Capitolo 5

Risuonatori ottici passivi

Si intende per *risuonatore ottico passivo* una cavità a superfici riflettenti contenente nel suo interno un mezzo dielettrico omogeneo, isotropo e passivo. Ricordiamo che si definisce *modo* di un risuonatore una configurazione stazionaria di campo elettromagnetico che soddisfi le equazioni di Maxwell e le condizioni al contorno imposte dal risuonatore.

I risuonatori usati in campo ottico differiscono da quelli usati nel campo delle microonde per due aspetti fondamentali:

- si tratta in generale di risuonatori aperti, nei quali cioè non esiste una superficie laterale. L' uso di un risuonatore aperto per la realizzazione di una cavità laser è dettato da considerazioni di convenienza, quali, ad esempio, la facilità di accesso al materiale attivo sul quale, in alcuni casi (laser a coloranti), è necessario agire e, aspetto molto importante, il posizionamento del sistema che fornisce il pompaggio elettrico;

- le dimensioni del risuonatore sono, di solito, molto maggiori della lunghezza d' onda. Infatti, le lunghezze d' onda di interesse sono dell' ordine del μm o delle decine di μm e non risulta pensabile l' impiego di cavità con dimensioni simili.

La prima caratteristica fa sì che, per qualsiasi configurazione di campo del risuonatore, esistano delle perdite di potenza inevitabili, dovute all' assenza della superficie laterale. A rigore, quindi, la definizione di modo non è applicabile per i risuonatori ottici, per i quali non esistono delle vere configurazioni stazionarie di campo, quanto delle configurazioni per le quali le perdite (per diffrazione) dalla superficie laterale sono minime.

La seconda caratteristica fa sì che, come vedremo meglio in seguito per un caso semplice, le frequenze di risonanza dei modi siano addensate molto fittamente.

I risuonatori più usati per i laser sono:

- risuonatore a specchi piani e paralleli (risuonatore di Fabry–Perot)

  È costituito da due specchi piani e paralleli di sezione quadrata o circolare, affacciati ad una certa distanza d, che tipicamente può essere di alcune decine di centimetri, mentre le dimensioni degli specchi sono di qualche centimetro. In prima approssimazione i modi di questo risuonatore possono essere pensati come dovuti alla sovrapposizione di onde piane che si propagano avanti e indietro lungo l' asse, riflettendosi sugli specchi, come indicato schematicamente in figura 5.1. Le frequenze di

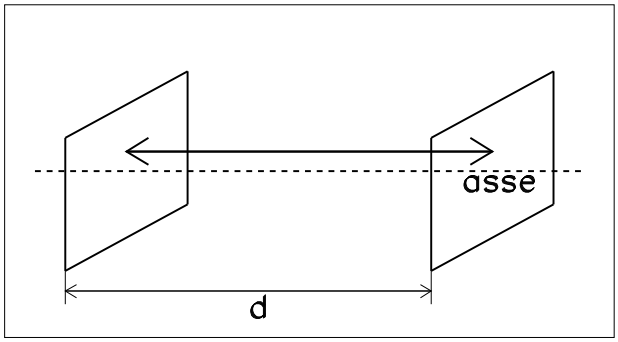


Figura 5.1: Risuonatore a specchi piani e paralleli.

tali modi possono essere ottenute imponendo semplicemente che la lunghezza d del risuonatore contenga un numero intero di semilunghezze d' onda, condizione necessaria affinchè ci possano essere due nodi di campo elettrico sui due specchi. Ne segue:

$$d = n\left(\frac{\lambda}{2}\right), \quad \nu = \frac{n}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}\left(\frac{c}{2d}\right) \tag{5.1}$$

dove n è un numero intero.

- risuonatore confocale

  È costituito da due specchi sferici con lo stesso raggio R e posti ad una distanza d tale che i fuochi F_1 e F_2 dei due specchi siano coincidenti. Ne segue che il centro di curvatura C di uno specchio giace sul secondo e quindi che $d = R$. In una descrizione a raggi, propria dell' ottica geometrica, si possono costruire dei cammini chiusi, come indicato in

figura 5.2. In questo caso, però, i modi e le frequenze di risonanza non sono immediatamente deducibili da considerazioni geometriche.

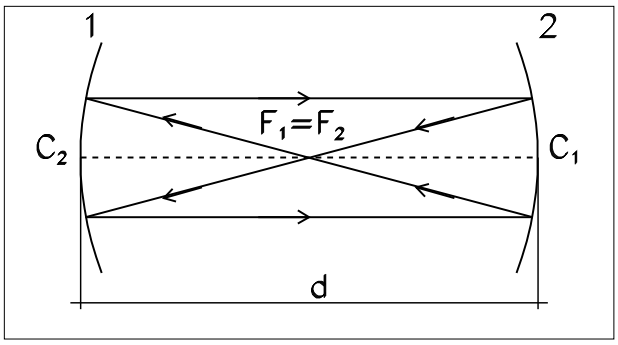


Figura 5.2: Risuonatore confocale.

