Capitolo 6

Comportamento statico del laser

Svilupperemo ora una teoria sul comportamento statico del laser, basandoci sulle *equazioni di bilancio (rate equations)*; ci si servirà di quanto già visto nei capitoli precedenti e su semplici ragionamenti di bilancio fra numero di atomi che subiscono assorbimenti o emissioni e numero di fotoni, assorbiti o emessi.

6.1 Equazioni di bilancio

6.1.1 Laser a tre livelli

Consideriamo un laser a tre livelli che possegga una sola banda di pompaggio, come schematizzato in figura 6.1. La trattazione risulta invariata anche se si considerano altre bande di pompaggio, purchè il rilassamento dalle bande di pompaggio al livello laser 2 sia sempre molto rapido. Indichiamo con N_1, N_2 e N_3 il numero di atomi per unità di volume sui livelli 1, 2 e 3. Supponiamo che il laser stia oscillando su un solo modo ed indichiamo con q il numero totale di fotoni nella cavità nel modo considerato. Nell' ipotesi di rilassamento molto rapido dal livello 3 al livello 2 potremo supporre che $N_3 \simeq 0$, per cui possiamo scrivere le seguenti equazioni di bilancio:

$$N_1 + N_2 = N_t \tag{6.1}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \beta N_1 - Bq(N_2 - N_1) - \frac{N_2}{\tau} \tag{6.2}$$

$$\frac{dq}{dt} = V_a Bq(N_2 - N_1) - \frac{q}{\tau_c} \tag{6.3}$$

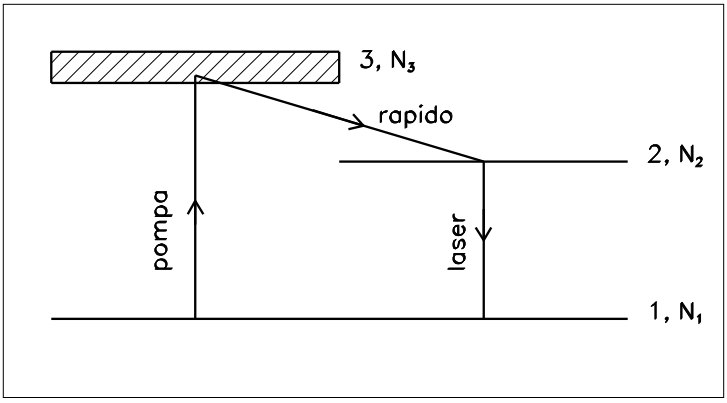

Figura 6.1: Schema di un laser a tre livelli.

Nella (6.1) N_t è il numero totale di atomi del materiale attivo per unità di volume, che ipotizziamo costante. Nella (6.2) βN_1 tiene conto del pompaggio: infatti, se il livello 3 è vuoto, il numero di atomi portati da 1 a 3 dal processo di pompa e che poi decadono sul livello 2 sarà proporzionale alla popolazione del livello 1. Nel caso del pompaggio elettrico β sarà una funzione della potenza elettrica impiegata. Il termine $-Bq(N_2 - N_1)$ tiene conto dell' emissione stimolata e dell' assorbimento, essendo B un coefficiente di emissione stimolata per fotone e per modo. La quantità τ è la vita media del livello superiore 2 ed è data in generale dalla (3.52). Nella (6.3) V_a è il volume del modo nel materiale attivo; per un laser a specchi sferici uguali e di raggio di curvatura molto maggiore delle dimensione del risonatore si ha:

$$V_a \simeq \frac{\pi w_0^2 l}{4} \tag{6.4}$$

dove w_0 è la dimensione dello spot del laser e l è la lunghezza del materiale attivo. τ_c indica la vita media dei fotoni nella cavità, che tiene conto della diminuzione dovuta alle perdite interne, alla diffrazione e all' assorbimento sugli specchi.

È opportuno fare due osservazioni. Il livello 3 può considerarsi vuoto se la sua popolazione decade verso il livello 2 con una velocità molto maggiore della velocità di pompaggio. Se chiamiamo τ_3 il tempo di decadimento (radiativo più non radiativo) del livello 3, la popolazione del livello 3 all' equilibrio è data da:

$$N_3 = \beta \tau_3 N_1 \tag{6.5}$$

Per poter trascurare N_3 occorre che $N_3 << (N_1, N_2)$. Inoltre, per un laser a tre livelli si ha $N_1 \simeq N_2 \simeq N/2$. Dalla (6.5) si ottiene allora:

$$\tau_3 << \frac{1}{\beta} \tag{6.6}$$

Come seconda osservazione, si deve sottolineare che nella (6.3) è stato trascurato un termine che tiene conto della emissione spontanea. Ne segue che se al tempo $t = 0$ poniamo $q = 0$ si ha $dq/dt = 0$ e quindi l' azione laser non parte. In effetti, come già detto in precedenza, l' azione laser parte per effetto dell' emissione spontanea. A causa dell' emissione spontanea il termine $V_a B q N_2$ nella (6.3) si modifica in $V_a B(q+1)N_2$: è come se ci fosse un fotone in più nel termine di emissione stimolata. Nel prosieguo, per semplicità, trascureremo questo termine, assumendo che al tempo $t = 0$ ci sia un numero comunque piccolo (al limite 1) di fotoni nella cavità a causa dell' emissione spontanea.

Dobbiamo ora calcolare delle espressioni esplicite per le quantità B e τ_c. Supponiamo a tal fine, di considerare un' onda di intensità I e di frequenza pari a quella del modo in esame, che si propaghi nella cavità. La variazione di intensità in un tratto dz di materiale attivo sarà, in base alle (3.34) e (3.37), $dI = \sigma(N_2 - N_1)Idz$ dove la sezione di assorbimento σ è calcolata alla frequenza in esame. Chiamando T_1 e T_2 i coefficienti di trasmissione dei due specchi, la variazione di intensità ΔI in un doppio transito nel risonatore vale:

$$\Delta I = I\{(1 - T_1)\ (1 - T_2)\ (1 - L_i)^2\ e^{2\sigma(N_2 - N_1)l} - 1\} \tag{6.7}$$

dove l è la lunghezza del materiale attivo e L_i sono le perdite interne per passaggio, dovute a scattering nel materiale attivo, assorbimento sugli specchi, perdite per diffrazione. Poniamo ora:

$$\gamma_1 = -ln(1 - T_1) \tag{6.8}$$

$$\gamma_2 = -ln(1 - T_2) \tag{6.9}$$

$$\gamma_i = -ln(1 - L_i) \tag{6.10}$$

dove γ_1 e γ_2 sono le perdite logaritmiche per passaggio dovute alla trasmissione degli specchi (*perdite per trasmissione*) e γ_i è la *perdita interna per passaggio*. Si noti che, per bassi valori di T ed L_i, $\gamma \simeq T, L_i$. Poniamo anche:

$$\gamma = \gamma_i + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = \gamma_i + \gamma_u \tag{6.11}$$

