Capitolo 1

La formula di Planck per lo spettro di corpo nero

1.1 Radiazione di corpo nero

Consideriamo una cavità riempita di un mezzo dielettrico omogeneo isotropo, con $\mu_r \simeq 1$ e $\epsilon_r = \eta^2$, η essendo l'indice di rifrazione.

Se le pareti della cavità sono mantenute ad una temperatura costante T, ci sarà emissione di energia sotto forma di radiazioni elettromagnetiche e ci sarà nel dielettrico interno una certa distribuzione di energia elettromagnetica. In equilibrio le pareti interne della cavità assorbiranno nell'unità di tempo una quantità di energia pari a quella emessa.

La densità di energia elettromagnetica nel volume della cavità è data dalla formula:

$$\rho = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(\epsilon_r E^2 + \frac{c^2 B^2}{\mu_r} \right) \tag{1.1}$$

Rappresentiamo la distribuzione spettrale di energia di questa radiazione mediante la funzione ρ_ω, funzione della frequenza angolare ω, che rappresenta, attraverso la relazione $d\rho_\omega = \rho_\omega d\omega$ la frazione di densità di energia elettromagnetica con frequenza compresa tra ω e $\omega + d\omega$. Si ha evidentemente:

$$\rho = \int_0^\infty \rho_\omega d\omega \tag{1.2}$$

Si può dimostrare che la distribuzione spettrale dell'energia ρ_ω è una funzione universale che dipende solo da ω e T, mentre è del tutto indipendente dalla natura delle pareti e dalla forma della cavità stessa. Supponiamo di avere due cavità qualsiasi con pareti alla stessa T (per esempio collegate

a due termostati a temperatura T). Supponiamo che, ad una certa ω, $\rho'_\omega d\omega$ della prima cavità sia superiore a $\rho''_\omega d\omega$ della seconda. Colleghiamo ora energeticamente le due cavità aprendo due fori e collegandoli otticamente con un sistema focalizzante, dotato anche di un filtro ideale che lasci passare soltanto una banda molto stretta di frequenze centrata attorno a ω. Se $\rho'_\omega > \rho''_\omega$ ci sarà un flusso di energia elettromagnetica dalla cavità 1 alla 2, in contrasto con il Secondo Principio della Termodinamica in quanto le due cavità sono alla stessa temperatura. Quindi deve essere $\rho'_\omega = \rho''_\omega$ per tutte le frequenze.

Il problema della determinazione di tale funzione universale $\rho(\omega, T)$ ha portato Planck, che ne dette la soluzione esatta, ad introdurre un concetto rivoluzionario nella Fisica, quello della quantizzazione (dell' energia del campo e.m.). La teoria di Planck del corpo nero è pertanto uno dei capisaldi della Fisica Moderna.

Dal momento che $\rho(\omega, T)$ non dipende nè dalla natura delle pareti nè dalla forma, possiamo considerare una cavità a forma di parallelepipedo a sezione rettangolare con pareti perfettamente conduttrici e riempita di un dielettrico di indice di rifrazione η, come indicato in figura 1.1.

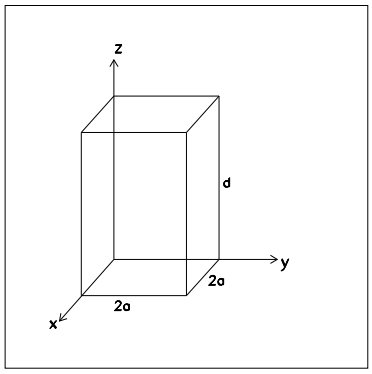

Figura 1.1:

Era stato già trovato che le frequenze proprie di oscillazione per questa cavità risonante erano date dalla relazione:

$$\begin{aligned} \omega_{l,m,n} &= \frac{c}{\eta}\left[\left(\frac{l\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\right]^{1/2} \\ &= \frac{c}{\eta}\left[k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right]^{1/2} = \frac{c}{\eta}\,|\vec{k}| \end{aligned} \tag{1.3}$$

con l, m e n numeri interi. Si ricorda ancora che ad ogni terna di valori (l, m, n) corrisponderanno due modi di oscillazione della cavità (T.E. e T.M. lungo z).