- risuonatore concentrico

  È costituito da dua specchi sferici con lo stesso raggio R e posti ad una distanza d tale che i centri C degli specchi siano coincidenti. Ne segue $d = 2R$ (si veda la figura 5.3). La descrizione a raggi dei modi di questo

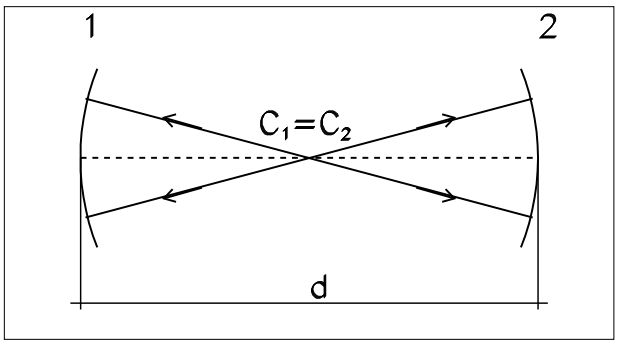


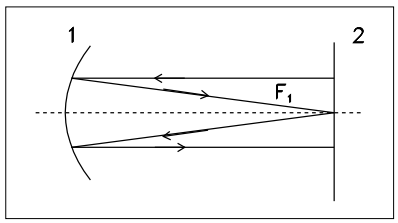
Figura 5.3: Risuonatore concentrico.

risuonatore è mostrata in figura. Anche in questo caso le frequanze di risonanza possono essere descritte approssimativamente dalla (5.1).

Sono anche usati risuonatori formati da due specchi sferici con lo stesso raggio R e posti ad una distanza d tale che $R < d < 2R$, cioè posti in una posizione intermerdia tra la concentrica e la confocale.

- risuonatore emifocale ed emiconcentrico

  Questi risuonatori sono ottenuti con uno specchio piano ed uno sferico: nell' emifocale il fuoco F dello specchio sferico giace su quello piano, nell' emiconcentrico il centro di curvatura si trova sullo specchio piano. Si veda la figura 5.4



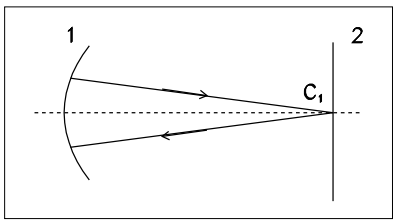


Figura 5.4: Risuonatore emifocale ed emiconcentrico.

- risuonatore ad anello

  Una classe particolarmente importante di risuonatori e' quella dei *risuonatori ad anello*, nei quali il cammino del raggio ottico segue una configurazione ad anello, come indicato in figura (5.5) a) o piu' complicata, come quella indicata in figura (5.5) b). In entrambi i casi le frequenze di risonanza possono essere ottenute imponendo la condizione che la variazione totale di fase lungo il cammino ad anello del caso a) o ad un giro completo nel caso b) sia pari ad un miltiplo intero di 2π; si ottiene cosi' per le frequenze di risonanza:

$$\nu = \frac{nc}{L_P}$$

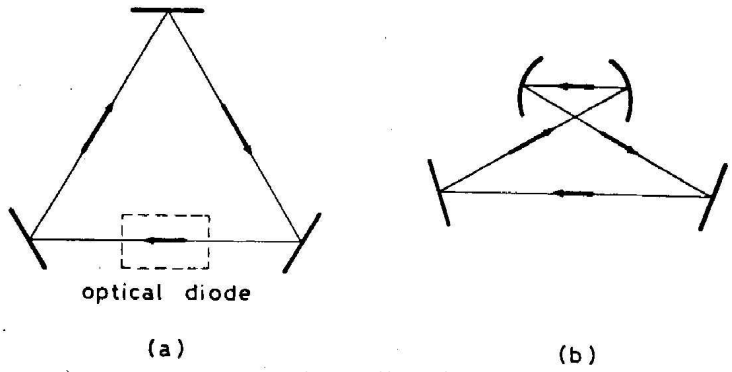


Figura 5.5: a) Risuonatore ad anello elementare, con tre specchi. b) risuonatore ad anello ripiegato.

dove L_P e' la lunghezza dell' anello o del cammino chiuso e n un intero. Si noti che il cammino del raggio luminoso entro tali cavita' puo' avvenire in ambo i sensi di percorrenza, a meno di utilizzare dei dispositivi che agiscono come diodi ottici fissando un verso solo. Con i risuonatori ad anello i concetti di modo di cavita' e frequenza di risonanza non sono piu' confinati a configurazioni di onde stazionarie.

Tutti questi tipi di risonatori possono essere considerati come casi particolari di un risonatore più generale costituito da due specchi sferici aventi diverso raggio di curvatura, posti ad una generica distanza d. Fra essi si possono distinguere i *risonatori stabili* e quelli *instabili*. Si chiama instabile un risonatore in cui un raggio generico si allontana progressivamente e illimitatamente dall' asse, in angolo o in distanza o in entrambi. Stabile si chiama un risonatore nel caso contrario.