dove chiamiamo $\gamma_u = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ le perdite (medie) utili per trasmissione agli specchi. Sostituendo le (6.8–6.10) e la (6.11) nella (6.7), quest' ultima fornisce:

$$ln\left(\frac{\Delta I}{I} + 1\right) = -2\gamma + 2\sigma(N_2 - N_1)l \tag{6.12}$$

$$\frac{\Delta I}{I} + 1 = e^{2[\sigma(N_2 - N_1)l - \gamma]} \tag{6.13}$$

Nell' ipotesi (piccola differenza tra guadagno e perdite *laser non molto sopra soglia*):

$$\sigma(N_2 - N_1)l - \gamma << 1 \tag{6.14}$$

la (6.13), sviluppando in serie di potenze l' esponenziale, diventa:

$$\frac{\Delta I}{I} + 1 = 1 + 2[\sigma(N_2 - N_1)l - \gamma] \tag{6.15}$$

$$\Delta I = 2[\sigma(N_2 - N_1)l - \gamma]I \tag{6.16}$$

Dividendo ambo i membri della (6.16) per il tempo di un doppio transito $\Delta t = 2d/c$ ed approssimando $\Delta I/\Delta t$ con dI/dt si ha:

$$\frac{dI}{dt} = \left[\frac{\sigma lc}{d}(N_2 - N_1) - \frac{\gamma c}{d}\right] I \tag{6.17}$$

Poichè q è proporzionale ad I, confrontando la (6.17) con la (6.3) si ha:

$$B = \frac{\sigma lc}{V_a d} = \frac{\sigma c}{V} \tag{6.18}$$

$$\tau_c = \frac{d}{\gamma c} \tag{6.19}$$

dove V è il volume del modo nella cavità: $V \simeq \pi w_0^2 d/4$. In base alla (6.11) la (6.19) può scriversi come:

$$\frac{1}{\tau_c} = \frac{\gamma_i c}{d} + \frac{\gamma_u c}{d} = \frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_u} \tag{6.20}$$

Ponendo ora $N = N_2 - N_1$ le (6.1–6.3) possono essere ridotte ad un sistema di due equazioni nelle due incognite N e q:

$$\frac{dN}{dt} = \beta(N_t - N) - 2BqN - \frac{N_t + N}{\tau} \tag{6.21}$$

$$\frac{dq}{dt} = (V_a BN - \frac{1}{\tau_c})q \tag{6.22}$$

Queste equazioni, insieme con le espressioni esplicite di B e di τ_c (6.18–6.19), descrivono il comportamento statico di un laser a tre livelli.

6.1.2 Laser a quattro livelli

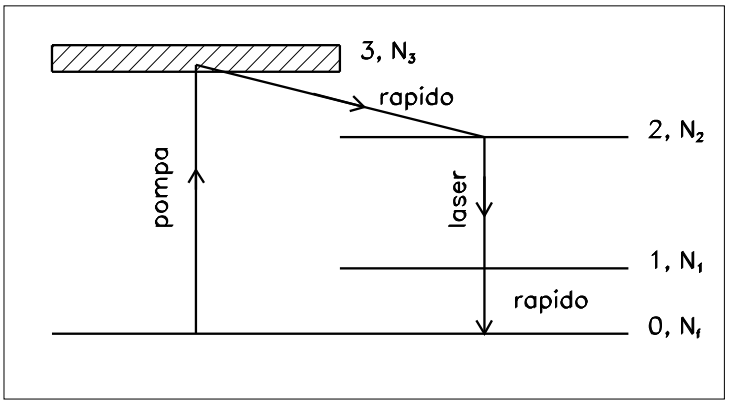

Figura 6.2: Schema di un laser a quattro livelli.

Riferiamoci alla figura 6.2, considerando una sola banda di pompaggio. Nella ipotesi che le transizioni $3 \to 2$ e $1 \to 0$ siano molto rapide potremo facilmente porre $N_3 \simeq N_1 \simeq 0$. Anche in questo caso le equazioni di bilancio si scrivono facilmente:

$$N_f + N_2 = N_t \tag{6.23}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \beta N_f - BqN_2 - \frac{N_2}{\tau} \tag{6.24}$$

$$\frac{dq}{dt} = \left(V_a B N_2 - \frac{1}{\tau_c}\right) q \tag{6.25}$$

dove N_f è la popolazione del livello fondamentale e gli altri simboli hanno lo stesso significato del caso a tre livelli. Ponendo ora $N = N_2 - N_1 \simeq N_2$ le (6.23–6.25) possono essere ridotte ad un sistema di due equazioni nelle due incognite N e q:

$$\frac{dN}{dt} = \beta(N_t - N) - BqN - \frac{N}{\tau} \tag{6.26}$$

$$\frac{dq}{dt} = (V_a BN - \frac{1}{\tau_c})q \tag{6.27}$$

Queste equazioni insieme con le espressioni esplicite di B e di τ_c (6.18–6.19) descrivono il comportamento statico di un laser a quattro livelli.

6.2 Comportamento statico del laser

6.2.1 Laser a tre livelli

Cominciamo a considerare la condizione di soglia per l' azione laser. Supponiamo che a $t = 0$ ci sia entro la cavità un numero piccolo di fotoni q^* dovuto all' emissione spontanea. Dalla (6.22) si vede che si avrà $dq/dt > 0$ se $V_a BN > 1/\tau_c$. Si vede dunque che la condizione di soglia si realizza quando l' inversione N raggiunge un valore critico N_c dato da:

$$N_c = \frac{1}{V_a B \tau_c} = \frac{\gamma}{\sigma l} \tag{6.28}$$

Il pompaggio critico di soglia β_c si ottiene dalla (6.21) ponendo $dN/dt = 0$, $N = N_c$ e $q = 0$. Si ottiene:

$$\beta_c = \frac{N_t + N_c}{(N_t - N_c)\tau} \tag{6.29}$$

È possibile vedere il significato fisico della (6.29) osservando che, in base alla (6.1) e alla definizione di N, si ha che le popolazioni a soglia dei livelli 2 e 1 sono $N_{2c} = (N_t + N_c)/2$ e $N_{1c} = (N_t - N_c)/2$; la (6.29) diventa allora $\beta_c N_{1c} = N_{2c}/\tau$, da cui si vede che β_c deve essere tale che il pompaggio compensi esattamente il decadimento spontaneo del livello 2.

Dalle (6.8–6.11) e (6.28) è interessante vedere che N_c soddisfa l' equazione:

$$(1 - T_1)\ (1 - T_2)\ (1 - L_i)^2\ e^{2\sigma N_c l} = 1 \tag{6.30}$$

Questa formula è facilmente comprensibile notando che $e^{2\sigma N_c l}$ rappresenta il guadagno in un doppio transito: la (6.30) dice che N_c deve essere tale che il guadagno compensi le perdite.

