Capitolo 3

Interazione radiazione-materia

3.1 Assorbimento

Si vogliono ora calcolare le densità di probabilità W_{12} e W_{21} di assorbimento ed emissione stimolata definite, rispettivamente dalle (2.8) e (2.6). Il calcolo verrà effettuato utilizzando la cosiddetta trattazione semiclassica del problema interazione radiazione-materia. In tale trattazione il sistema atomico è supposto quantizzato (e quindi lo si studia con l'ausilio della meccanica quantistica) mentre il campo E.M. dell'onda incidente viene studiato classicamente, cioè utilizzando le equazioni di Maxwell. Si puo', infatti, dimostrare che l'approccio dato allo studio del problema dall' uso della teoria quantistica dei campi, l'elettrodinamica quantistica, che descrive compiutamente il fenomeno, porta allo stesso risultato della trattazione semiclassica quando il numero di fotoni di un certo modo di radiazione e' molto maggiore dell'unita'. Poiche' questa condizione e' verificata in ogni situazione diversa da quelle che coinvolgono onde em estremamente deboli, si puo' evitare la complicazione della trattazione quantistica completa.

Studiamo dapprima l'assorbimento. A tale scopo consideriamo il solito sistema a due livelli ed indichiamo con $\psi_1 = u_1 e^{(-iE_1t/\hbar)}$ e $\psi_2 = u_2 e^{(-iE_2t/\hbar)}$ rispettivamente le autofunzioni dei due stati stazionari, come indicato in figura 3.1. All'istante t = 0 supponiamo che l'atomo, nel suo stato fondamentale, sia investito da un'onda E.M.. A tale istante l'atomo sarà descritto dall'autofunzione ψ_1 . Inoltre, l'Hamiltoniana H dell'atomo può essere scritta come:

$$H = H_0 + H' \tag{3.1}$$

dove H_0 è l' Hamiltoniana dell' atomo in assenza di onda E.M. ed H' è l' Hamiltoniana corrispondente alla interazione dell' onda E.M. con l' atomo.



Figura 3.1: Sistema a due livelli in esame

Si avranno quindi le equazioni agli autovalori per l' Hamiltoniana:

$$H_0 u_1 = E_1 u_1 H_0 u_2 = E_2 u_2$$
(3.2)

Per calcolare la funzione ψ dell' atomo ad un istante generico occorrerà risolvere l'equazione di Schrödinger:

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{3.3}$$

Sotto l' effetto dell' onda E.M. la funzione d' onda dell' atomo può essere scritta come:

$$\psi = a_1(t)\psi_1 + a_2(t)\psi_2 \tag{3.4}$$

essendo in generale $a_1 e a_2$ funzioni complesse dipendenti dal tempo. Si postula che i coefficienti $|a_1|^2 e |a_2|^2$ diano le probabilità che al tempo t l'atomo si trovi rispettivamente nello stato 1 o 2; pertanto, dovendo essere $\int |\psi|^2 dV = 1$ e supponendo che le funzioni $u_1 e u_2$ siano ortonormali, si ha che deve valere:

$$|a_1(t)|^2 + |a_2(t)|^2 = 1$$
(3.5)

Per il calcolo della probabilità di transizione W_{12} occorrerà dunque calcolare le quantità $|a_1(t)|^2 e |a_2(t)|^2$. Sostituendo la (3.4) nella (3.3) si ha:

$$(H_{0} + H') \left[a_{1}(t) \ u_{1}e^{-iE_{1}t/\hbar} + a_{2}(t) \ u_{2}e^{-iE_{2}t/\hbar} \right] =$$

$$= i\hbar \left[\frac{da_{1}(t)}{dt} \ u_{1}e^{-iE_{1}t/\hbar} + \frac{da_{2}(t)}{dt} \ u_{2}e^{-iE_{2}t/\hbar} \right]$$

$$+ \left[a_{1}(t)u_{1}E_{1}e^{-iE_{1}t/\hbar} + a_{2}(t)u_{2}E_{2}e^{-iE_{2}t/\hbar} \right]$$
(3.6)

Tale equazione, tenendo conto della (3.2), si riduce a:

$$i\hbar \left[\frac{da_1(t)}{dt} u_1 e^{-iE_1t/\hbar} + \frac{da_2(t)}{dt} u_2 e^{-iE_2t/\hbar} \right] = \left[a_1(t)H'u_1 e^{-iE_1t/\hbar} + a_2(t)H'u_2 e^{-iE_2t/\hbar} \right]$$
(3.7)

Moltiplicando l'equazione (3.7) per l'autofunzione $u_1^* \in u_2^*$ rispettivamente, ed integrando su tutto lo spazio, si ottiene:

$$i\hbar \left[\frac{da_1(t)}{dt} e^{-iE_1t/\hbar} \int u_1 u_1^* dV + \frac{da_2(t)}{dt} e^{-iE_2t/\hbar} \int u_2 u_1^* dV \right] = \left[a_1(t) e^{-iE_1t/\hbar} \int u_1^* H' u_1 dV + a_2(t) e^{-iE_2t/\hbar} \int u_1^* H' u_2 dV \right]$$
(3.8)

$$i\hbar \left[\frac{da_1(t)}{dt} e^{-iE_1t/\hbar} \int u_1 u_2^* dV + \frac{da_2(t)}{dt} e^{-iE_2t/\hbar} \int u_2 u_2^* dV \right] = \left[a_1(t) e^{-iE_1t/\hbar} \int u_2^* H' u_1 dV + a_2(t) e^{-iE_2t/\hbar} \int u_2^* H' u_2 dV \right]$$
(3.9)

Tenendo conto del fatto che le funzioni $u_{1,2}$ sono ortonormali, cioè che $\int u_1^* u_1 \, dV = \int u_2^* u_2 \, dV = 1$, $\int u_1^* u_2 \, dV = \int u_2^* u_1 \, dV = 0$, e ponendo:

$$H'_{11}(t) = \int u_1^* H' u_1 dV$$

$$H'_{22}(t) = \int u_2^* H' u_2 dV$$

$$H'_{12}(t) = \int u_1^* H' u_2 dV$$

$$H'_{21}(t) = \int u_2^* H' u_1 dV$$
(3.10)

le (3.8) e (3.9), nel caso del sistema a due livelli considerato, forniscono per essi le due equazioni:

$$\frac{da_1(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \{ H'_{11}a_1(t) + H'_{12}a_2(t) \ e^{-i(E_2 - E_1)t/\hbar} \}$$

$$\frac{da_2(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \{ H'_{21}a_1(t) \ e^{-i(E_1 - E_2)t/\hbar} + H'_{22}a_2(t) \}$$
(3.11)

che vanno risolte con la condizione iniziale $a_1(0) = 1$ e $a_2(0) = 0$ poiché inizialmente l'atomo si trova sul livello 1.