5.1 Risuonatore di Fabry–Perot

Vogliamo ora ricavare i (quasi-)modi di un risuonatore a specchi piani e paralleli. Ricordiamo innanzitutto che le frequenze di risonanza di una cavità parallelepipeda, con lati $2a$, $2a$ e d, chiusa da pareti conduttrici, sono date da (si veda il paragrafo 6.5 degli Appunti del Corso di Complementi di Elettromagnetismo):

$$\nu_{l,m,n,} = \frac{c}{2}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}\left[\left(\frac{l}{2a}\right)^2 + \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.2}$$

dove l, m ed n sono degli interi che rappresentano il numero di semilunghezze d' onda contenute nel corrispondente lato del parallelepipedo.

Il primo studio dei modi di un risuonatore ottico a specchi piani e paralleli è dovuto a Schawlow e Townes, i quali trattano il problema in analogia con il caso della cavità chiusa da pareti conduttrici. L' ipotesi fondamentale di Schawlow e Townes è che i modi della cavità chiusa, nel caso particolare di $(l, m) << n$, costituiscano una buona approssimazione dei modi della cavità aperta, ottenuta rimuovendo la superficie laterale. Questa ipotesi può essere giustificata pensando che i modi possano essere ottenuti come somma di onde piane che si propagano lungo direzioni pochissimo inclinate rispetto all' asse della cavità (asse z). Ci si aspetta che su di essi la presenza o l' assenza delle superfici laterali abbia piccolo effetto. I modi con l ed m non molto piccoli rispetto ad n sono invece drasticamente influenzati dalla rimozione delle pareti laterali. Tali modi, per altro, una volta che la superficie laterale sia rimossa, hanno delle perdite laterali così elevate da non risultare di interesse.

Nell' ipotesi $(l, m) << n$ le frequenze di risonanza della cavità possono essere ottenute dalla (5.2) sviluppando in serie l' espressione sotto radice quadrata:

$$\nu_{l,m,n,} \simeq \frac{c}{2}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}\left[\frac{n}{d} + \frac{1}{2}\frac{l^2+m^2}{n}\frac{d}{4a^2}\right] \tag{5.3}$$

Ad ogni terna $l,\ m,\ n$ corrisponde una frequenza di risonanza ed una distribuzione dei campi ben precisa, cioè un ben determinato modo.

La differenza di frequenza fra due modi che abbiano gli stessi $l,\ m$ e per i quali n differisce di 1, cioè tra due *modi longitudinali* successivi, vale pertanto:

$$\Delta\nu_n = \frac{c}{2d}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \tag{5.4}$$

La differenza di frequenza fra due modi che abbiano gli stessi $n,\ l$ e per i quali m differisce di 1, cioè tra due *modi trasversali* successivi, vale

$$\Delta\nu_m = \frac{c}{4}\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}\frac{d[(m+1)^2 - m^2]}{4a^2 n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}\frac{cd}{8na^2}\left(m + \frac{1}{2}\right) \tag{5.5}$$

ovvero, per la (5.4):

$$\Delta\nu_m = \Delta\nu_n \frac{d^2}{4na^2}\left(m + \frac{1}{2}\right) \tag{5.6}$$

Analogamente, nel caso in cui sia l a variare di una unità, si avrà:

$$\Delta\nu_l = \Delta\nu_n \frac{d^2}{4na^2}\left(l + \frac{1}{2}\right) \tag{5.7}$$

Per le cavità laser più comunemente usate, $\frac{d^2}{4na^2} << 1$, e pertanto $\Delta\nu_l$, $\Delta\nu_m << \Delta\nu_n$. Per valori usuali di d, tenuto conto che $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \simeq 1$, si ha che $\Delta\nu_n$ è dell' ordine di 10^8 Hz e $\Delta\nu_l$, $\Delta\nu_m$ di 10^6 Hz. In figura 5.6 è riportato lo spettro delle frequenze dei modi a specchi piani e paralleli. Possiamo osservare che i modi trasversi relativi ad un dato n e corrispondenti a valori dei parametri l ed m tali che l^2+m^2=cost sono degeneri, ossia hanno la stessa frequenza, pur essendo distinti spazialmente.

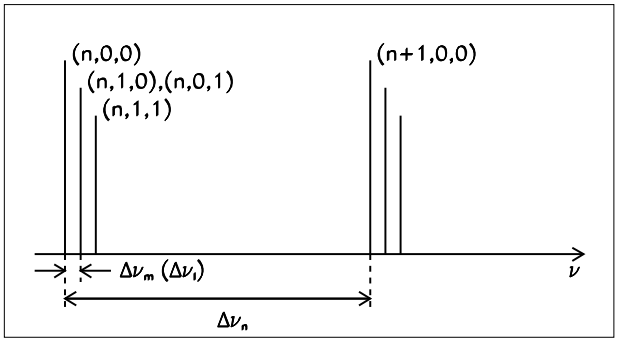


Figura 5.6: Frequenze di risonanza di un risuonatore a specchi piani.