Ci proponiamo ora di calcolare il numero di modi N_ω risonanti nella cavità, con frequenze comprese tra 0 e ω. Essi saranno pari al numero di modi il cui vettore d'onda $\vec{k}$ abbia modulo compreso tra 0 e $|\vec{k}|$. Dalla (1.3) si deduce che, in generale, in un sistema di coordinate cartesiane k_x, k_y, k_z i valori possibili per $|\vec{k}|$ sono rappresentati dai vettori congiungenti l'origine con i punti nodali del reticolo che ha passo $\frac{\pi}{2a}$ in k_x e k_y e $\frac{\pi}{d}$ in k_z, rappresentato in figura 1.2.

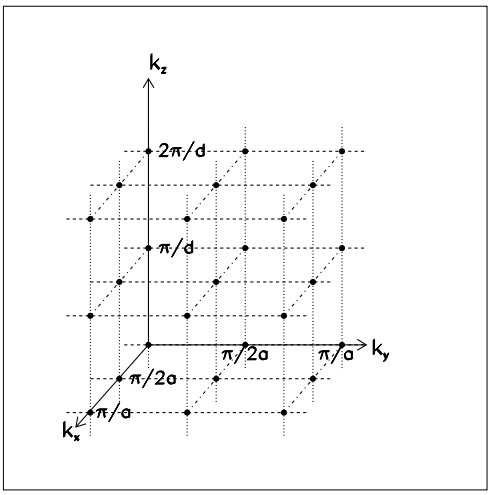

Figura 1.2:

C'è quindi un'ovvia corrispondenza biunivoca tra tali punti e i possibili valori di $|\vec{k}|$ per modi risonanti nella cavità. N_ω sarà quindi il doppio del numero di punti nodali compresi entro la sfera centrata nell'origine e con raggio $\frac{\omega\eta}{c}$. Poichè k_x, k_y, k_z sono valori definiti positivi, N_ω sarà in realtà il rapporto tra un ottante di questa sfera e il volume della celletta elementare di lati $\frac{\pi}{2a}$, $\frac{\pi}{2a}$ e $\frac{\pi}{d}$ rispettivamente. Quindi:

$$N_\omega = \frac{2\frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi\frac{\eta^3\omega^3}{c^3}}{\frac{\pi}{2a}\frac{\pi}{2a}\frac{\pi}{d}} = \frac{1}{3}\frac{\eta^3\omega^3}{\pi^2c^3}V \tag{1.4}$$

dove V è il volume della cavità parallelepipeda.

Indicando con $p(\omega)$ il numero di modi per unità di volume e per intervallo di frequenza, otteniamo dalla (1.4):

$$p_\omega = \frac{1}{V}\frac{dN_\omega}{d\omega} = \frac{\eta^3\omega^2}{\pi^2c^3} \tag{1.5}$$

Calcoliamo ora l'energia media associata a ciascuno dei modi risonanti nella cavità, con pareti a temperatura T. Secondo la statistica di Boltzmann,

la probabilità dP che l'energia di un certo modo della cavità sia compresa tra E e $E + dE$ è data da:

$$dP = Ce^{-\frac{E}{KT}}dE \tag{1.6}$$

con C costante. L'energia media del modo $< E >$ vale quindi:

$$< E >= \frac{C\int_0^\infty Ee^{-\frac{E}{KT}}dE}{C\int_0^\infty e^{-\frac{E}{KT}}dE} \tag{1.7}$$

Ponendo $\beta = \frac{1}{KT}$ si ha:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\beta}log\left[\int_0^\infty e^{-\beta E}dE\right] &= \\ &= \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\beta E}dE}\int_0^\infty Ee^{-\beta E}dE =< E > \end{aligned} \tag{1.8}$$

e quindi

$$< E >= -\frac{d}{d\beta}log\left[-\frac{1}{\beta}|e^{-\beta E}|_0^\infty\right] = -\frac{d}{d\beta}log\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} = KT \tag{1.9}$$

La funzione universale $\rho(\omega, T)$ si ottiene quindi moltiplicando il numero di modi per unità di volume e per unità di frequenza $p(\omega)$ dato dalla (1.5) per l'energia media di ciascun modo, e quindi:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\eta^3\omega^2}{\pi^2c^3}KT \tag{1.10}$$

Essa è la formula classica di Rayleigh–Jeans, completamente in disaccordo con i dati sperimentali. Si vede comunque che è sbagliata provando a sostituirla nella (1.2). Si otterrebbe una ρ infinita (*catastrofe ultravioletta*).