Tutto quanto fatto finora è rigoroso. Ora, per poter agevolmente risolvere il sistema (3.11) si fa uso di un metodo perturbativo. Si suppone, cioè, che a destra nelle equazioni (3.11) si possa approssimativamente scrivere

3.1. ASSORBIMENTO

 $a_1(t) \simeq 1$ e $a_2(t) \simeq 0$. Risolvendo le (3.11) con tali ipotesi si otterranno le soluzioni per $a_1(t)$ e $a_2(t)$ in prima approximazione. Per tale ragione la teoria che segue è nota come teoria delle perturbazioni al primo ordine.

Le soluzioni $a_1(t)$ e $a_2(t)$ così ottenute possono poi essere sostituite a destra delle (3.11) per ottenere una soluzione approssimata al secondo ordine e così via. Al primo ordine, dunque le (3.11) diventano:

$$\frac{da_1}{dt} \simeq \frac{1}{i\hbar} H'_{11}$$

$$\frac{da_2}{dt} \simeq \frac{1}{i\hbar} H'_{21} e^{i\omega_0 t}$$
(3.12)

dove si è indicata con $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ la frequenza della transizione atomica.

Per il calcolo della probabilità di transizione occorre solo risolvere la seconda delle (3.12). A tale scopo, supponendo che l'onda E.M. incidente sia di tipo sinusoidale e di frequenza ω , potremo scrivere:

$$H'_{21} = H'^{0}_{21} \sin \omega t = \frac{H'^{0}_{21} \left[e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \right]}{2i}$$
(3.13)

dove H_{21}^{0} è una costante in generale complessa. Sostituendo la (3.13) nella seconda delle (3.12) e integrando, con la condizione iniziale $a_2(0) = 0$, si ha:

$$a_{2}(t) = \frac{H_{21}^{\prime 0}}{2i\hbar} \left[\frac{e^{i(\omega_{0}-\omega)t} - 1}{\omega_{0}-\omega} - \frac{e^{i(\omega_{0}+\omega)t} - 1}{\omega_{0}+\omega} \right]$$
(3.14)

Se ora supponiamo che $\omega \simeq \omega_0$, si vede subito che il primo termine nella parentesi quadra è molto maggiore del secondo; pertanto potremo scrivere:

$$a_2(t) \simeq \frac{-H_{21}^{\prime 0}}{2i} \frac{e^{-i\Delta\omega t} - 1}{\hbar\Delta\omega}$$
(3.15)

dove $\Delta \omega = \omega - \omega_0$. Ne segue che:

$$|a_{2}(t)|^{2} = \frac{|H_{21}^{\prime 0}|^{2}}{\hbar^{2}} \left[\frac{\sin(\Delta\omega \ t/2)}{\Delta\omega}\right]^{2}$$
(3.16)

La funzione $y = \left[\frac{\sin(\Delta\omega t/2)}{\Delta\omega}\right]^2$ è riportata in figura 3.2 in funzione di $\Delta\omega$ per un valore fissato di t. Si vede dunque che tale funzione diventa sempre più alta e stretta al crescere di t. Siccome, inoltre, si può dimostrare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin(\Delta \omega \ t/2)}{\Delta \omega} \right]^2 d(\Delta \omega) = \frac{\pi \ t}{2}$$
(3.17)



Figura 3.2: Rappresentazione grafica della funzione $y = \left[\frac{\sin \Delta \omega t/2}{\Delta \omega}\right]^2$ in funzione di $\Delta \omega$.

per tempi t sufficientemente lunghi potremo porre:

$$\left[\frac{\sin(\Delta\omega \ t/2)}{\Delta\omega}\right]^2 \simeq \frac{\pi \ t}{2}\delta(\Delta\omega) \tag{3.18}$$

essendo δ la funzione δ di Dirac. Quindi:

$$|a_2(t)|^2 \simeq \frac{|H_{21}'^0|^2}{\hbar^2} \frac{\pi}{2} t \,\delta(\Delta\omega)$$
 (3.19)

il che dimostra che per tempi sufficientemente lunghi, la probabilità $|a_2(t)|^2$ di trovare l'atomo al tempo t sul livello 2 è proporzionale al tempo stesso.

Pertanto la densità di probabilità di transizione cercata W_{12} è data da:

$$W_{12} = \frac{|a_2(t)|^2}{t} \simeq \frac{|H_{21}'^0|^2}{\hbar^2} \frac{\pi}{2} \,\delta(\Delta\omega) \tag{3.20}$$

Per il calcolo esplicito di W_{12} resta da calcolare la quantità $|H_{21}^{\prime 0}|^2$. A tale scopo se si assume che l'interazione responsabile della transizione sia di tipo dipolare, potremo scrivere:

$$H' = e\vec{E}(\vec{r},t) \cdot \vec{r} \tag{3.21}$$

Nella (3.21) e è la carica elettrica dell' elettrone che effettua la transizione dal livello 2 al livello 1, il vettore \vec{r} ne individua la posizione ed $\vec{E}(\vec{r},t)$ è il campo elettrico nel punto \vec{r} . Per semplicità assumeremo che l'origine ($\vec{r} = 0$) del

3.1. ASSORBIMENTO

nostro sistema di riferimento coincida col centro del nucleo. Pertanto dalla (3.10) e (3.21) si ha:

$$H'_{21} = e \int u_2^* \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{r} \, u_1 dV \tag{3.22}$$

