangenti (o di Newton)

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

........................

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$




Iterazione si arresta quando: $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

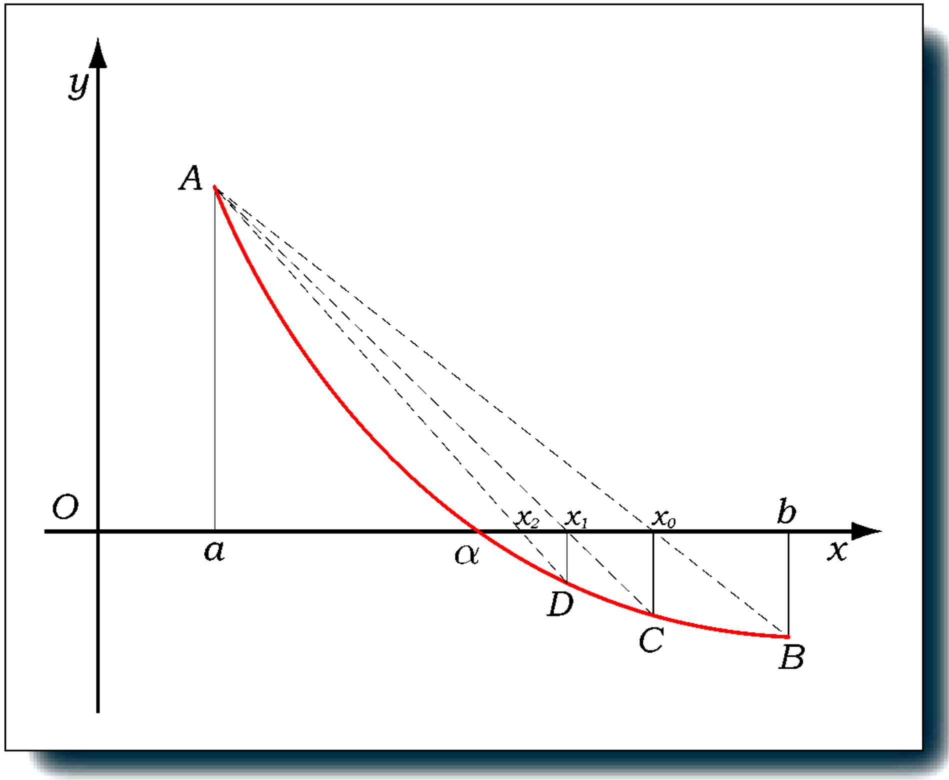
# Metodo delle secanti

$$x_0 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

$$x_1 = a - f(a)\frac{x_0-a}{f(x_0)-f(a)}$$

......................

$$x_n = a - f(a)\frac{x_{n-1}-a}{f(x_{n-1})-f(a)}$$

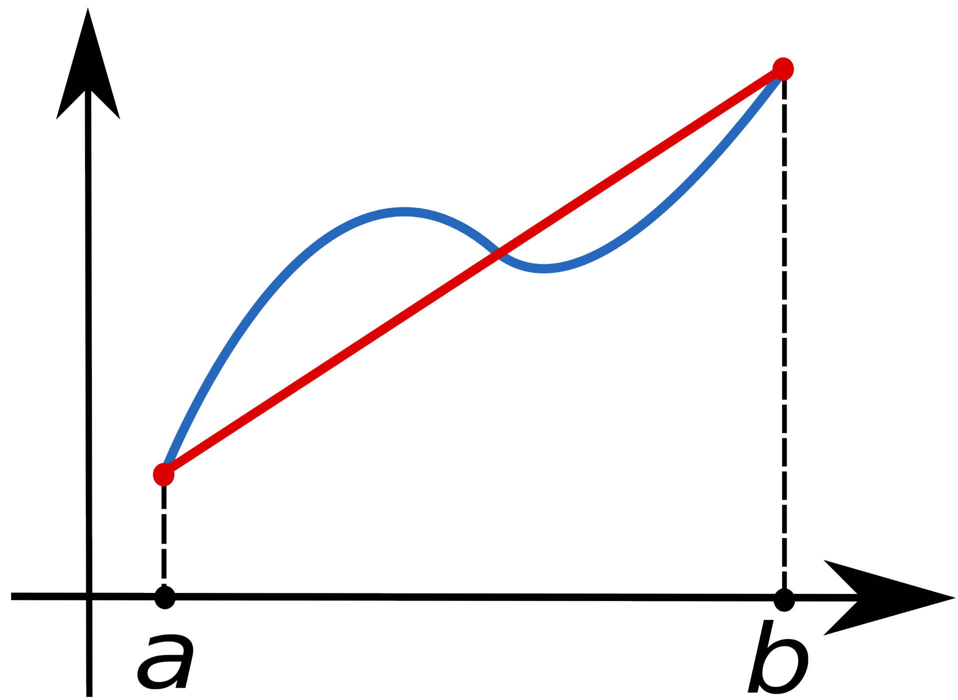



Iterazione si arresta quando: $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