Il problema rimase a lungo insoluto finchè, agli inizi dell'altro secolo, Planck non introdusse l'ipotesi dei quanti di luce o fotoni. L'ipotesi fondamentale di Planck fu che l'energia di un determinato modo della cavità non potesse avere un qualsiasi valore tra 0 e ∞, ma che essa dovesse variare di multipli interi di una quantità fondamentale, proporzionale alla frequenza ω del modo. Cioè Planck suppose che l'energia del modo si dovesse scrivere come $E = nh\nu = n\hbar\omega$ con n intero positivo e h (o $\hbar = h/2\pi$) costante universale. Ciò implica che gli scambi di energia tra l'interno della cavità e le pareti possano avvenire soltanto per quantità discrete $\hbar\omega$. Tale quantità minima che viene scambiata è chiamata *fotone* o *quanto di luce*.

Usando ancora la statistica di Boltzmann, ma con gli integrali sostituiti da sommatorie, Planck ottenne:

$$< E >= \frac{\sum_0^\infty n\hbar\omega e^{-\frac{n\hbar\omega}{KT}}}{\sum_0^\infty e^{-\frac{n\hbar\omega}{KT}}} \tag{1.11}$$

Ponendo ancora $\beta = 1/KT$

$$< E >= -\frac{d}{d\beta} log \left[\sum_0^\infty e^{-n\hbar\omega\beta} \right] \tag{1.12}$$

Ricordando la somma della serie geometrica: $\sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$ $(x < 1)$, con $x = e^{-\hbar\omega\beta}$, si ottiene:

$$< E >= -\frac{d}{d\beta} log \left[\frac{1}{1 - e^{-\hbar\omega\beta}} \right] = \frac{\hbar\omega e^{-\hbar\omega\beta}}{1 - e^{-\hbar\omega\beta}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega\beta} - 1} \tag{1.13}$$

Utilizzando la (1.13) anzichè la (1.9) si ottiene la funzione $\rho(\omega, T)$:

$$\rho(\omega, T) = \frac{\hbar\eta^3\omega^3}{\pi^2 c^3 \left[e^{\hbar\omega/KT} - 1 \right]} \tag{1.14}$$

che si accorda perfettamente con tutti i dati sperimentali purchè si assuma $h = 6.62 \times 10^{-34}$ J s; h prende il nome di *costante di Planck*.

Si fa notare che il rapporto

$$\bar{q} = \frac{< E >}{h\nu} = \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \tag{1.15}$$

fornisce il valore medio del numero di fotoni per modo. Se si considera il tipico valore di $h\nu$ per frequenze nell'ottico, $h\nu \sim 1\ eV$ $(\nu \sim 10^{14} Hz)$, per T= 300 K si ha $kT \sim 2.5 \times 10^{-2} eV$, per cui dalla (1.15) $\bar{q} \simeq e^{-40} \simeq 4 \cdot 10^{-18}$. Si vede dunque che il numero medio di fotoni per modo con frequenze comprese nello spettro visibile, per radiazione di corpo nero a temperatura ambiente, è estremamente piccolo rispetto all'unità. Sarà interessante paragonare questo numero con quello ottenibile in una cavità laser oscillante su un singolo modo, in cui $\bar{q} > 10^{15}$ a seconda del tipo di laser utilizzato.

In altre parole, con i laser possiamo ottenere densità di fotoni monocromatici superiori di varie decine di ordini di grandezza a quelle ottenibili con sorgenti luminose tradizionali. Ciò fa capire la grande importanza che hanno assunto i laser, non solo nelle applicazioni, ma anche nelle Scienze Fondamentali.

1.2 La legge di Wien

Determiniamo ora la lunghezza d'onda alla quale la distribuzione spettrale di energia $\rho(\omega, T)$ (1.14) risulta massima per un valore fissato di T.

Come prima cosa è necessario operare il cambiamento di variabile $\omega \to \nu \to \lambda$:

$$\begin{aligned} \rho(\omega, T)\ d\omega &= \rho(\nu, T)\ d\nu \\ \rho(\nu, T) &= \rho(\omega, T)\ \frac{d\omega}{d\nu} = \frac{8\pi h\eta^3\nu^3}{c^3\left[e^{h\nu/KT} - 1\right]} \end{aligned} \tag{1.16}$$

avendo operato la sostituzione $\omega = 2\pi\nu$ nella espressione di $\rho(\omega, T)$; ricordando che $\rho(\lambda)d\lambda = -\rho(\nu)d\nu$, dato che $d\nu$ e $d\lambda$ hanno segni opposti, si ottiene:

$$\rho(\lambda) = -\rho(\nu)\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{8\pi hc\eta^3}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda KT} - 1} \tag{1.17}$$