Se $\beta > \beta_c$, il numero di fotoni q crescerà a partire dalla emissione spontanea fino a stabilizzarsi ad un valore stazionario q_0. Tale valore ed il corrispondente valore N_0 di N si ottengono dalle (6.21) e (6.22) ponendo $dN/dt = dq/dt = 0$. Si ottiene:

$$N_0 = \frac{1}{V_a B \tau_c} = N_c \tag{6.31}$$

$$q_0 = \frac{V_a \tau_c}{2} \left[\beta(N_t - N_0) - \frac{N_t + N_0}{\tau} \right] \tag{6.32}$$

È interessante notare che $N_0 = N_c$, cioè che il valore dell' inversione all' equilibrio è sempre uguale al valore in soglia. Supponiamo di variare il pompaggio

a partire da β_c. Se $\beta = \beta_c$ si avrà $N = N_c$ e $q = 0$. Se ora aumentiamo il valore del pompaggio al di sopra del valore di soglia, la (6.31) fa vedere che l' inversione rimane agganciata al valore di soglia, per cui l' aumento di pompaggio serve ad aumentare q e dunque la potenza di uscita.

Per mezzo della (6.29) la (6.32) può essere scritta come:

$$q_0 = \frac{V_a(N_t + N_0)\tau_c}{2\tau}(x - 1) \tag{6.33}$$

dove $x = \beta/\beta_c$ rappresenta la quantità di cui il pompaggio supera il valore di soglia. Per ottenere la potenza di uscita basta notare che sostituendo la (6.20) nella (6.22), si vede subito che q/τ_u rappresenta il numero di fotoni persi per unità di tempo dalla cavità per effetto della trasmissione degli specchi. Pertanto la potenza di uscita vale:

$$P = \frac{\hbar\omega q}{\tau_u} \tag{6.34}$$

dove P è la somma delle potenze di uscita dai due specchi. La potenza di uscita da un solo specchio vale:

$$P_1 = \frac{P\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \tag{6.35}$$

All'equilibrio:

$$P = \frac{V_a(N_t + N_0)\hbar\omega}{2\tau}\left(\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)(x - 1) \tag{6.36}$$

Si deve notare che la potenza di uscita è proporzionale a $x - 1$ ed è indipendente dalla lunghezza d della cavità.

Osserviamo, infine, che la (6.6) può ora essere riscritta in forma fisicamente più significativa: usando le definizioni di x e β_c, essa diventa:

$$\tau_3 << \tau\frac{N_t - N_0}{x(N_t + N_0)} << \frac{\tau}{x} \tag{6.37}$$

dove nell' ultimo passaggio si è tenuto conto che di solito $N_0 << N_t$; se il laser sta oscillando $x > 1$ per cui si ottiene alla fine che deve essere

$$\tau_3 << \tau \tag{6.38}$$

Perchè dunque si possa trascurare la popolazione del livello 3 di pompaggio occorre che il tempo di decadimento di tale livello sia molto più breve di quello del livello laser superiore.

6.2.2 Il laser a rubino: dimensionamento del dispositivo

Come esempio particolarmente significativo di laser a tre livelli consideriamo il caso di un rubino funzionante in continua. Il rubino è costituito da un monocristallo di Al_2O_3 drogato con Cr. Il Cr^{3+} sostituisce lo Al^{3+} in alcuni punti del reticolo e rende il cristallo di color rosa o rosso a seconda della concentrazione dello ione Cr^{3+} nel reticolo. Il monocristallo di Al_2O_3 (zaffiro) è invece trasparente. I livelli energetici che si sfruttano sono quelli dello ione Cr^{3+} in questa matrice cristallina. Lo schema dei livelli energetici del rubino è riportato in figura 6.3. Il rubino possiede due bande principali di pompaggio

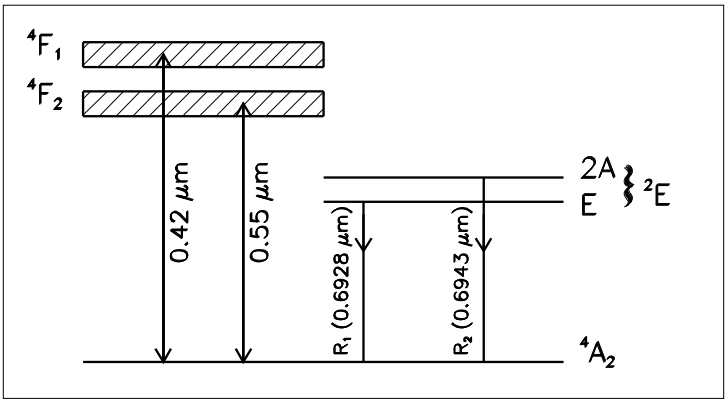

Figura 6.3: Schema dei livelli energetici del rubino.

($^4F_1$ e $^4F_2$) centrate alle lunghezze d' onda di 4200 $\mathring{A}$ (violetto) e 5500 $\mathring{A}$ (verde). L' azione laser può avvenire o come transizione $\overline{E} \rightarrow^4 A_2$ (riga R_1, $\lambda_1 = 0.6943\ \mu m$) oppure come $\overline{2A} \rightarrow^4 A_2$ (riga R_2, $\lambda_2 = 0.6928\ \mu m$). La separazione dei livelli $\overline{2A}$, $\overline{E}$ è 870 GHz. I due livelli sono connessi da un rilassamento molto rapido sicchè, anche durante l' azione laser, le relative popolazioni sono date dalla statistica di Boltzmann. Quindi:

$$\frac{n_2(\overline{2A})}{n_2(\overline{E})} = 0.87 \tag{6.39}$$

a $T = 300\ K$. Pertanto di solito solo la riga R_1 tende ad oscillare; è possibile ottenere oscillazione sulla riga R_2, ad esempio, usando specchi di riflettività alla riga R_2 molto superiore di quella della riga R_1. La vita media dei livelli

$\overline{2A}$, $\overline{E}$ è circa uguale e pari a $\tau = 3 \cdot 10^{-3}$ s alla temperatura di $T = 300$ K; essa aumenta al diminuire di T. La riga R_1 è, con buona approssimazione, Lorentziana, con FWHM $\Delta\nu_0 \simeq 330$ GHz. La larghezza della riga dipende fortemente dalla temperatura (essa aumenta di un fattore circa 4 quando la temperatura passa da 100 K a 300 K) ed è dovuta prevalentemente all' interazione degli ioni Cr^{3+} con le vibrazioni reticolari: tale causa può quindi essere inclusa tra quelle per collisioni discusse in precedenza. Si capisce allora perchè la riga si restringa al decrescere della temperatura, mentre l' allargamento residuo è dovuto a cause inomogenee (inomogeneità del campo elettrico del cristallo per i vari ioni di Cr). Il decadimento dalle bande di pompaggio al livello laser avviene in un tempo abbastanza rapido ($\tau_3 = 10^{-7}$ s), per cui in base alla (6.38), risulta lecito supporre che le bande di pompaggio siano approssimativamente vuote.

Per completezza, va osservato che i livelli interessati all' azione laser sono degeneri (il livello inferiore $^4A_2$ è quattro volte degenere, i livelli superiori $\overline{2A}$, $\overline{E}$ sono ciascuno due volte degenere), ma le relazioni (6.1–6.3) risultano essere (formalmente) ancora valide poichè è possibile considerare i due livelli superiori come un unico livello quattro volte degenere e così i due livelli laser superiore ed inferiore risultano avere lo stesso numero di degenerazione; in questo caso τ risulta assumere il significato di vita media della popolazione N_2 totale, cioè di ciascuno dei due livelli superiori.