Supponiamo ora che la lunghezza dell' onda E.M. sia molto maggiore delle dimensioni atomiche, come ben verificato nel caso della radiazione visibile $(\lambda = 5000 \text{ Å} \text{ per una luce verde, mentre le dimensioni atomiche sono dell' or$ $dine di 1 Å). S otto questa ipotesi nella (3.22) si può tirare fuori <math>\vec{E}$ dall' integrale calcolandolo per $\vec{r} = 0$, cioè al centro del nucleo (approssimazione di dipolo elettrico). Ponendo quindi:

$$\vec{E}(0,t) = \vec{E}_0 \sin \omega t \tag{3.23}$$

dalle (3.13), (3.22) e (3.23) si ottiene:

$$H_{21}^{\prime 0} = \vec{E}_0 \cdot \vec{\mu}_{21} \tag{3.24}$$

dove $\vec{\mu}_{21}$ è dato da:

$$\vec{\mu}_{21} = e \int u_2^* \ \vec{r} \ u_1 dV \tag{3.25}$$

ed è chiamato l'elemento di matrice del momento di dipolo elettrico. Pertanto, indicando con ϑ l'angolo tra $\vec{\mu}_{12}$ e \vec{E}_0 , si avrà infine:

$$|H_{21}^{\prime 0}|^2 = E_0^2 |\mu_{21}|^2 \cos^2 \vartheta$$
(3.26)

dove $|\mu_{21}|$ è il modulo del numero complesso μ_{21} . Supponendo che l'onda E.M. interagisca con tanti atomi con relativi vettori $\vec{\mu}_{21}$ orientati casualmente rispetto ad \vec{E}_0 , il valore medio di $|H_{21}'^0|^2$ si otterrà mediando la (3.26) per tutti i possibili valori di cos² ϑ . Se tutti gli angoli ϑ sono ugualmente probabili il valor medio è cos² $\vartheta = 1/3$, per cui si ha:

$$\overline{\mid H_{21}^{\prime 0} \mid}^2 = \frac{E_0^2 \mid \mu_{21} \mid^2}{3}$$
(3.27)

Esprimendo | $H_{21}^{\prime 0}$ |² in funzione dell' intensità dell' onda E.M. incidente, che per un' onda piana è:

$$I = \frac{\eta \epsilon_0 c E_0^2}{2} \tag{3.28}$$

dove η è l' indice di rifrazione del sistema atomico e c è la velocità della luce nel vuoto, si ottiene, infine dalle (3.20), (3.27) e (3.28):

$$W_{12} = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c\hbar^2} \mid \mu_{21} \mid^2 I\delta(\Delta\omega) \tag{3.29}$$

Si vede subito che l'espressione di W_{12} così ottenuta non può essere accettabile da un punto di vista fisico perchè, per via della δ di Dirac, essa darebbe $W_{12} = 0$ per $\omega \neq \omega_0$ e $W_{12} = \infty$ per $\omega = \omega_0$, cioè quando la frequenza dell' onda E.M. è esattamente coincidente con la frequenza della transizione atomica.

La ragione di questo risultato assurdo è che si è fatto tendere il tempo t all' infinito nella (3.16), il che significa che si è supposto che l' interazione tra l' onda E.M. incidente e il sistema possa avvenire coerentemente per un tempo infinito. Nella realtà c' è una serie di cause per le quali questo non avviene. Per esempio, supponiamo che il sistema che possiede i due livelli 1 e 2 in esame sia sotto forma di un gas monoatomico. In questo caso si produrranno urti tra un atomo e l' altro. Dopo l' urto le autofunzioni dell' atomo non avranno più la stessa fase rispetto a quella dell' onda E.M. incidente. Pertanto l' interazione come ottenuta nelle equazioni precedenti è valida nell' intervallo di tempo tra un urto e l' altro, cioè per un tempo τ_c che è il tempo di collisione medio tra due urti successivi per gli atomi del gas. Definendo $\tau_c = 1/\Gamma_c$ è possibile dimostrare che per un gas la (3.29) si trasforma in :

$$W_{12} = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c\hbar^2} \mid \mu_{21} \mid^2 I \frac{\tau_c}{\pi} \frac{\Gamma_c^2}{(\Delta\omega)^2 + \Gamma_c^2} = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c\hbar^2} \mid \mu_{21} \mid^2 I g(\Delta\omega)(3.30)$$

dove $\Delta \omega = \omega - \omega_0$ e la funzione $g(\Delta \omega)$ sostituisce la δ di Dirac della (3.29).



Figura 3.3: Riga lorentziana.

La funzione $g(\Delta \omega)$ è rappresentata in figura 3.3. Essa ha il massimo per $\Delta \omega = 0$, cioè per $\omega = \omega_0$, dove vale τ_c/π . L'ampiezza della curva a metà altezza vale $\Delta \omega_0 = 2/\tau_c$. Tale curva è chiamata Lorentziana e rappresenta l'allargamento omogeneo di una linea spettrale. In generale la W_{12} può essere sempre espressa da una formula del tipo (3.30) e precisamente:

$$W_{12} = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c\hbar^2} |\mu_{21}|^2 I g_t(\Delta\omega)$$
(3.31)

dove $g_t(\Delta \omega)$ è una funzione normalizzata ad 1 la cui esplicita forma dipende dal fenomeno che causa l'allargamento della riga. Quest' ultima formula esprime la probabilità di transizione nell'approssimazione di interazione di dipolo elettrico. Da ricordare l'analogia con l'oscillazione di un dipolo smorzato (paragrafo 5.3 degli appunti del corso di Complementi di Elettromagnetismo: da notare che, in questo caso, la funzione lorentziana è stata normalizzata a 1), che fornisce, appunto, una curva di allargamento lorentziana.

3.2 Emissione stimolata

Il calcolo del coefficiente W_{21} di emissione stimolata andrebbe fatto in una maniera del tutto analoga partendo dalle (3.11) con le condizioni iniziali $a_1(0) = 0$ e $a_2(0) = 1$. Si vede allora immediatamente che le equazioni in questo caso si ottengono dalle corrispondenti equazioni scritte per il caso dell' assorbimento ((3.11)–(3.31)), scambiando in queste gli indici 1 e 2 fra loro. Siccome si vede facilmente dalla (3.25) che | μ_{12} |=| μ_{21} |, segue dalla (3.31) che

$$W_{12} = W_{21} \tag{3.32}$$

cioè le densità di probabilità di assorbimento e di emissione stimolata sono uguali e quindi porremo in generale:

$$W = W_{12} = W_{21}$$

| $\mu \mid = \mid \mu_{12} \mid = \mid \mu_{21} \mid$ (3.33)