# Integrazione numerica col metodo dei trapezi (1)

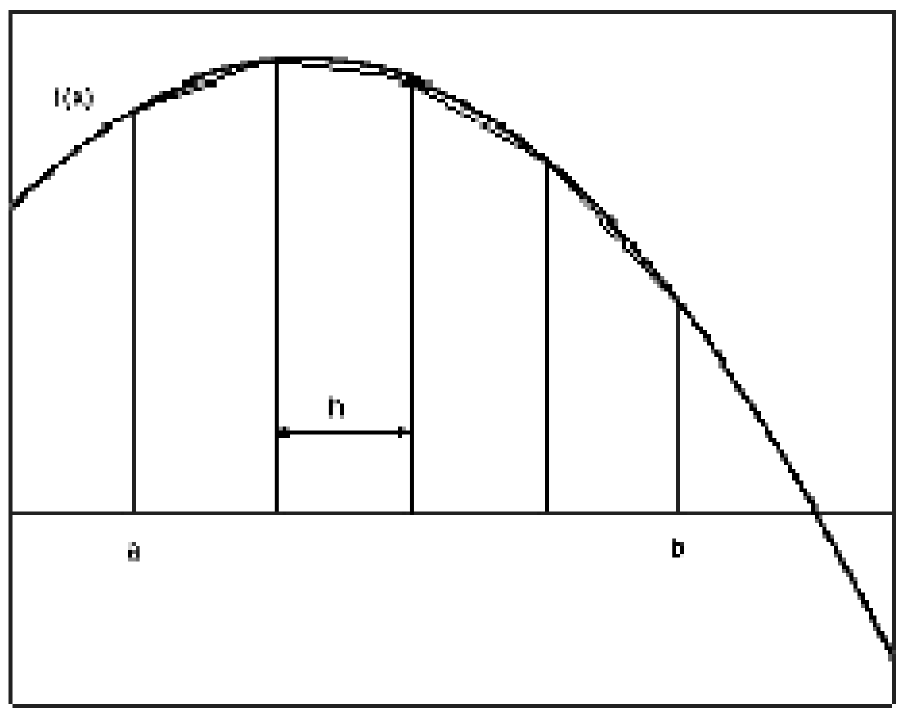
- Si approssima l'integrale, con l'area del trapezio di vertici (a,f(a)), (b,f(b)), (b,0) e (a,0).
- Questa approssimazione è accettabile se nell'intervallo di integrazione la funzione ha un andamento che si scosta poco dal lineare. Se questo non accade si può suddividere l'intervallo complessivo in un numero n opportuno di sottointervalli in ciascuno dei quali l'andamento della funzione sia quasi lineare.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)-f(b)}{2}$$



# Integrazione numerica col metodo dei trapezi (2)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$

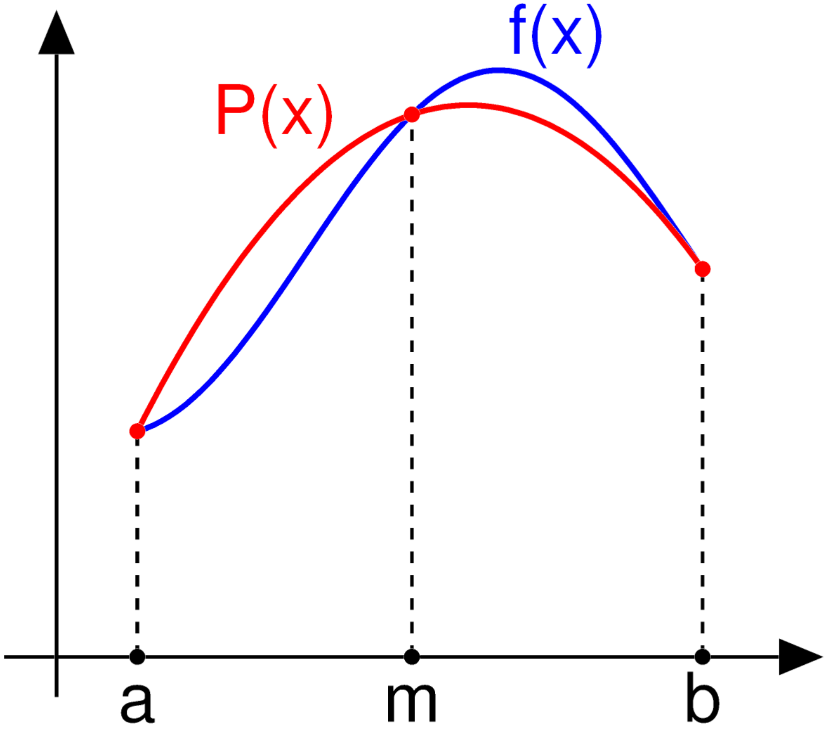


# Metodo di Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx ¿ \qquad f(x_k) = f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

$$¿ \approx \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

- Prevede la suddivisione dell'intervallo di integrazione in n (n pari) sottointervalli e la sostituzione in questi sottointervalli della funzione integranda con archi di parabola, cioè mediante polinomi quadratici.