Procediamo ora al dimensionamento di un laser a rubino operante in continua. Facciamo riferimento alla figura 6.4. Non specifichiamo la lun-

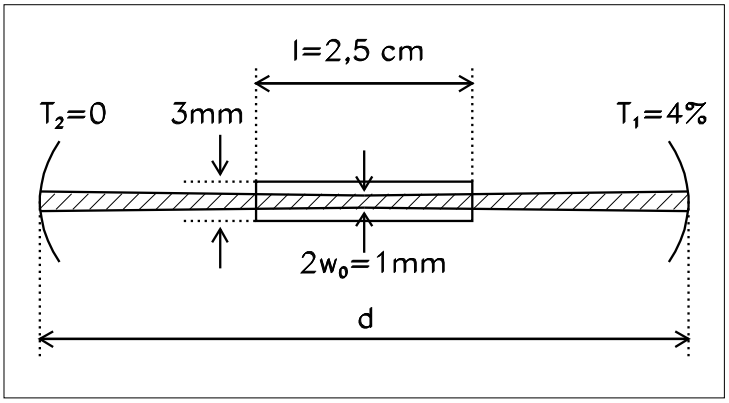

Figura 6.4: Esempio di un laser a rubino in continua.

ghezza d del risonatore perchè non risulta necessario e supporremo che la curvatura degli specchi sia tale che la dimensione del fascio luminoso al centro della cavità sia $w_0 = 0.5\ mm$. Per il calcolo delle perdite interne per passaggio L_i occorre tenere presente che:

1. le perdite per scattering in un rubino della lunghezza indicata in figura possono essere dell' ordine del 5% per passaggio;
2. le perdite per assorbimento sugli specchi sono molto piccole ($< 0.5\%$);
3. le perdite per diffrazione possono essere valutate in $\gamma_d < 10^{-5}$ e quindi trascurabili.

Supporremo, pertanto, $L_i \simeq 5 \cdot 10^{-2}$ e supporremo anche che la perdita per trasmissione sullo specchio 2 sia trascurabile: $T_2 = 0$. Assumeremo, inoltre una concentrazione di 0.05% di ioni Cr^{3+} nel cristallo ospitante (rubino rosa) per cui $N_t = 1.6 \cdot 10^{19}$ ioni Cr^{3+}/cm^3. Assumeremo, infine, che il laser oscilli sul picco della riga R_1 per cui si ha $\sigma = 2.5 \cdot 10^{-20}\ cm^2$.

Riassumendo si hanno i valori:

$\gamma_i = -ln(1 - L_i) = 4.9 \cdot 10^{-2}$	$\gamma_1 = -ln(1 - T_1) = 3.9 \cdot 10^{-2}$
$\gamma_2 = -ln(1 - T_2) = 0$	$\gamma_u = (\gamma_1 + \gamma_2)/2 \simeq 2 \cdot 10^{-2}$
$\gamma = \gamma_i + \gamma_u = 6.9 \cdot 10^{-2}$	l = 2.5 cm
$\sigma = 2.5 \cdot 10^{-20}\ cm^2$	$\tau = 3 \cdot 10^{-3}\ s$
$V_a = \pi w_0^2 l/4 \simeq 0.5 \cdot 10^{-2}\ cm^3$	$\hbar\omega = 2.8 \cdot 10^{-19}\ J$
$N_t = 1.6 \cdot 10^{19}$ ioni Cr^{3+}/cm^3	($\lambda = 0.6943\ \mu m$)

Dalla (6.28) si ha allora:

$$N_c = 1.1 \cdot 10^{18}\ ioni\ Cr^{3+}/cm^3 \tag{6.40}$$

e quindi $N_c/N_t \simeq 6.9 \cdot 10^{-2}$ il che dimostra che l' inversione necessaria per avere azione laser è una frazione molto piccola degli atomi totali. Dalla (6.29) si ha perciò:

$$\beta_c = \frac{1}{\tau} = 330\ s^{-1} \tag{6.41}$$

e dalle (6.35) e (6.36)

$$P_1 = 1.1\ (x - 1)\ W \tag{6.42}$$

Altre caratteristiche del laser a rubino verranno discusse nel capitolo successivo.

6.2.3 Laser a quattro livelli

Useremo ora le (6.26) e (6.27). L' inversione critica vale quindi, ponendo $q = 0$ nella (6.27) e usando la (6.18):

$$N_c = \frac{1}{BV_a\tau_c} = \frac{\gamma}{\sigma l} \tag{6.43}$$

e il pompaggio critico in soglia, ponendo $\frac{dN}{dt} = q = 0$ e $N = N_c$ nella (6.26):

$$\beta_c = \frac{N_c}{(N_t - N_c)\tau} \tag{6.44}$$

Si noti che l' espressione dell' inversione critica è la stessa di quella per un laser a tre livelli. Poichè, come vedremo, $N_c << N_t$ la (6.44) è approssimabile con $\beta_c \simeq N_c/(N_t\tau)$, mentre per un laser a tre livelli si aveva $\beta_c \simeq 1/\tau$. Si vede dunque che la soglia di un laser a quattro livelli è (N_c/N_t) volte più bassa di quella di un laser a tre livelli, a pari valore di τ.

Il numero di fotoni a regime nella cavità è ottenibile dalla (6.26) ponendo $\frac{dN}{dt} = 0$ e $N = N_0 = N_c$. Si ottiene:

$$q_0 = V_a\tau_c\left[\beta(N_t - N_0) - \frac{N_0}{\tau}\right] = (V_aN_0)\frac{\tau_c}{\tau}(x-1) \tag{6.45}$$

dove $x = \beta/\beta_c$. La potenza di uscita dai due specchi, per $q = q_0$ risulta:

$$P = \left[\frac{V_aN_0\hbar\omega}{\tau}\right]\left(\frac{\gamma_u}{\gamma}\right)(x-1) = \left(\frac{V_a\hbar\omega}{\sigma l\tau}\gamma_u\right)(x-1) \tag{6.46}$$

La potenza di uscita dallo specchio 1 vale:

$$P_1 = \frac{P\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \tag{6.47}$$