Per cercare il massimo della (1.17), introduciamo la variabile $x = hc/\lambda KT$:

$$\rho(x) = \frac{8\pi T^5 K^5 \eta^3}{c^4 h^4}\frac{x^5}{e^x - 1} \tag{1.18}$$

derivando rispetto a x ed uguagliando a zero:

$$\frac{d\rho(x_0)}{dx} = 0 \to e^{-x_0} + \frac{x_0}{5} - 1 = 0 \tag{1.19}$$

questa equazione trascendente, risolta con approssimazioni successive, fornisce:

$$x_0 = 4.9651 = \frac{hc}{K}\frac{1}{\lambda_0 T} \tag{1.20}$$

da cui si ricava $\lambda_0 T = b = 2.8978 \times 10^{-3} mK$. Questa costante universale prende il nome di *costante di Wien*, mentre la legge $\lambda_0 T = b$ viene chiamata *legge dello spostamento di Wien*, poichè fu scoperta nel 1896 da Wilhelm Wien: essa stabilisce che i massimi della funzione di distribuzione spettrale della radiazione di corpo nero a diverse temperature T_1, T_2, T_3 cadono in corrispondenza di lunghezze d'onda λ_1, λ_2, λ_3 tali che $\lambda_1 T_1 = \lambda_2 T_2 = \lambda_3 T_3$, cioè che al crescere della temperatura del corpo il massimo della distribuzione si sposta verso lunghezze d'onda minori, cosa che causa una variazione di colore del corpo (colore $\to$ temperatura, concetto di temperatura di colore).

1.3 Legge di Stefan–Boltzmann

Calcoliamo ora la densità di energia totale della radiazione di corpo nero alla temperatura T:

$$\begin{aligned} \rho &= \int_0^\infty \rho_\omega d\omega \\ &= \int_0^\infty \frac{\hbar\eta^3}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{\hbar\omega/KT}-1} d\omega \end{aligned} \tag{1.21}$$

Poniamo $x = \frac{\hbar\omega}{KT}$, per cui $d\omega = \frac{KT}{\hbar}dx$:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\hbar\eta^3}{\pi^2 c^3} \frac{(KT)^4}{\hbar^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1} dx \\ &= \frac{\eta^3}{\pi^2 c^3 \hbar^3} K^4 T^4 \; 6.4938 \\ &= \eta^3 \; T^4 \; 7.5643 \times 10^{-16} J m^{-3} K^{-4} \end{aligned} \tag{1.22}$$

L'equazione (1.22) è nota come *legge di Stefan–Boltzmann*; fu scoperta nel 1879 da Josef Stefan e provata teoricamente alcuni anni dopo da Ludwig Boltzmann. A partire da essa è possibile far vedere che l'energia emessa da un corpo nero per unità di tempo e di superficie irraggiante, chiamata *emittanza di radiazione, F,* è data dalla legge:

$$F(T) = \sigma T^4 \tag{1.23}$$

dove $\sigma = 5.6693 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$ è una costante universale e prende il nome di *costante di Stefan–Boltzmann.* Usando tale formula è possibile determinare la temperatura di un corpo nero a partire dalla sua emittanza di radiazione.

1.4 Ipotesi di Planck e quantizzazione del campo em. (Facoltativo)

La assunzione fondamentale di Planck, $E = nh\nu$ per i modi della cavita', venne considerata con un certo grado di cautela se non di sospetto per qualche tempo dopo la sua enunciazione. Alcuni fisici considerarono tale ipotesi come un puro trucco metamatico per trasformare un integrale, (1.7), in una sommatoria, (1.11), in modo da ottenere, per fortuna, un risultato in accordo

con i dati sperimentali. Tuttavia la teoria dell'*effetto fotoelettrico* dovuta ad Einstein (1904), che si basava essenzialmente sulla ipotesi di Planck, forni' presto una ulteriore evidenza della correttezza di tale ipotesi.

Tale ipotesi, tuttavia, ricevette una piena giustificazione concettuale solo molti anni dopo, con la *teoria quantistica dei campi* (1927). Pur non avendo la pretesa di trattare in modo esaustivo tale argomento, proviamo a capire come nasca il concetto di quantizzazione dei campi, cosa che sara' utile per capire meglio i meccanismi di interazione tra radiazione em e materia che verranno trattati nel terzo capitolo.