Finora si sono trascurate le perdite e si è pertanto supposto che le risonanze fossero infinitamente strette in frequenza. Se si considerano, invece, le inevitabili perdite per diffrazione, si può vedere che la larghezza (FWHM) in frequenza di ogni modo è data da:

$$\Delta\omega_c = \frac{1}{\tau_c} \tag{5.8}$$

dove τ_c è il tempo caratteristico, cioè il tempo di decadimento del valore quadratico medio del campo elettrico, cioè dell' energia E.M. nella cavità, e vale:

$$\tau_c = \frac{d}{\gamma_d c} \tag{5.9}$$

dove γ_d sono le perdite per diffrazione per passaggio, in percento.

Nel caso più generale in cui vi siano anche altre perdite, per esempio per trasmissione agli specchi, la (5.9) è ancora valida pur di sostituirvi γ_d con γ, perdite totali per passaggio. Dalle (5.8), (5.9) e (5.4) si vede che, essendo $\gamma < 1$, si ha sempre $\Delta\omega_c < 2\pi\Delta\nu_n$, per cui due modi longitudinali successivi sono distinguibili in frequenza. Imponendo $\Delta\omega_c < 2\pi\Delta\nu_m$, dalle (5.8), (5.9)

e (5.6) si ricava $\gamma < \pi m/8N$, per cui assumendo m dell' ordine dell' unità e N dell' ordine di alcune decine, si vede che γ deve essere inferiore a qualche percento perchè due modi trasversi siano risolvibili in frequenza. L' ordine di grandezza di γ varia, a seconda del tipo di laser, da qualche percento a qualche decina di percento: ne segue che, di solito, i modi trasversi non sono risolvibili in frequenza, anche se risultano risolvibili sfruttando le proprietà di direzionalità.

Definiamo, infine, la *finezza di una cavita' ottica*. Tale proprieta' e' espressa dal rapporto tra la spaziatura dei modi longitudinali della cavita'

$$\Delta\nu = c/2Ln$$

con L lunghezza della cavita' (essa e' detta anche larghezza spettrale libera), e la larghezza FWHM delle sue risonanze, $\Delta\omega_c = 1/\tau_c = \gamma_d c/L$: $F = \Delta\nu/\Delta\omega_c = 1/(2n\gamma_c)$. E' completamente determinata dalle perdite della cavita' ed e' indipendente dalla lunghezza di questa. Se in assenza di un campo incidente una frazione ρ della potenza circolante sopravvive dopo un cammino completo (round trip), cioe' si perde una frazione $1-\rho$ ad ogni giro, la finezza e' data da:

$$F = \frac{\pi}{2arcsin\left(\frac{1-\sqrt{\rho}}{2\rho^{1/4}}\right)} \sim \frac{\pi}{1-\sqrt{\rho}} \sim \frac{2\pi}{1-\rho}$$

dove l' approssimazione vale nel caso di perdite piccole, ossia di elevata finezza.

La finezza e' legata al fattore Q della cavita': questo e', infatti, pari alla finezza moltiplicata per la frequenza di risonanza e divisa per la larghezza spettrale libera: $Q = F \cdot \nu_{l,m,n,}/\Delta\nu$.

5.2 Metodi di selezione del modo di operazione

Nella pratica risulta desiderabile che il laser oscilli su un solo modo. È abbastanza facile isolare un singolo modo trasversale, cioè forzare il laser ad oscillare su un modo con indici l ed m fissati. Per forzare il modo TEM_{00}, per esempio, è sufficiente introdurre nella cavità una apertura circolare di raggio a opportuno; questo fa sì che le perdite sui modi ad indice l ed m più elevati aumentino più di quelle sul modo fondamentale, forzando tali modi superiori a non oscillare.

Per selezionare anche un singolo modo longitudinale sul quale far operare la cavità laser, selezionando così una ben precisa lunghezza d' onda della

radiazione laser, possono essere utilizzati diversi dispositivi; essi sono basati sulla dispersione operata su una radiazione non monocromatica da parte di un prisma o di un reticolo di diffrazione, per i dispositivi meno raffinati, ovvero sull' interferenza nel caso dei dispositivi più precisi.

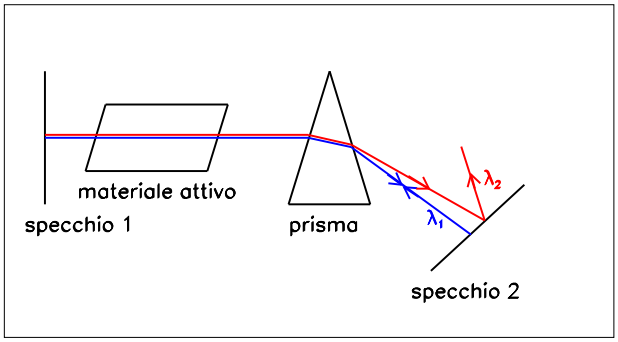


Figura 5.7: Metodo per selezionare un modo della cavità laser basato su di un prisma.