È istruttivo ora vedere sotto quali condizioni valga l' ipotesi $N_3 \simeq N_1 \simeq 0$, ovvero che cosa comporti chiedere che $(N_3, N_1) << N_2$. Incominciamo col vedere che cosa implichi la condizione $N_3 << N_2$. Se chiamiamo τ_3 il tempo di decadimento (radiativo + non radiativo) del livello 3, si ha ovviamente $N_3 = \beta\tau_3N_f = \beta\tau_3(N_t - N_2)$, dove N_f è la popolazione del livello fondamentale. Ponendo ora $\beta = x\beta_c = xN_c/(N_t - N_c)\tau$ e $N_c = N_2$ si ottiene che affinchè sia $N_3 << N_2$ deve essere $\tau_3 << \tau/x$. Ciò implica come condizione necessaria (per $x > 1$) la stessa condizione (6.38) valida per un laser a tre livelli. Vediamo ora che cosa implichi la condizione $N_1 << N_2$. A tale scopo cominciamo con lo scrivere l' equazione di bilancio per il livello 1:

$$\frac{dN_1}{dt} = Bq(N_2 - N_1) + \frac{N_2}{\tau} - \frac{N_1}{\tau_1} \tag{6.48}$$

dove si è indicato con τ_1 il tempo di decadimento del livello 1. All' equilibrio ($\frac{dN_1}{dt} = 0,\ q = q_0$):

$$N_1 = \frac{N_2(Bq_0 + 1/\tau)}{(Bq_0 + 1/\tau_1)} = \frac{N_2(x\tau_1/\tau)}{1 + (x-1)(\tau_1/\tau)} \tag{6.49}$$

dove si è usata la relazione $Bq_0 = (x-1)/\tau$, facilmente ottenibile dalle (6.43) e (6.45). Imponendo la condizione $N_1 << N_2$, dalla (6.49) si ottiene, indipendentemente dal valore di x:

$$\tau_1 << \tau \tag{6.50}$$

Perchè $N_1 << N_2$ il tempo di decadimento del livello 1 deve dunque essere molto più rapido di quello del livello 2. Si noti infine che la condizione per avere azione laser (cioè $N_1 < N_2$) implica dalla (6.49), ponendo $q_0 = 0$ che

$$\tau_1 < \tau \tag{6.51}$$

Se quindi tale condizione non è soddisfatta il materiale in esame non può fornire azione laser in regime continuo.

6.2.4 Il laser YAG: dimensionamento del dispositivo

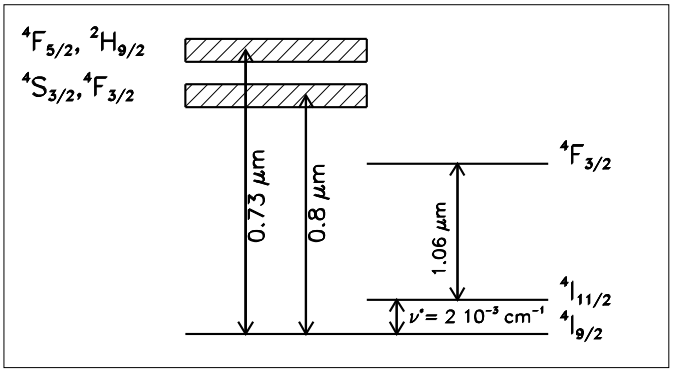

Figura 6.5: Schema semplificato dei livelli energetici del Nd^{3+} in YAG.

Come esempio particolarmente significativo di laser a quattro livelli considereremo il caso di un laser a Nd^{3+} in $Y_3Al_2O_{15}$ (Yttrium Aluminum Garnet) in continua. Lo ione Nd^{3+} sostituisce lo ione Y^{3+} in alcuni punti del reticolo. Uno schema semplificato dei livelli energetici del Nd^{3+} in tale

matrice cristallina è indicato in figura 6.5. La transizione laser ($^4F_{3/2} \rightarrow^4 I_{11/2}$) corrisponde ad una lunghezza d' onda $\lambda = 1.06\ \mu m$ (infrarosso). La transizione ($^4I_{11/2} \rightarrow^4 I_{9/2}$) corrisponde ad una frequenza $\nu^* \simeq 6 \cdot 10^{13}\ Hz$ per cui $h\nu^* >> kT$ anche a temperatura ambiente. Perciò il livello $4I_{11/2}$ risulta spopolato all' equilibrio termodinamico e quindi il laser Nd^{3+} in YAG è un laser a quattro livelli. La riga laser è approssimativamente Lorentziana con larghezza $\Delta\nu_0 = 195\ GHz$ a 300 K. La vita media del livello superiore vale $\tau = 2.3 \cdot 10^{-4}\ s$.

Per il nostro calcolo ci riferiamo ad un laser di dimensioni indicate in figura 6.6; supporremo una concentrazione di $N_t = 2.5 \cdot 10^{20}$ ioni Nd^{3+}/cm^3

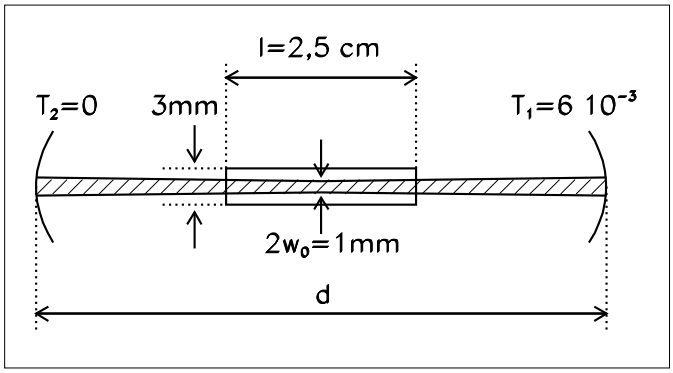

Figura 6.6: Esempio di un laser Nd^{3+} in YAG.

ed assumeremo delle perdite interne totali per passaggio $\gamma_i = 2 \cdot 10^{-2}$. Assumeremo una dimensione del fascio luminoso al centro della cavità $w_0 = 0.5\ mm$ e supporremo che l' azione laser avvenga al picco della transizione ($^4F_{3/2} \rightarrow^4 I_{11/2}$) per cui $\sigma = 8.8 \cdot 10^{-19}\ cm^2$.

Riassumendo:

$\gamma_i = -ln(1 - L_i) = 2 \cdot 10^{-2}$	$\gamma_1 = -ln(1 - T_1) = 6 \cdot 10^{-3}$
$\gamma_2 = -ln(1 - T_2) = 0$	$\gamma_u = (\gamma_1 + \gamma_2)/2 \simeq 3 \cdot 10^{-3}$
$\gamma = \gamma_i + \gamma_u = 2.3 \cdot 10^{-2}$	l = 2.5 cm
$\sigma = 8.8 \cdot 10^{-19}\ cm^2$	$\tau = 2.3 \cdot 10^{-4}\ s$
$V_a = \pi w_0^2 l/4 \simeq 0.5 \cdot 10^{-2}\ cm^3$	$\hbar\omega = 1.83 \cdot 10^{-19}\ J$
$N_t = 2.5 \cdot 10^{20}$ ioni Nd^{3+}/cm^3	($\lambda = 1.06\ \mu m$)

Dalla (6.43) si ha allora:

$$N_c \simeq 10^{16}\ ioni\ Nd^{3+}/cm^3 \tag{6.52}$$

per cui $(N_c/N_t) = 4 \cdot 10^{-5}$ e quindi, dalla (6.44):

$$\beta_c = 0.17\ Hz \tag{6.53}$$

La potenza di uscita è data dalle (6.46) e (6.47):

$$P_1 = P = 5\ (x-1)\ mW \tag{6.54}$$

Si noti che il massimo valore di β è $\beta_M = 20\ Hz$, per cui $x_M = 120$ e quindi $P_{1M} = 600\ mW$. Altre caratteristiche del laser a neodimio verranno discusse nel capitolo successivo.