Consideriamo un modo della cavita', caratterizzato da una particolare configurazione di onde (campi elettrici e magnetici) stazionarie e sia ν la sua frequenza. Se $E_x(\vec{r},t)$ e $B_y(\vec{r},t)$ sono le componenti trasverse dei suoi campi elettrico e di induzione magnetica, la densita' di energia corrispondente ρ e' data dalla (1.1) e la sua energia risulta

$$W = \int \rho dV$$

dove V e' il volume della cavita'. Per capire le basi della teoria quantistica dei campi bisogna osservare che, in analogia al caso di una particella, le quantita' $E_x(\vec{r},t)$ e $B_y(\vec{r},t)$ non possono essere misurate contemporaneamente con precisione arbitraria. Esiste una relazione di indeterminazione di Heisenberg tra $E_x(\vec{r},t)$ e $B_y(\vec{r},t)$ analoga a quella che lega la posizione x e l' impulso p_x di una particella che, per esempio, si muove lungo l' asse delle x. Cosi' come la relazione di indeterminazione di Heisenberg tra x e p_x fornisce il punto di partenza per la teoria quantistica di una particella, in quanto indica che le equazioni della meccanica classica basate essenzialmente sulle variabili canoniche x e p_x non sono piu' valide, cosi' la relazione di indeterminazione tra $E_x(\vec{r},t)$ e $B_y(\vec{r},t)$ fornisce il punto di partenza della teoria quantistica della radiazione nel senso che indica che le equazioni di Maxwell a partire dalle quali vengono espressi i campi della cavita' non sono piu' valide.

L' analogia tra teoria quantistica di una particella e teoria quantistica della radiazione puo' essere estesa considerando una particella in un certo punto, soggetta ad una forza elastica., ossia un oscillatore armonico che e' uno degli esempi fondamentali della teoria quantistica di una particella. Un oscillatore armonico, in moto lungo l' asse x per esempio, e' un oscillatore meccanico di energia

$$W = \frac{kx^2}{2} + \frac{p_x^2}{2m} \tag{1.24}$$

dove k e' la costante della forza elastica e m e' la massa della particella. L' oscillatore armonico presenta numerose analogie con un modo della cavita': entrambi sono degli oscillatori nel senso che sono caratterizzati da

una frequenza di risonanza. In un oscillatore meccanico l' oscillazione avviene perche' l' energia potenziale, $\frac{kx^2}{2}$, si trasforma periodicamente in energia cinetica, $\frac{p_x^2}{2m}$. In un oscillatore em l' energia elettrica, $\int(\epsilon E^2/2)dV$, viene periodicamente trasformata in energia magnetica $\int(\frac{c^2\ B^2}{\mu}/2)dV$. Basandosi su questa analogia, si possono cercare regole di quantizzazione simili a quelle del caso meccanico. La procedura di quantizzazione corretta porta al risultato fondamentale che l' energia di un dato modo della cavita' e' quantizzata esattamente nello stesso modo dell' energia dell' oscillatore armonico. Gli autovalori della energia del modo sono dati da:

$$W = 1/2h\nu + nh\nu \tag{1.25}$$

dove n e' un intero. Il primo termine, detto *energia di punto zero*, ha una origine simile a quella dell' oscillatore armonico. Nel caso meccanico, infatti, nasce dal fatto che l' energia non puo' essere nulla dal momento che in base alla (1.24) questo richiederebbe che entrambi x e p_x fossero nulli, in contrasto con il principio di Heisenberg. Nel caso em, l' energia non puo' essere nulla perche', in accordo alla (1.1), questo richiede che sia E_x che B_y siano nulli cosa che, per lo stesso motivo non e' possibile.

Pertanto la quantizzazione dei campi predice che i livelli energetici di un dato modo della cavita' di frequenza ν siano dati dalla (1.25), conclusione che coincide con l' ipotesi di Planck a parte per il termine di energia di punto zero. La quantizzazione dei campi fornisce una giustificazione fondamentale all' ipotesi di Planck.

Come commento finale si puo' osservare che nel livello energetico piu' basso di un oscillatore em quantizzato, di energia $W = 1/2h\nu$, sia $< E_x^2 >$ che $< B_y^2 >$ sono diversi da zero e vengono indicati come fluttuazioni di punto zero del campo elettrico e magnetico rispettivamente. Si osservi anche che il valore esatto della energia di punto zero non ha significato fisico: si potrebbe ridefinire l' energia del modo della cavita' in modo tale da avere una energia di punto zero pari a zero. Tuttavia questo stato includerebbe comunque le fluttuazioni di punto zero dei campi: tali fluttuazioni sono le quantita' che caratterizzano di fatto l' energia di punto zero.