Nel primo caso, lo schema di principio è rappresentato in figura 5.7. La radiazione policromatica che esce dal materiale attivo viene dispersa nelle sue componenti monocromatiche dal prisma; lo specchio 2 è orientato in modo da riflettere su sè stesso solo il fascio di lunghezza d' onda voluta, che pertanto rientra nella cavità e viene amplificato, mentre i fasci di lunghezze d' onda diverse vengono riflessi al di fuori della cavità. Ruotando il prisma intorno ad un asse ortogonale al piano della figura è possibile poi variare il valore della λ_1 selezionata.

Nel secondo caso la dispersione viene prodotta da un reticolo di diffrazione posto davanti al secondo specchio, che riflette su sè stesso il raggio di lunghezza d' onda voluta, corrispondente ad uno dei massimi non centrali della figura di diffrazione, come indicato in figura 5.8.

Un altro metodo che permette di selezionare un singolo modo longitudinale e di ottenere anche potenze di uscita elevate, consiste nell' usare cavità risonanti formate da più di due specchi come ad esempio mostrato in figura 5.9. In questo caso i modi a più basse perdite saranno quelli per i quali il fascio 3 è nullo. Il fascio 3 è prodotto dall' interferenza del fascio OAU con il fascio OABACAU. Il fascio OAU subisce, a causa della riflessione, uno sfasamento di π mentre il fascio OABACAU si sfasa di $2k(d_1 + d_2)$. La differenza dei due sfasamenti è pertanto $[2k(d_1 + d_2) - \pi]$. Affinchè i due fasci si cancellino essi devono essere in opposizione di fase, il che richiede che

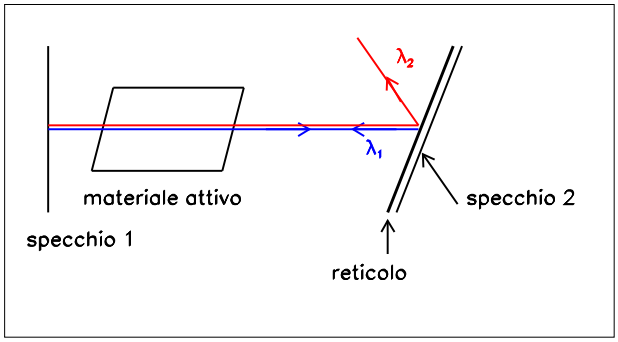


Figura 5.8: Metodo per selezionare un modo della cavità laser basato su di un reticolo di diffrazione.

$[2k(d_1 + d_2) - \pi] = (2n - 1)\pi$, con n numero intero. Essendo $k = 2\pi\nu/c$, le frequenze per cui le perdite sono minime sono date da $\nu = nc/2(d_1 + d_2)$ e la separazione tra due modi successivi a basse perdite vale $\Delta\nu = c/2(d_1 + d_2)$. Poichè $(d_1 + d_2)$ può essere molto piccolo, $\Delta\nu$ può essere reso molto grande in modo tale che un modo a bassa perdita cada al centro della riga di guadagno mentre il successivo cade fuori della riga di guadagno.

Più semplicemente, per isolare un singolo modo longitudinale si possono usare lunghezze di risonatore d così piccole per cui se un modo coincide con il centro della riga, il successivo risulti così spostato in frequenza da cadere praticamente fuori della riga di guadagno. Tale metodo può essere usato efficacemente solo con dei laser le cui larghezze di riga siano, al massimo, di qualche GHz: in questo caso bastano lunghezze di risonatore non superiori a qualche centimetro. Il volume del materiale attivo, però, risulta corrispondentemente ridotto, per cui le potenze di uscita non sono mai elevate.

5.3 Elementi di ottica matriciale

Consideriamo un raggio di luce che venga trasemsso o riflesso da un elemento ottico con comportamento reciproco ed indipendente dallo stato di polarizzazione, come una lente o uno specchio. Sia z l' asse ottico di tale elemento e si assuma che il raggio viaggi approssimativamente lungo l' asse z in un piano che contenga l' asse ottico. Il raggio vettore $\vec{r_1}$ sl piano di ingresso $z = z_1$ dell' elemento ottico puo' essere caratterizzato da due parametri, il suo spostamento radiale dall' asse z, $r(z_1)$ e il suo spostamento angolare, θ_1.

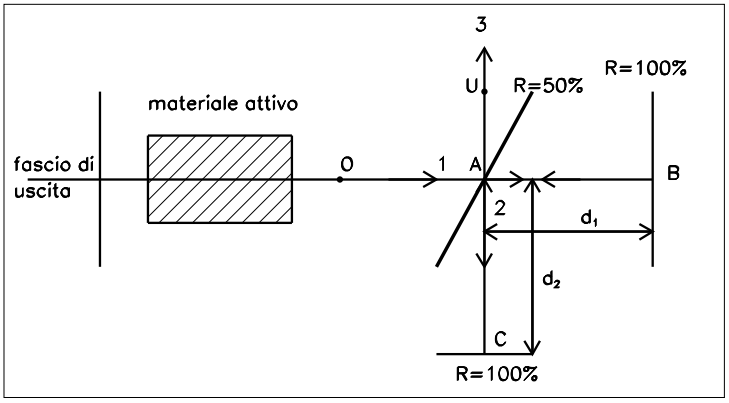


Figura 5.9: Metodo per selezionare un modo della cavità laser basato sull' interferenza.