Consideriamo ora un materiale investito da una radiazione monocromatica di frequenza ω e intensità *I*. Siano N_1 e N_2 le popolazioni (cioè il numero di atomi per unità di volume) dei due livelli 1 e 2 del materiale. Con riferimento alla figura 2.4 possiamo scrivere:

$$dI = \hbar\omega \ dF = -W(N_1 - N_2)\hbar\omega dz \tag{3.34}$$

dove dI è la variazione subita dall' intensità dell' onda nell' attraversare lo spessore dz di materiale. Sostituendo la (3.31) nella (3.34) si vede che dI può essere scritto come:

$$dI = -\alpha I dz \tag{3.35}$$

dove:

$$\alpha = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c\hbar} \mid \mu \mid^2 \omega (N_1 - N_2) \ g_t(\Delta\omega) =$$
$$= \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c\hbar} \mid \mu \mid^2 \omega (N_1 - N_2) \ \frac{\tau_c}{\pi} \frac{\Gamma_c^2}{(\Delta\omega)^2 + \Gamma_c^2}$$
(3.36)

La quantità α , che ha le dimensioni dell' inverso di una lunghezza, è chiamata coefficiente di assorbimento del materiale. La relazione $I(l) = I(0)e^{-\alpha l}$, ottenuta integrando la (3.35) su tutto lo spessore l del materiale definisce il significato fisico del coefficiente di assorbimento e ne consente la determinazione sperimentale. Per righe sufficientemente strette α può ritenersi dipendente dalla frequenza solo attraverso il termine $g_t(\Delta \omega)$; discende di qui una nuova interpretazione del significato fisico della $g_t(\Delta \omega)$: essa rappresenta l' andamento in frequenza del coefficiente di assorbimento. Si può, infine, definire un coefficiente di assorbimento per atomo:

$$\sigma = \frac{\alpha}{(N_1 - N_2)} = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c\hbar} \mid \mu \mid^2 \omega \ g_t(\Delta\omega) =$$
$$= \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c\hbar} \mid \mu \mid^2 \omega \frac{\tau_c}{\pi} \frac{\Gamma_c^2}{(\Delta\omega)^2 + \Gamma_c^2}$$
(3.37)

Tale quantità, che ha le dimensioni di un' area, è detta sezione d' urto di assorbimento della transizione in esame. Il suo significato fisico può essere facilmente ottenuto considerando il caso in cui tutti gli atomi siano sul livello 1 $(N_1 = N, N_2 = 0)$ e sostituendo la (3.37) nella (3.35); si ottiene:

$$dF = -\sigma NFdz \tag{3.38}$$

dove al posto dell' intensità si è considerato il flusso di fotoni (fotoni/m² sec). La (3.38) fa vedere che si può associare ad ogni atomo una sezione efficace di assorbimento di fotoni pari a σ .

Come ulteriore osservazione notiamo che se $N_2 > N_1$, cioe' in presenza di inversione di popolazione, il coefficiente di assorbimento definito dalla (3.36) diventa negativo, cosicche' l' intensita' dell' onda viene amplificata piuttosto che essere assorbita nel materiale. In tal caso e' piu' conveniente definire una nuova quantita' g, come:

$$g = (N_2 - N_1) \tag{3.39}$$

che e' positiva; tale quantita' viene indicata come coefficiente di guadagno.

In conclusione, facciamo notare che abbiamo introdotto quattro coefficienti W, α , σ e g; di questi solo σ dipende esclusivamente dalle caratteristiche del materiale in esame, mentre W, α e g dipendono anche, rispettivamente, dall' intensità I e dalla densità atomica $(N_1 - N_2)$ o $(N_2 - N_1)$. Questi quattro coefficienti rappresentano maniere diverse per descrivere lo stesso fenomeno, quello dell' assorbimento e dell' emissione stimolata.

34

3.3 Emissione spontanea

Dobbiamo ora calcolare il coefficiente A che compare nella (2.3) e rappresenta la densità di probabilità di emissione spontanea dal livello 2 al livello 1.

Sembrerebbe logico applicare anche in questo caso la teoria semiclassica, come fatto per il calcolo del coefficiente W. In realtà tale metodo non porta a risultati fisicamente accettabili, in accordo con i dati sperimentali, mentre la trattazione completa del fenomeno della emissione spontanea, facilmente osservabile nella vita quotidiana, richiede l'uso della descrizione quantistica non solo della materia ma anche del campo em.

Il motivo va cercato nel fatto che non è possibile applicare la teoria perturbativa, in particolare le condizioni iniziali $a_1(0) = 0$ e $a_2(0) = 1$. (Infatti, secondo la teoria semiclassica, l'atomo non dovrebbe decadere, come indicato dalla seconda delle (3.11), che dimostra come, in tal caso, $a_2(t)$ sia di fatto una costante. Altrimenti, se $a_1(t) = 0$ anche la matrice del momento di dipolo elettrico si annulla. In questo caso, siccome l'atomo non ha un momento di dipolo oscillante, esso non irradia potenza ed e' percio' in una situazione di equilibrio stabile. Diverso sarebbe il caso in cui l'atomo venisse perturbato, cosi' che $a_2(0) \neq 1$ a t = 0. Fisicamente questo significherebbe che, come risultato della perturbazione, esiste una probabilita' finita a_1 di trovare l'atomo sul livello 1 e quindi un momento di dipolo oscillante alla frequenza propria della transizione che produrrebbe l'irraggiamento nello spazio circostante e l'atomo tende a decadere al livello 1; questo implica una diminuzione di $a_2(t)$ con l'atomo che si allontana sempre piu' dalla condizione di equilibrio, ad indicare che tale equilibrio e' instabile.)