# Convergenza del calcolo numerico di un integrale

- La precisione cresce con il numero di sottointervalli.
- Si puo' calcolare numericamente un integrale con precisione ε imponendo che

$$\left| I_n - I_{2n} \right| \leq \varepsilon$$

dove

$$I_n = \int_a^b f(x)dx$$ calcolato con n intervalli

# Soluzione numerica per equazioni differenziali ordinarie
# Metodo di Eulero (1)

- Data l'equazione differenziale

  $y' = f(x,y)$

  con la condizione al contorno $y(x_0) = y_0$ si discretizza il dominio con passo h ottenendo i punti

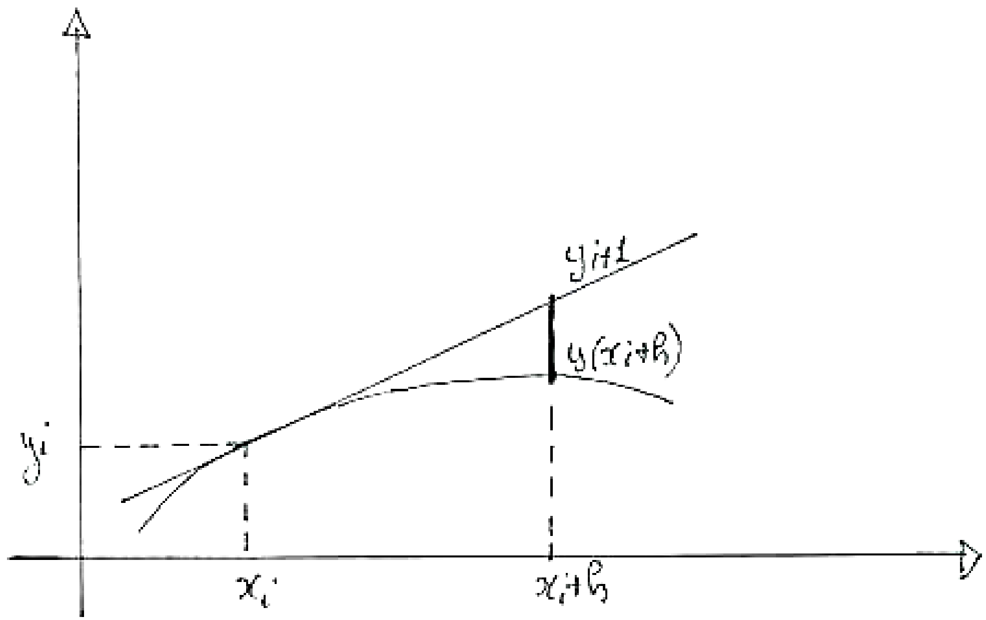
  $x_n = x_0 + nh$

- Si usa l'equazione della tangente alla curva in $x_n$

  $y_{n+1} - y_n = f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n)$

  per approssimare la curva stessa.

# Soluzione numerica per equazioni differenziali ordinarie
# Metodo di Eulero (2)



$$x_i = x_0 + ih$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

# Metodo di Runge-Kutta

**Data l'EDO:** $y' = f(x, y)$

**Condizione al contorno:** $y_0 = y(x_0)$

**Si discretizza il dominio:** $x_n = x_0 + nh$

**La soluzione nel punto $x_{n+1}$:**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

**ove:**

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_1\left(\frac{h}{2}\right)\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + k_2\left(\frac{h}{2}\right)\right)$$

$$k_4 = f(x_{n+1}, y_n + k_3 h)$$

# EDO del II ordine

Data l'EDO:

$$x''=F(t,x,x')$$

con le condizioni al contorno:

$$x_0=x(t_0)$$
$$x'_0=x'(t_0)$$

La si scompone in due EDO del primo ordine

$$x'=v$$
$$v'=F(t,x,v)$$

con le condizioni al contorno:

$$x_0=x(t_0)$$
$$x'_0=v(t_0)$$

che vengono risolte con gli usali metodi.

# Esempio: Oscillatore Armonico

Moto di un corpo soggetto alla forza $F=-kx$

L'equazione del moto: $x''=-\frac{k}{m}x$

con le condizioni al contorno

$$x_0=x(t_0)$$

$$x'_0=x'(t_0)$$

Va spezzata nelle due equazioni:

$$x'=v$$

$$v'=-\frac{k}{m}x$$

con le condizioni

$$x_0=x(t_0)$$

$$x'_0=v(t_0)$$