Similmente, il raggio vettore $\vec{r_2}$ sul piano di uscita $z = z_2$ verra' caratterizato dai parametri $r(z_2)$ e θ_2, come indicato in figura (5.10). Si noti che l' asse r riportato in figura e' comune ai piani di ingresso e di uscita dell' elemento ottico. La convenzione sul segno degli angoli e' che l' angolo e' considera-

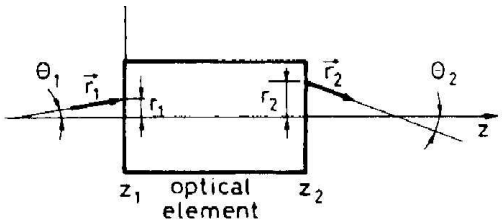


Figura 5.10: Formulazione matriciale per la propagazione di un raggio luminoso attraverso un generico elemento ottico.

to positivo se il raggio vettore deve essere ruotato in senso orario per farlo coincidere con la direzione positiva dell' asse z. Considerando di porsi in *approssimazione parassiale*, per cui $sin\theta \simeq tg\theta \simeq \theta$ le coordinate del punto di uscita, (r_2, θ_2), sono legate a quelle del punto di ingresso, (r_1, θ_1), da una trasformazione lineare. Ponendo $\theta_1 \simeq (dr_1/dz_1)_{z_1}$ e $\theta_2 \simeq (dr_2/dz_2)_{z_2}$, si puo' scrivere:

$$r_1 = Ar_0 + Br'_0 \qquad\qquad r'_1 = Cr_0 + Dr'_0 \tag{5.10}$$

dove A, B, C e D sono parametri caratteristici del sistema ottico. In formulazione matriciale si puo' scrivere:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1' \end{pmatrix} \tag{5.11}$$

dove la matrice ABCD caratterizza completamente l' elemento ottico dato in approssimazione di raggi parassiali.

Consideriamo, come primo esempio, la propagazione nello spazio libero di un raggio per una lunghezza $\Delta z = L$ di un materiale con indice di rifrazione n; se i piani di ingresso e uscita si trovano agli estremi del mezzo, in aria, dalla legge di Snell in approssimazione parassiale si ricava:

$$r_2 = r_1 + \frac{Lr_1'}{n} \qquad\qquad r_2' = r_1' \tag{5.12}$$

e la matrice corrispondente sara':

$$\begin{pmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

In figura (5.11) sono riportati gli schemi per il calcolo delle matrice ABCD in alcune semplici situazioni.

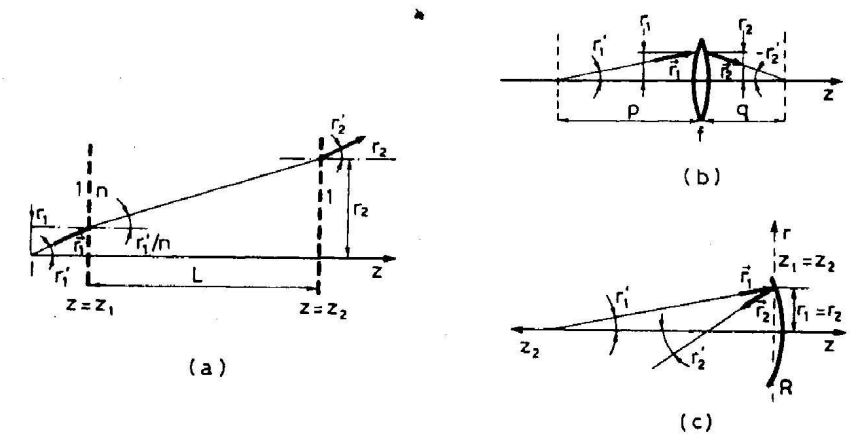


Figura 5.11: Calcolo della matrice ABCD per (a) propagazione nello spazio libero, (b) propagazione attraverso una lente sottile, (c) riflessione su uno specchio sferico.

Considerando, invece, la riflessione di un raggio luminoso da parte di uno specchio sferico con raggio dui curvatura R (R e' positivo per uno specchio concavo), i piani z_1 e z_2 risultano coincidenti e posti esattamente di fronte allo specchio e la direzione positiva dell' asse r e' la stessa per raggi

incidente e riflesso, come mostrato in figura (5.11). La direzione positiva dell' asse z e' presa da sinistra verso destra per il raggio vettore incidente e opposta per il raggio direttore riflesso. L' angolo per il raggio incidente e' positivo se il raggio vettore $\vec{r_1}$ deve essere ruotato in senso orario per farlo coincidere con la direzione positiva z_1, mentre l' angolo per il raggio riflesso e' positivo se il raggio vettore $\vec{r_2}$ deve essere ruotato in senso antiorario per farlo coincidere con la direzione positiva z_2 dell' asse z. Date queste convenzioni, la matrice ABCD di uno specchio concavo di raggio di curvatura R, e pertanto di focale $f = R/2$, puo' essere ottenuto considerando che $r_2 = r_1$ e che per lo specchio sferico vale la legge $1/p + 1/q = 1/f$, da cui $r_2' = -(1/f)r_1 + r_1'$; pertanto la matrice ABCD risulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} \tag{5.14}$$

La tabella (5.12) riporta le matrici ABCD per alcuni semplici elementi ottici. Si puo' osservare che il determinante della matrice ABCD e' unitario: $AD - BC = 1$, se i piani di ingresso e di uscita dell' elemento ottico giacciono in mezzi di uguale indice di rifrazione.