Il calcolo rigoroso di A può essere fatto utilizzando un elegante ragionamento dovuto ad Einstein. Supponiamo a tale scopo di introdurre il materiale entro una cavità le cui pareti siano mantenute ad una temperatura costante T. Una volta raggiunto l' equilibrio termodinamico, all' interno della cavità si stabilizza, per effetto della emissione di corpo nero, una densità di energia elettromagnetica la cui distribuzione spettrale ρ_{ω} è rappresentata dalla (1.14) e nella quale il materiale risulta completamente immerso. In tale materiale si produrranno quindi processi di emissione ed assorbimento stimolati accanto ai naturali processi di emissione spontanea. Essendo il sistema all' equilibrio termodinamico, il numero di transizioni dal livello 1 al livello 2 deve essere uguale al numero di transizioni dal livello 1. Pertanto se poniamo:

$$W_{21} = B_{21}\rho_{\omega_0} \tag{3.40}$$

$$W_{12} = B_{12}\rho_{\omega_0} \tag{3.41}$$

dove B_{21} e B_{12} sono coefficienti di proporzionalità, e se indichiamo con N_1 e N_2 rispettivamente le popolazioni dei livelli 1 e 2 all' equilibrio termodinamico, possiamo scrivere:

$$AN_2 + B_{21}\rho_{\omega_0}N_2 = B_{12}\rho_{\omega_0}N_1 \tag{3.42}$$

Dalla statistica di Boltzmann sappiamo che:

$$\frac{N_2^e}{N_1^e} = exp(-\hbar\omega_0/kT) \tag{3.43}$$

Dalle (3.42) e (3.43) segue quindi:

$$\rho_{\omega_0} = \frac{A}{B_{12} exp(\hbar\omega_0/kT) - B_{21}}$$
(3.44)

Confrontando la (3.44) con la (1.14) si ottengono le relazioni:

$$B_{12} = B_{21} = B \tag{3.45}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega_0^3\eta^3}{\pi^2c^3} \tag{3.46}$$

La (3.45) fa vedere che le densità di probabilità di assorbimento ed emissione stimolate da radiazione di corpo nero sono uguali fra loro. Questa relazione è dunque l'analoga di quella stabilita per tutt' altra via nel caso di radiazione monocromatica (3.32).

La (3.46) permette invece il calcolo di A una volta che sia noto B, cioè il coefficiente di emissione stimolata per radiazione di corpo nero. Esso può essere facilmente ottenuto dalla (3.31). A tale scopo cominciamo con l' esprimere la (3.31) in funzione della densità di energia ρ dell' onda E.M. incidente. Tenendo conto che $I = c\rho/\eta$ si ottiene:

$$W = \frac{\pi}{3\eta^2 \epsilon_0 \hbar^2} \mid \mu \mid^2 \rho \ g_t(\Delta \omega) \tag{3.47}$$

La (3.47) vale per una radiazione perfettamente monocromatica. Per una radiazione di corpo nero, indichiamo con $\rho_{\omega'}d\omega'$ la densità di energia per una radiazione di frequenza compresa fra $\omega' \in \omega' + d\omega'$. Assimilando tale radiazione ad un' onda monocromatica, la corrispondente probabilità elementare di transizione dW si ottiene dalla (3.47) sostituendovi $\rho_{\omega'}d\omega'$ al posto della ρ . Integrando tale equazione ed assimilando la $g_t(\Delta\omega)$ ad una δ di Dirac rispetto alla $\rho_{\omega'}$ si ottiene:

$$W = \frac{\pi}{3\eta^2 \epsilon_0 \hbar^2} \mid \mu \mid^2 \rho_{\omega 0} \tag{3.48}$$

3.3. EMISSIONE SPONTANEA

Confrontando la (3.48) con la (3.40) si ha:

$$B = \frac{\pi \mid \mu \mid^2}{3\eta^2 \epsilon_0 \hbar^2} \tag{3.49}$$

Dalle (3.46) e (3.49) si ottiene infine:

$$A = \frac{\eta \omega_0^3 |\mu|^2}{3\pi \hbar \epsilon_0 c^3}$$
(3.50)

Tale calcolo risulta corretto da un punto di vista della quantizzazione del campo, poichè per esso si è utilizzato soltanto un ragionamento termodinamico e la formula di Planck per ρ_{ω} , ottenuta appunto quantizzando il campo E.M. entro la cavità.

Indicando, poi, con τ_{sp} il tempo di decadimento spontaneo dell' energia dal livello 2 al livello 1, si può dimostrare che la densità di probabilità di transizione spontanea per atomo vale:

$$A = \frac{1}{\tau_{sp}} \tag{3.51}$$

Dalla (3.50) si può osservare che il coefficiente di emissione spontanea aumenta con il cubo della frequenza, per cui il processo di emissione spontanea aumenta rapidamente di importanza con la frequenza. Tale processo è infatti di solito trascurabile nei maser, cioè alle frequenza delle microonde, dove predominano fenomeni di rilassamento del reticolo, mentre è molto importante nei laser, cioè alle frequenze ottiche. Alle frequenze ottiche un ordine di grandezza di A può essere ottenuto ponendo $\lambda = 2\pi c/\omega = 5 \cdot 10^{-7} m$ e | μ |= ea con $a \simeq 10^{-10} m$ raggio atomico. Si ottiene in questo modo $A \simeq 10^8 \ sec^{-1}$.

(Per terminare la presente trattazione del processo di emissione spontanea, occorre osservare che gli approcci semiclassico e quantistico forniscono predizioni completamente diverse per il fenomeno e i dati sperimentali sono in pieno accordo con le previsioni della teoria quantistica del campo em. Volendo mantenere un ragionamento di tipo semiclassico per fare delle osservazioni conclusive, la perturbazione necessaria per produrre la transione spontanea dell' atomo viene introdotta in modo naturale dall' approccio quantistico. Infatti, come discusso alla fine del secondo capitolo, i valori quadratici medi dei campi elettrico e magnetico $\langle E \rangle$ e $\langle B \rangle$ di un dato modo di una cavita' sono non nulli anche nello stato fondamentale, per T =0, e sono le cosiddette fluttuazioni di campo di punto zero. Queste fluttuazioni possono essere considerate come la perturbazione che agisce sull' atomo e che lo porta nello stato di equilibrio instabile che, secondo la trattazione semiclassica, produce una probabilita' di transizione non nulla. Si puo' cioe' pensare che il processo di emissione spontanea sia generato dalle fluttuazioni di punto zero del campo em che comunque pervade lo spazio fisico.)

3.4 Decadimento non radiativo

Oltre che per emissione spontanea, un atomo può anche decadere dal livello 2 al livello 1 per decadimento non radiativo. In questo caso la differenza di energia $(E_2 - E_1)$ viene ceduta alle molecole circostanti sotto forma di energia termica. Nel caso dei gas, tale transizione avviene per effetto di collisioni inelastiche. Nel caso dei solidi, tale transizione avviene per interazione con le vibrazioni del reticolo cristallino (fononi).