6.2.5 Il laser He–Ne: dimensionamento del dispositivo

Come altro esempio di laser a quattro livelli consideriamo il laser $He - Ne$ oscillante alla lunghezza d' onda $\lambda = 1.15\ \mu m$. Uno schema semplificato dei livelli energetici del Ne (l'He serve solo per facilitare il pompaggio) è mostrato in figura 6.7. La transizione laser avviene tra un sottolivello del

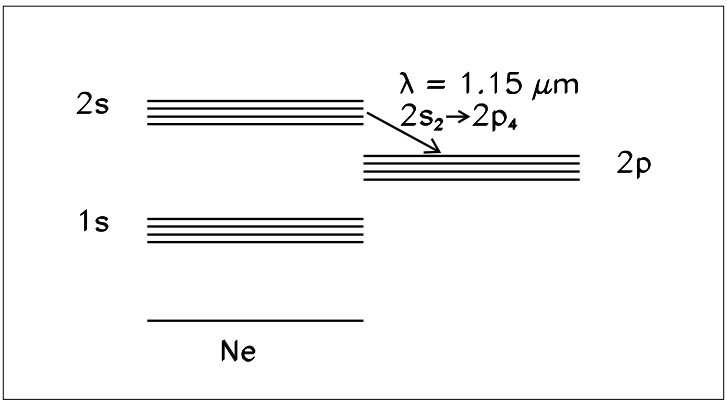

Figura 6.7: Schema semplificato dei livelli energetici del Ne.

gruppo $2s$ $(2s_2)$ ed un sottolivello del gruppo $2p$ $(2p_4)$. Il tempo di vita media del livello $2s_2$ vale $\tau \simeq 10^{-7}\ s$ e la larghezza della riga, dovuta ad effetto Doppler, è $\Delta\nu_0 = 9 \cdot 10^8\ Hz$. Ipotizzando che la transizione $2s_2 \rightarrow 2p_4$

avvenga solo radiativamente e che il decadimento spontaneo del livello $2s_2$ avvenga essenzialmente per transizione verso il livello $2p_4$, la vita media per emissione spontanea τ_{sp} nella transizione $2s_2 \rightarrow 2p_4$ può assumersi uguale alla vita media τ del livello $2s_2$ e ciò permette di valutare $\sigma = 5.4 \cdot 10^{-12}\ cm^2$. Supponendo di utilizzare una lunghezza di materiale attivo di $l = 1\ m$, di avere delle perdite interne trascurabili ($\gamma_i \simeq 0$) e delle perdite di uscita $\gamma_u = 10^{-2}$ ed, infine, di avere una dimensione del fascio luminoso al centro della cavità $w_0 = 0.5\ mm$, dalla (6.43) si ottiene:

$$N_c = 2 \cdot 10^7\ atomi/cm^3 \tag{6.55}$$

È interessante notare che tale valore di inversione critica è $5 \cdot 10^8$ volte più piccola di quella calcolata per il caso del Nd^{3+} in YAG. Ciò è dovuto essenzialmente al fatto che la sezione d' urto per il Ne è molto più grande che per il Nd^{3+}. Dalla (6.46) si ottiene poi

$$P \simeq 6\ (x-1)\ \mu W \tag{6.56}$$

Come si vede, a pari soprasoglia (x), le potenze ottenibili sono in questo caso molto più piccole. Tuttavia la potenza di soglia, essendo N_c molto piccolo, risulta anch' essa molto piccola, per cui con potenze di pompaggio comunemente raggiungibili, si ha $x >> 1$.

Siccome esistono molteplici processi di eccitazione si osserva che esiste un massimo di potenza estraibile per unità di lunghezza da un laser $He-Ne$. Nel caso dell' esempio visto questo massimo risulta di circa 1 mW, da cui, per la (6.46), segue che il valore di x corrispondente al massimo di β vale circa 160. Altre caratteristiche del laser a He–Ne verranno discusse nel capitolo successivo.

6.2.6 Accoppiamento ottimo

Dalle (6.36) e (6.46) si può vedere che per un dato pompaggio, cioè fissato β, ovvero x, esiste un valore di trasmissione degli specchi (cioè di γ_u) che massimizza la potenza di uscita. L' ottimo deriva fisicamente dal fatto che, all' aumentare di γ_u, aumenta la trasmissione verso l' esterno ma diminuisce l' oscillazione nella cavità. Per trovare la trasmissione ottima basta imporre la condizione $(dP/d\gamma_u) = 0$.

Nel caso di un laser a quattro livelli si ottiene:

$$P_{ott} = \left(\frac{V_a \hbar\omega}{\sigma l \tau}\gamma_i\right)\left[x_{min}^{1/2} - 1\right]^2 \tag{6.57}$$

dove $x_{min} = \beta\tau N\sigma l/\gamma_i$. Nel caso del laser a YAG considerato in precedenza, supponendo di pompare con la potenza massima, si avrebbe $x_{min} \simeq 120$, per cui $P_{ott} \simeq 3.5\ W$.

La riduzione di potenza di uscita che si ha non ponendosi nelle condizioni ottime è particolarmente rilevante vicino alla soglia (cioè per $x_{min} \sim 1$). Molto sopra soglia ($x_{min} >> 1$) la riduzione di potenza è meno di un fattore due poichè metà della potenza totale è già disponibile come potenza di uscita.

6.2.7 Limite di monocromaticità e fenomeno dell' attrazione di frequenza

Nei limiti della trattazione delle equazioni di bilancio non è possibile calcolare il valore della larghezza di riga della luce emessa. Non si riesce a sapere cioè quando sia monocromatica la radiazione in uscita. Le cause di questa larghezza di riga sono essenzialmente tre:

1. rumore (ossia numero di fotoni di frequenza di poco diversa da quella di risonanza) dovuto alla radiazione termica nella cavità;

2. rumore dovuto all' emissione spontanea (cioè alla fluttuazione di punto zero);

3. rumore dovuto a vibrazioni della cavità e a sue deformazioni termiche.

Alle frequenze ottiche ($10^{14}\ Hz$) la seconda causa di rumore è predominante rispetto alla prima. Infatti l' emissione spontanea è dovuta alla presenza di 1/2 fotone nella cavità, mentre la radiazione termica provoca un numero di fotoni medio $\overline{q}$ nel modo considerato che è molto inferiore a 1, come illustrato nella trattazione del corpo nero. La terza causa è ovviamente incalcolabile.

Se si considera solo la seconda causa si dimostra che la riga è approssimativamente Lorentziana con una larghezza:

$$\Delta\omega_{osc} = \frac{4\hbar\omega(\Delta\omega_c)^2}{P} \tag{6.58}$$

dove ω è la frequenza della luce di uscita, P la sua potenza, $\Delta\omega_c$ è la larghezza a metà altezza del modo in esame ed è data da $\Delta\omega_c = 1/\tau_c$, essendo τ_c il tempo di decadimento dei fotoni nella cavità, dato dalla (5.9).