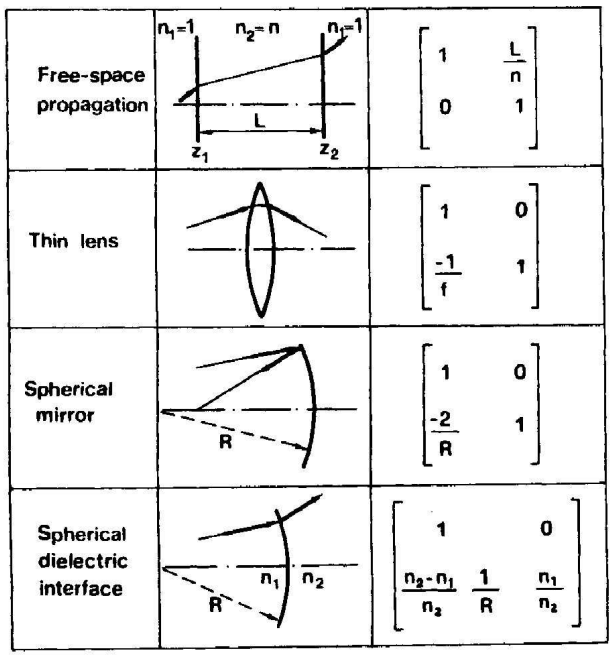


Figura 5.12: Matrici ABCD per casi comuni.

Una volta note le matrici degli elementi ottici elementari, si puo' ottenere la matrice di un sistema piu' complesso suddividendolo nelle sue componenti elementari. La matrice ABCD complessiva potra' essere ottenuta

moltiplicando le matrici dei singoli elementi considerate nell' ordine opposto a quello secondo il quale gli elementi ottici vengono attraversati dal raggio luminoso.

5.4 Condizione di stabilita'

Discutiamo ora sotto quali condizioni una cavita' ottica sia stabile. Consideriamo

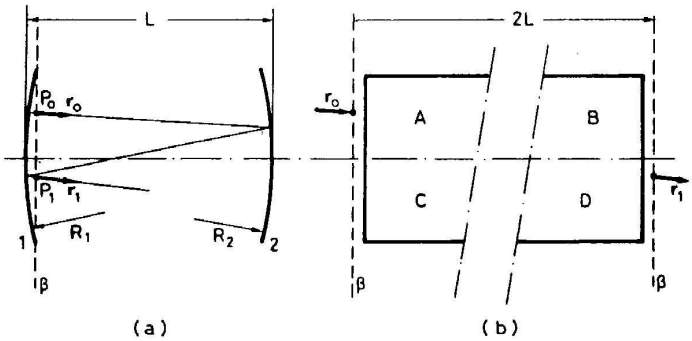


Figura 5.13: a)Analisi di stabilita' di un risuonatore a due specchi. b) Analisi di stabilita' di un generico risuonatore descritto dalla matrice ABCD.

dapprima un generico risuonatore a due specchi, come in figura (5.13) e un raggio luminoso che parta dal punto P_0 di un piano β all' inetrno del risuonatore posto, per esempio, direttamente di fronte allo specchio 1. Dopo esser stato riflesso dagli specchi 2 e 1 in successione, questo raggio intersechera' il piano β in qualche punto P_1. Indichiamo con r_0 e r_1 le distanze dei punti P_0 e P_1 dall' asse del risuonatore e con r'_0 e r'_1 gli angoli che i corrispondenti raggi formano con l' asse. In formulazione matriciale si puo' scrivere:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

dove la matrice ABCD e' la matrice di cammino chiuso (round trip) nella cavita'. Dopo un cammino chiuso, il raggio che parte dal punto $P_1(r_1, r'_1)$ intersechera' il piano β nel punto $P_2(r_2, r'_2)$ dato da:

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

Pertanto, dopo n cammini chiusi, il punto $P_n(r_n, r'_n)$ sara' dato da:

$$\begin{pmatrix} r_n \\ r'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} r_0 \\ r'_0 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Se il risuonatore deve essere stabile, occorre richiedere che, per ogni punto iniziale $P_0(r_0, r'_0)$, il punto $P_n(r_n, r'_n)$ non diverga al crescere di n. Questo significa che la matrice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n$$

non deve divergere al crescere di n.