Questo fenomeno può anch' esso essere descritto attraverso un tempo caratteristico chiamato *vita media non-radiativa* τ_{nr} che dipende dalla composizione e dalle caratteristiche del materiale circostante.

Per effetto simultaneo dell' emissione spontanea e del decadimento non-radiativo, la variazione nel tempo della popolazione N_2 del livello superiore può scriversi:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\left[\frac{N_2}{\tau_{sp}} + \frac{N_2}{\tau_{nr}}\right] \tag{3.52}$$

Tale relazione indica che si può definire un tempo τ tale che:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{sp}} + \frac{1}{\tau_{nr}} \tag{3.53}$$

che prende il nome di vita media del livello superiore. (Si puo' osservare che per la emissione spontanea il valore numerico di τ_{sp} dipende fondamentalmente solo dalla particolare transizione considerata; per il decadimento non radiativo, invece, τ_{nr} dipende non solo dalla transizione ma anche pesantemente dalle caratteristiche del mezzo circostante l' atomo, aspetto particolarmente importante nel caso di atomi legati in reticoli cristallini.)

3.5 Allargamento omogeneo e non omogeneo delle righe spettrali

Consideriamo ora la forma degli spettri di emissione (o righe di emissione) del sistema a due livelli in esame, ovvero la forma esplicita delle funzioni $g(\Delta \omega)$. Da notare che lo spettro di frequenza è lo stesso sia in emissione spontanea

che in emissione o assorbimento stimolati, dato che le cause di allargamento agiscono ugualmente nei vari processi.

Discutiamo brevemente le cause di allargamento delle righe di emissione. Un' importante distinzione che occorre introdurre è fra cause di allargamento *omogenee* e *inomogenee*. Una causa di allargamento si dirà omogenea quando allarga nello stesso modo la riga di ciascun atomo e quindi di tutto il sistema. Al contrario, una causa di allargamento sarà inomogenea quando distribuisce le frequenze di risonanza dei vari atomi del sistema su una certa banda e perciò allarga la riga totale del sistema senza allargare le righe dei singoli atomi.

Come già accennato in precedenza, una prima causa di allargamento omogeneo è detta allargamento per collisioni. In un gas essa è dovuta agli urti dell' atomo in esame con altri atomi, ioni, elettroni liberi o con le pareti del contenitore. In un solido essa è dovuta alle interazioni dell' atomo con il reticolo cristallino. Tali collisioni interrompono il processo di interazione coerente tra l'atomo e l'onda E.M. incidente, come indicato schematicamente dal salto di fase nella parte alta della figura 3.4, producendo una $g(\Delta \omega)$ di tipo Lorentziano con una larghezza a metà altezza legata al tempo medio tra collisioni successive: $\Delta \omega_0 = 2/\tau_c$. Durante il tempo di collisione $\Delta \tau_c$ la frequenza dell' onda E.M. come vista dall' atomo varia nel tempo come indicato a titolo di esempio nella parte bassa della figura 3.4. Quello che succede è che, mentre un atomo (o molecola) si avvicina ad un altro, esso è sottoposto ad una energia potenziale dapprima attrattiva e poi repulsiva; a causa di questa energia potenziale, le energie dei livelli 1 e 2 in esame subiranno uno spostamento $\Delta V_1(r) \in \Delta V_2(r)$ dove r è la distanza fra i due atomi. La corrispondente variazione di frequenza sarà data da:

$$\Delta\omega(t) = \frac{\Delta V_2(r) - \Delta V_1(r)}{\hbar}$$
(3.54)

dove $\Delta \omega$ risulta una funzione del tempo poichè la distanza r è funzione del tempo. Considerando, ad esempio, il caso del Ne, per una pressione di 0.5 torr, tipica di un laser a gas He - Ne, a temperatura ambiente, si ha $\tau_c \simeq 0.5 \cdot 10^{-6} s$ e la corrispondente larghezza della riga a metà altezza risulta $\Delta \nu_c \simeq 0.64 \ MHz$. τ_c è inversamente proporzionale alla pressione e $\Delta \nu_c$ risulta pertanto crescere proporzionalmente a p.

Una seconda causa di allargamento omogeneo è dovuta al fenomeno di emissione spontanea ed è chiamata allargamento naturale o intrinseco. In analogia con quanto visto nello studio della emissione da parte di un oscillatore elettrico smorzato, la presenza di un fattore di smorzamento del tipo $e^{-t/\tau_{sp}}$ nell' espressione dell' energia emessa dall' atomo durante la transizione spontanea, dovuto alla natura probabilistica del processo, implica che il



Figura 3.4:

suo sviluppo in integrale di Fourier copre un intervallo di frequenza la cui larghezza è dell' ordine di $1/\tau_{sp}$. Si può dimostrare che la $g(\Delta\omega)$ associata a tale fenomeno è anch' essa una curva Lorentziana con larghezza a metà altezza pari a $1/\tau_{sp}$. Essendo $\tau_{sp} \simeq 10^{-8} s$, si avrà $\Delta\nu_{sp} \simeq 20 \ MHz$, che non dipende dalla pressione.

3.5.1 Cause di allargamento inomogenee

Supponiamo che una causa di allargamento distribuisca le frequenze di risonanza degli atomi su una certa banda, centrata ad una certa frequenza ω_0 , e chiamiamo $g^*(\omega'_0 - \omega_0)$ la relativa densità di probabilità. $g^*(\omega'_0 - \omega_0) d\omega'_0$ rappresenta la probabilità che un atomo abbia frequenza di risonanza compresa tra ω_0 e $\omega_0 + d\omega'_0$. Il valore medio del coefficiente di emissione stimolata o di

3.5. ALLARGAMENTO OMOGENEO E NON OMOGENEO DELLE RIGHE SPETTRALI41

assorbimento può essere ottenuto dalla (3.30) e si ha:

$$W_{12} = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c\hbar^2} |\mu|^2 I \int_{-\infty}^{+\infty} g^*(\omega_0' - \omega_0)g(\omega - \omega_0')d\omega_0'$$
(3.55)

che tiene conto delle eventuale presenza di una causa di allargamento omogenea (g) e di una inomogenea (g^*) . Se l'allargamento della $g(\omega - \omega'_0)$ è molto più piccolo di quello della $g^*(\omega'_0 - \omega_0)$, la $g(\omega - \omega'_0)$ può essere ritenuta con buona approssimazione una δ di Dirac per cui:

$$W_{12} = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c\hbar^2} |\mu|^2 I g^*(\omega - \omega_0)$$
(3.56)

Questo caso è a volte chiamato caso inomogeneo puro.