Assumendo come esempio una perdita per passaggio $\gamma = 2 \cdot 10^{-2}$, una lunghezza $d = 1\ m$, $P = 1\ mW$ e $\hbar\omega = 2 \cdot 10^{-19}\ J$ (rosso), si ha $(\Delta\omega_c/2\pi) = 1/(2\pi\tau_c) \simeq 1\ MHz$ e quindi $(\Delta\omega_{osc}/2\pi) \simeq 5 \cdot 10^{-3}\ Hz$, cioè una larghezza spettrale $(\Delta\omega_{osc}/\omega_0) \simeq 10^{-17}$! In pratica quindi la terza causa sarà

dominante. Tuttavia, in particolari condizioni sono state misurate stabilità in frequenza di poche decine di Hz $(\Delta\omega_{osc}/\omega_0) \simeq 10^{-14}$; in condizioni più usuali e con laser stabilizzati si ottengono delle stabilità di frequenza e delle monocromaticità (per lunghi periodi) di $10^{-12} - 10^{-13}$.

Un altro interessante fenomeno che non è possibile spiegare nei limiti della trattazione delle equazioni di bilancio è la cosiddetta *attrazione di frequenza*. Essa avviene quando la frequenza del modo oscillante non coincide con la frequenza centrale della riga laser. Per illustrare questo fenomeno facciamo riferimento alla figura 6.8 dove sono indicate sia la riga laser che quella del modo (si noti che $(\Delta\omega_c/2\pi) \simeq 1\ MHz$ mentre $(\Delta\omega_0/2\pi)$ può andare da 1 GHz per i laser a gas fino a 300 GHz per i laser a stato solido).

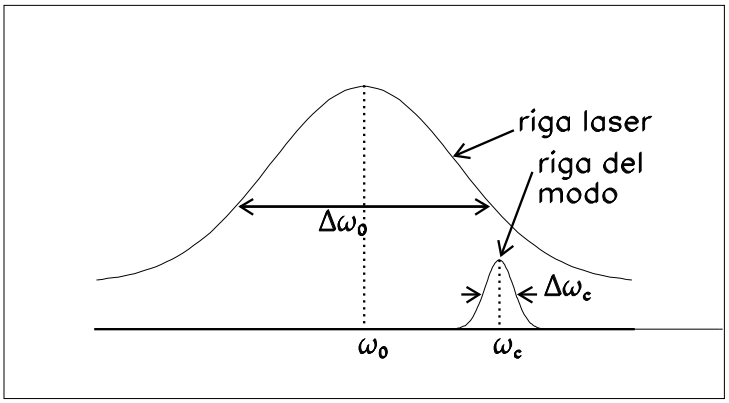

Figura 6.8: Schema per illustrare il fenomeno dell' attrazione di frequenza.

Si dimostra che, se $\omega_c \neq \omega_0$, l' oscillazione laser avviene ad una frequenza intermedia fra ω_0 e ω_c, cioè la riga laser "attira" verso il suo centro la frequenza di oscillazione. Al primo ordine per la riga inomogenea, e rigorosamente per riga omogenea, l' attrazione è lineare; la frequenza di oscillazione ω è cioè la media pesata delle due frequenze ω_0 e ω_c, i pesi essendo gli inversi delle rispettive larghezze di riga. Poichè, $\Delta\omega_0 >> \Delta\omega_c$ si ha $\omega \simeq \omega_c$ e quindi l' attrazione è molto piccola.

6.2.8 Laser a impulsi giganti: Q–switching

La tecnica del Q–switching permette la generazione di impulsi laser di corta durata ed elevata potenza di picco, in un regime che prende il nome di *regi-*

me di impulsi giganti. Il principio della tecnica è il seguente. Si supponga di introdurre un interruttore nella cavità laser, ad esempio uno schermo opaco che assorba la radiazione che si propaga all' interno e che possa essere opportunamente inserito e disinserito. Se l' interruttore è chiuso l' azione laser non può avvenire e l' inversione di popolazione può, pertanto, raggiungere valori molto alti.

Corrispondentemente il fattore Q della cavità avrà un valore basso e le perdite per passaggio γ saranno elevate.

Se l' interruttore viene aperto istantaneamente, grazie alla elevata inversione di popolazione, $N >> N_c$, il laser avrà un guadagno (amplificazione dei fotoni emessi per emissione spontanea) ampiamente maggiore delle perdite e l' energia immagazzinata durante l' inversione di popolazione verrà rilasciata sotto forma di un impulso luminoso molto corto (durata dell' ordine del ns) e molto intenso. Poichè questa tecnica comporta una variazione del fattore Q da un valore basso, quando l' azione laser è inibita, ad uno alto, quando viene emesso l' impulso, essa è nota con il nome di *metodo di variazione rapida del fattore di merito Q della cavità* o metodo di *Q–switching.* Il regime di operazione di un laser ad impulsi giganti è schematizzato nella figura 6.9.

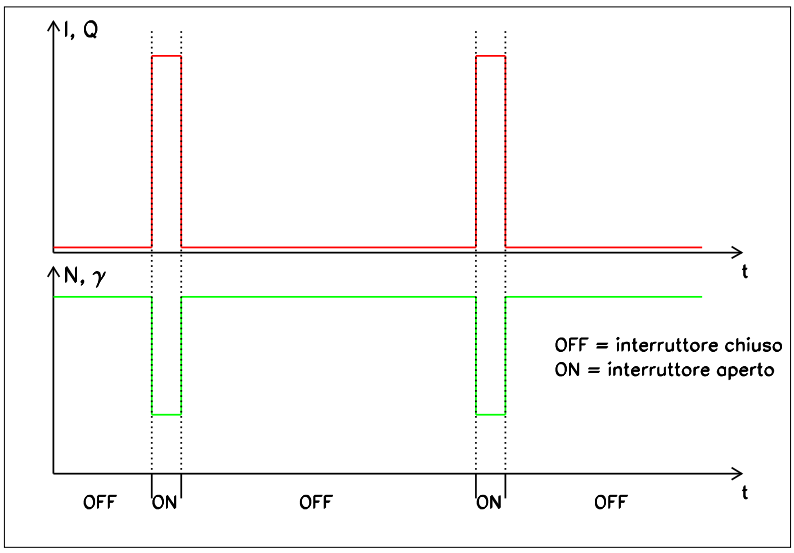

Figura 6.9: Schema temporale di operazione di un laser in regime di impulsi giganti: I = intensità luminosa in uscita, Q = fattore di merito della cavità N = inversione di popolazione, γ = perdita per passaggio.