Queste considerazioni possono essere estese facilmente ad un generico risuonatore la cui trasformazione delle coordinate del raggio dopo un cammino chiuso sia descritta da una generica matrice ABCD, per esempio, una cavita' a due specchi che contenga altri elementi ottici, come lenti. Anche in questo caso la richiesta per la stabilita' e' la non divergenza della matrice che rappresenta gli n cammini chiusi.

Poiche' nel caso considerato il raggio parte e arriva sullo stesso piano β l' indice di rifrazione e' lo stesso per entrambi i raggi in ingresso r_0 e in uscita r_1. Allora il determinante della matrice, AD - BC e' unitario. In base ad un teorema del calcolo matriciale (Sylvester), si puo' dimostrare che, definendo un angolo θ attraverso la relazione $cos\theta = (A + D)/2$ si ha:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n = \frac{1}{sin\theta} \begin{pmatrix} Asin\ n\theta - sin\ (n-1)\theta & Bsin\ n\theta \\ Csin\ n\theta & Dsin\ n\theta - sin\ (n-1)\theta \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Tale equazione mostra che la potenza n-esima della matrice non diverge se θ e' una quantita' reale. Infatti, se θ fosse complesso, $\theta = a + jb$ i termini proporzionali a, per esempio, $sin\ n\theta$ potrebbero essere scritti come:

$$sin\ n\theta = [exp(jn\theta) + exp(-jn\theta)]/2j = [exp(jna - nb) + exp(-jna + nb)]/2j$$

La quantita' $sin\ n\theta$ conterrebbe un termine che cresce indefinitamente con n e la n-esima potenza della matrice ABCD divergerebbe. Pertanto per avere un risuonatore stabile occorre chiedere che θ sia reale. Questo implica che:

$$-1 < \left(\frac{A+D}{2}\right) < 1 \quad (5.19)$$

Questa equazione stabilisce la condizione di stabilita' per il generico risuonatore della figura (5.13) b).

Nel caso del risuonatore a due specchi, secondo il calcolo dell' ottica matriciale, la matrice ABCD puo' essere scritta come:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

da cui:

$$\frac{A+D}{2} = 2\left[1 - \left(\frac{L}{R_1}\right)\right]\left[1 - \left(\frac{L}{R_2}\right)\right] - 1 \quad (5.21)$$

E' solito definire due quantita' adimensionali per la cavita', dette parametri g_1 e g_2, come $g_1 = 1 - \left(\frac{L}{R_1}\right)$ e $g_2 = 1 - \left(\frac{L}{R_2}\right)$. In termini di tali parametri la condizione di stabilita' diventa

$$0 < g_1 g_2 < 1$$

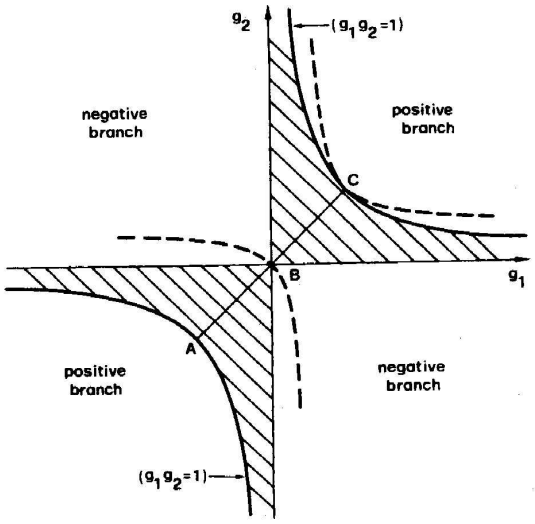


Figura 5.14: Diagramma di stabilita' per un generico risuonatore sferico.

Tale condizione puo' essere disegnata nel piano (g_1, g_2), come riportato nella figura (5.14). Per individuare le regioni di stabilita', su tale piano vengono riportati i rami di iperbole di equazione $g_1 g_2 = 1$; poiche' l' altra condizione limite e' $g_1 g_2 = 0$, ossia $g_1 = 0$ o $g_2 = 0$, le regioni stabili corrispondono alle zone tratteggiate nella figura. Una classe particolarmente interessante di risuonatori a due specchi e' descritta dai punti sulla linea retta AC che forma un angolo di $\pi/4$ con gli assi g_1 e g_2. Questa linea corrisponde a risuonatori con specchi con lo stesso raggio di curvatura (risuonatori simmetrici). I casi corrispondenti ai punti A, B e C in figura sono, rispettivamente, il risuonatore concentrico, confocale e piano.

Occorre notare che i risuonatori corrispondenti ai punti A, B e C, e piu' in generale quelli descritti dalle condizioni $g_1 g_2 = 0$ e $g_1 g_2 = 1$, giacciono sul confine tra zona stabile e zona instabile. Per tali risuonatori solo alcuni raggi particolari non divergono durante la propagazione, quelli perpendicolari al piano degli specchi. Per tale motivo questi risuonatori sono detti parzialmente stabili. Le condizioni $g_1 g_2 = 0$ o $g_1 g_2 = 1$ corrispondono, percio' ad una situazione marginalmente stabile.