Una prima causa di allargamento di questo tipo, tipica dei gas, è dovuta al movimento degli atomi ed è chiamata allargamento per effetto Doppler. Consideriamo il caso di un atomo in movimento investito da una radiazione E.M. di frequenza ω . Se chiamiano u la componente della velocità dell' atomo nella direzione di propagazione dell' onda, la frequenza di quest' ultima come vista dall' atomo vale (effetto Doppler):

$$\omega' = \omega \left[1 \pm \left(\frac{u}{c} \right) \right] \tag{3.57}$$

dove il segno + o - si applica a seconda che la direzione della velocità sia contraria o concorde con quella di propagazione dell' onda.

La (3.57) può essere interpretata in un modo diverso: agli effetti dell'interazione radiazione-atomo è come se l'atomo fosse in quiete ed avesse una frequenza di risonanza ω'_0 pari a:

$$\omega_0' = \frac{\omega_0}{\left[1 \pm \left(\frac{u}{c}\right)\right]} \tag{3.58}$$

dove ω_0 è la frequenza di transizione vera dell' atomo. Da questo punto di vista è chiaro che questo meccanismo di allargamento è del tipo non omogeneo.

Per calcolare la $g^*(\omega'_0 - \omega_0)$ bisogna tenere presente che la probabilità P(u) che un atomo di massa M in un gas a temperatura T abbia una componente di velocità compresa tra $u \in u + du$ è data dalla distribuzione di Maxwell:

$$P(u)du = \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{Mu^2}{2kT}} du$$
(3.59)

Poichè dalla (3.58) (si prende solo il segno - ricordando la definizione di P(u)) si ha:

$$u = \frac{c(\omega_0' - \omega_0)}{\omega_0'} \simeq \frac{c(\omega_0' - \omega_0)}{\omega_0}$$
(3.60)

dalle (3.59) e (3.60) si ottiene la distribuzione cercata imponendo che:

$$g^*(\omega_0' - \omega_0)d\omega_0' = P(u)du \tag{3.61}$$

Si ottiene perciò:

$$g^*(\omega_0' - \omega_0) = \frac{c}{\omega_0} \left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{Mc^2}{2kT} \frac{(\omega_0' - \omega_0)^2}{\omega_0^2}}$$
(3.62)

La forma di riga rappresentata dalla (3.62) è una Gaussiana centrata su $\omega = \omega_0$ e con deviazione standard $\sigma = \omega_0/c\sqrt{KT/M}$. Per la riga del Ne corrispondente alla lunghezza d' onda $\lambda = 0.6328 \ \mu m$, a temperatura ambiente, la larghezza di riga Doppler vale $\Delta \nu * = 1.2 \ GHz$.

Si vede, pertanto, che la larghezza Doppler è molto maggiore della larghezza naturale, la quale, a sua volta è molto maggiore di quella per collisioni in condizioni di gas rarefatto. Ciò, tuttavia, non è sempre vero, perchè l'allargamento per collisioni può superare quello per effetto Doppler per pressioni del gas sufficientemente elevate, come nel laser a CO_2 a pressione atmosferica.

Oltre che per effetto Doppler, un allargamento di riga di tipo gaussiano si ha in generale per ogni meccanismo che provochi una distribuzione casuale delle energie e quindi delle frequenze di transizione degli atomi in esame. Ad esempio, se il campo elettrico cristallino di un solido presenta delle disuniformità locali dovute a sollecitazioni esterne o ad imperfezioni e disomogeneità del reticolo cristallino, si producono delle variazioni locali nei valori dei livelli energetici degli atomi che lo compongono. Questo provoca a sua volta un allargamento della riga del materiale che si dimostra essere di tipo gaussiano.

In conclusione, si è visto che la funzione $g(\omega_0 - \omega)$ può essere essenzialmente o di tipo Lorentziano, ed è espressa da:

$$g(\omega_0 - \omega) = \frac{2}{\pi \Delta \omega_0} \frac{1}{1 + \left[\frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega_0/2}\right]^2}$$
(3.63)

o di tipo gaussiano, ed è data da:

$$g(\omega_0 - \omega) = \frac{2}{\Delta\omega_0} \left(\frac{ln2}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0/2}\right)^2 ln2}$$
(3.64)

Nella figura 3.5 è riportato l'andamento delle due curve normalizzato in modo che esse abbiano la stessa larghezza a metà altezza: si può notare come la gaussiana sia molto più appuntita della lorentziana, che presenta della code più pronunciate.



Figura 3.5: Confronto tra riga lorentziana e gaussiana.

In generale si vede che una riga Lorentziana è di tipo omogeneo, mentre una riga gaussiana è di tipo disomogeneo. Nei casi pratici l'allargamento è dovuto al concorso di più cause e risulta non essere mai perfettamente omogeneo o perfettamente inomogeneo: la riga totale è pertanto la convoluzione fra i vari processi in gioco. Si dimostra che la convoluzione di una riga Lorentziana con larghezza $\Delta \omega_1$ con un'altra riga Lorentziana con larghezza $\Delta \omega_2$ dà ancora una riga Lorentziana di larghezza $\Delta \omega = \Delta \omega_1 + \Delta \omega_2$. La convoluzione di una riga gaussiana con larghezza $\Delta \omega_1$ con un'altra riga gaussiana con larghezza $\Delta \omega_2$ è ancora una riga gaussiana di larghezza $\Delta \omega = \sqrt{\Delta \omega_1^2 + \Delta \omega_2^2}$. È pertanto sempre possibile ridursi alla convoluzione di una riga Lorentziana e di una riga gaussiana e tale integrale, noto come integrale di Voigt, è tabulato. A volte una sola delle cause è predominante: allora è possibile parlare di riga Lorentziana o riga gaussiana.

3.6 Saturazione

Consideriamo ora l'evoluzione temporale delle popolazioni di un sistema a due livelli in presenza di una radiazione E.M. monocromatica di intensità I e frequenza ω : si faccia riferimento alla figura 3.6. Supponiamo che la riga della transizione sia allargata soltanto da cause omogenee. Indichiamo con N_1 e N_2 le densità di popolazione rispettivamente dei livelli energetici inferiore 1 e superiore 2. Nell'ipotesi che il numero totale N degli atomi dei due livelli del sistema rimanga costante nel tempo, possiamo scrivere le due equazioni:

$$N_1 + N_2 = N (3.65)$$



Figura 3.6: Sistema a due livelli interagente con un' onda E.M. di intensità I.

$$\frac{dN_2}{dt} = -W(N_2 - N_1) - \frac{N_2}{\tau}$$
(3.66)

nelle due incognite N_1 e N_2 . La prima equazione discende immediatamente dall'ipotesi fatta, la seconda esprime la variazione di N_2 nell'unità di tempo come differenza tra il numero WN_1 di transizioni stimolate al secondo verso il livello superiore e il numero di transizioni spontanee $\frac{N_2}{\tau}$ e stimolate WN_2 al secondo verso il livello inferiore. τ è dato in generale dalla (3.53). Ponendo $\Delta N = N_1 - N_2$ e tenendo conto della (3.65), la (3.66) diventa:

$$\frac{1}{2}\frac{d\Delta N}{dt} = -\Delta N \left(\frac{1}{2\tau} + W\right) + \frac{1}{2\tau}N \tag{3.67}$$

In uno stato stazionario $\left(\frac{d\Delta N}{dt}=0\right)$, si ha:

$$\Delta N = \frac{N}{1 + 2W\tau} \tag{3.68}$$

La differenza di popolazione ΔN che si stabilisce tra i due livelli dipende da τ e da W, cioè dal tempo di decadimento del livello eccitato, che è una caratteristica intrinseca del materiale, e dall' intensità della radiazione incidente I. Al crescere di I, W cresce per cui la differenza di popolazione fra i due livelli diminuisce finchè al limite per $I \to \infty$ si ha $\Delta N \to 0$, cioè $N_1 = N_2 = N/2$: questo è il fenomeno di *saturazione*.

Per mantenere la differenza di popolazione ΔN , il materiale assorbe dalla radiazione incidente una potenza per unità di volume:

$$\frac{dP}{dV} = \hbar\omega W\Delta N = \hbar\omega \frac{NW}{1+2W\tau}$$
(3.69)

3.6. SATURAZIONE

che in condizioni di saturazione, $W\tau >> 1$, diventa:

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_s = \frac{\hbar\omega N}{2\tau} \tag{3.70}$$

Si vede perciò che la potenza che occorre fornire al sistema per mantenere in saturazione due suoi livelli, uguaglia, come ovvio, la potenza perduta per effetto del decadimento spontaneo del livello superiore.

Dalle (3.34), (3.35) e (3.37) è facile vedere che W può essere scritto come: $W = \sigma I/\hbar\omega$. Le (3.68) e (3.69) possono ora essere messe nella forma più intuitiva:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{1 + \frac{I}{I_s}} \tag{3.71}$$

$$\frac{\left(\frac{dP}{dV}\right)}{\left(\frac{dP}{dV}\right)_s} = \frac{\frac{I}{I_s}}{1 + \frac{I}{I_s}} \tag{3.72}$$

dove

$$I_s = \frac{\hbar\omega}{2\sigma\tau} \tag{3.73}$$

è un parametro che dipende dal materiale in esame e dal valore della frequenza ω dell' onda E.M. incidente. Il suo significato fisico è dato dalla (3.71): per $I = I_s$ si ha $\Delta N = N/2$. Per $\omega = \omega_0$, I_s è una quantità caratteristica della transizione in esame detta *intensità di saturazione*. Al variare dell' intensità



Figura 3.7: Andamento del coefficiente di assorbimento di una riga omogenea all' aumentare dell' intensità I.

 ${\cal I}$ della radiazione incidente la forma della riga di assorbimento del materiale si modifica.

Se la riga è omogenea, il coefficiente di assorbimento sarà dato dalla (3.36) dove $g_t(\Delta \omega) = g(\Delta \omega)$ e $N_1 - N_2 = \Delta N$ è dato dalla (3.71); si avrà pertanto:

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{I}{I_s}} \tag{3.74}$$

dove α_0 è il coefficiente di assorbimento in assenza dell' onda E.M. di frequenza ω , cioè per I = 0, $N_1 = N$ e $N_2 = 0$:

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{3\eta\epsilon_0 c\hbar} \mid \mu \mid^2 \ \omega \ N \ g(\Delta\omega) \tag{3.75}$$

Dalle (3.74) e (3.75) si vede dunque che, all' aumentare di I, il valore del coefficiente di assorbimento diminuisce (a causa del diminuire di ΔN), mentre la sua dipendenza da ω è sempre data dalla $g(\Delta \omega)$. All' aumentare dell' intensità I l' andamento di α sarà pertanto quello riportato in figura 3.7. Al limite, quando $I \to \infty$, $\alpha \to 0$ e il materiale diventa trasparente alla radiazione.



Figura 3.8: Andamento della riga $g_t(\omega - \omega_0)$ di una transizione allargata sia da cause omogenee che inomogenee. La $g_t(\omega - \omega_0)$ è ottenibile come inviluppo delle righe $g(\Delta \omega)$ dei singoli atomi.

Nel caso, invece, in cui la riga non sia omogenea il fenomeno è più complicato. Nel caso più generale in cui la riga sia allargata sia da cause inomogenee che da cause omogenee, la forma della riga sarà data dall' inviluppo dei contributi dei vari atomi, come indicato in figura 3.8. L' onda E.M. incidente, con frequenza ω , interagirà soltanto con quegli atomi la cui frequenza di risonanza sia negli intorni di ω e quindi solo questi atomi subiranno il fenomeno della saturazione quando la $I(\omega)$ diventi sufficientemente elevata. Il coefficiente di assorbimento varierà come indicato in figura 3.9.



Figura 3.9: Andamento del coefficiente di assorbimento di una riga inomogenea all' aumentare dell' intensità I.

Si vede che all' aumentare dell' intensità I viene a scavarsi un buco nella curva di assorbimento alla frequenza ω ; la larghezza di tale buco è pari alla larghezza di riga omogenea della transizione.