Se la variazione del fattore Q, ovvero se l' apertura dell' interruttore avviene in un tempo breve rispetto al tempo di formazione dell' impulso laser (*fast switch*), l' uscita della cavità è data effettivamente da un singolo impulso luminoso gigante. Nel caso, invece, in cui tale variazione sia lenta, in luogo di un singolo impulso si possono avere molti impulsi luminosi. Infatti, l' energia immagazzinata nel mezzo prima della variazione viene rilasciata in una serie di passi, ad ognuno dei quali corrisponde l' emissione di un impulso. Ogni impulso abbassa il guadagno, ossia il valore di dq/dt, al di sotto della soglia istantanea, ovvero porta l' inversione di popolazione al di sotto del valore critico istantaneo, $N < N_c$, inibendo così ulteriori oscillazioni finchè la variazione del fattore Q fa diminuire di nuovo le perdite della cavità laser, γ (cfr. (6.28)), e pertanto diminuisce la soglia N_c, permettendo l' emissione di un altro impulso.

Da un punto di vista pratico i sistemi più usati sono i seguenti:

1. *Metodo dello specchio rotante.* Uno dei due specchi che costituiscono il risonatore laser viene fatto ruotare attorno ad un asse perpendicolare all' asse del risuonatore ad una velocità molto elevata ($\sim$ 50000 giri/minuto), come indicato in figura 6.10.

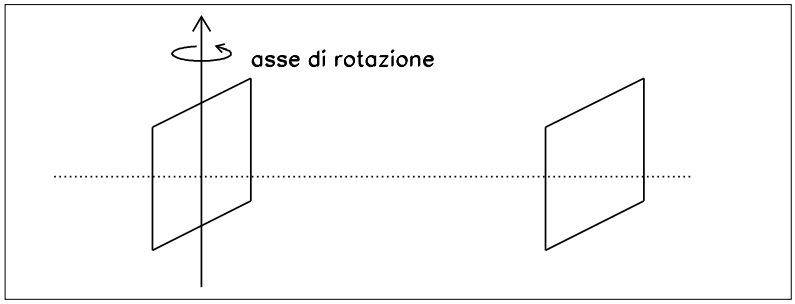

Figura 6.10: Sistema dello specchio rotante per il metodo di Q–switching.

Ovviamente l' azione laser potrà partire solo quando lo specchio rotante si trova parallelo all' altro specchio del risuonatore. L' energia di pompa viene quindi accumulata durante tutto il periodo in cui lo specchio rotante risulta non parallelo all' altro specchio fisso e viene quindi rilasciata sotto forma di un potente impulso di luce nel breve periodo nel quale i due specchi sono paralleli. Per evitare la presenza di molti impulsi è necessario utilizzare una elevata velocità di rotazione. Per una cavità risonante di lunghezza $d = 50\ cm$, la velocità richiesta è

dell' ordine dei 30000 giri/minuto, che non è molto facile da controllare con precisione con metodi meccanici.

2. *Metodo usante interruttori elettroottici.* Questo metodo sfrutta un effetto elettro–ottico, quale l' effetto Kerr o, più comunemente, l' effetto Pockels. Senza entrare nei dettagli, una cella elettro–ottica, cioè una cella Kerr o Pockels, è un dispositivo che, quando sottoposto ad una opportuna tensione, si comporta come un cristallo birifrangente. La birifrangenza è proporzionale al quadrato della tensione applicata per una cella Kerr, mentre risulta direttamente proporzionale alla tensione applicata nel caso di una cella Pockels. Quando la tensione applicata è nulla la cella non è birifrangente. La figura 6.11 mostra un inter-

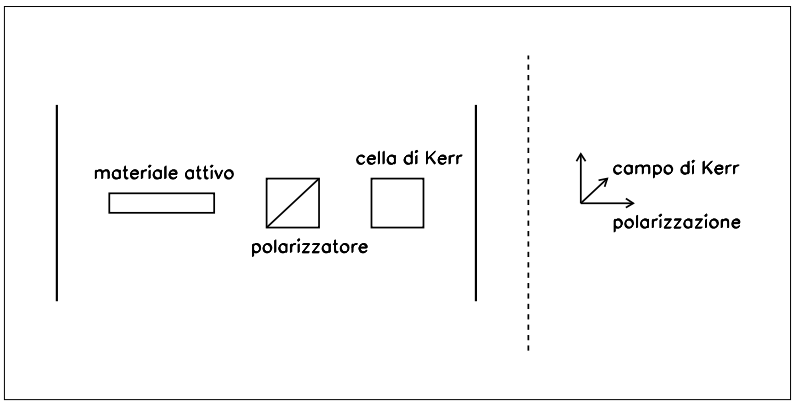

Figura 6.11: Combinazione di polarizzatore e cella Kerr per il metodo di Q–switching.

ruttore formato da un polarizzatore e una cella Kerr. La cella Kerr è alimentata e orientata in modo tale da convertire la luce polarizzata linearmente che ha attraversato il polarizzatore in luce polarizzata circolarmente. Dopo la riflessione sullo specchio, la luce viene riconvertita dalla cella Kerr in luce polarizzata linearmente con una direzione di polarizzazione ortogonale a quella originale e viene, pertanto, bloccata dal polarizzatore. In questa condizione l' interrutore è chiuso. Viene aperto togliendo la tensione di alimentazione della cella e, di conseguenza, eliminando l' azione dovuta alla birifrangenza: la cella Kerr, in tale situazione, trasmette la luce senza modificarne la polarizzazione. Applicando e togliendo successivamente tensione alla cella con una frequenza opportuna si può ottenere il funzionamento del laser in regi-

me di impulsi giganti, con maggiore facilità e precisione di quanto non avvenga con il metodo dello specchio rotante. Una cella Kerr, normalmente richiede elevate tensioni di alimentazione (10–20 kV). Una cella Pockels, che viene usata nella stessa maniera, richiede di solito tensioni più contenute (1–5 kV).

3. *Metodo utilizzante assorbitori saturabili.* È il metodo più semplice. Esistono delle sostanze di solito usate sotto forma di soluzione in un liquido (es. ftalocianina in nitrobenzolo per laser a rubino) che hanno la proprietà di diventare trasparenti se investite da un fascio luminoso di sufficiente intensità. In termini molto semplificati, si può schematizzare tali sostanze come un sistema a due livelli risonante alla frequenza ω, con una intensità di saturazione I_S^* molto bassa. Si supponga di introdurre nella cavità laser un assorbitore saturabile la cui frequenza ω di assorbimento coincida con la frequenza del laser. Per fissare le idee, supponiamo che l' assorbimento iniziale, cioè in assenza di saturazione, dell' assorbitore sia del 50%. L' azione laser, allora, potrà partire solo quando il guadagno nel materiale attivo compensi le forti perdite dovute all' assorbitore saturabile, più ovviamente quelle della cavità. Quindi l' inversione di popolazione deve raggiungere dei valori molto elevati perchè l' azione laser possa partire. Appena però l' azione laser parte, e precisamente appena l' intensità della luce laser nella cavità diventa paragonabile a I_S^*, l' assorbitore viene rapidamente saturato. Se I_S^* è molto basso, l' inversione di popolazione che si ha al momento in cui l' assorbitore risulta saturato è ancora praticamente uguale all' inversione iniziale, quindi molto alta. Per quanto detto in precedenza, da questo istante la luce laser crescerà nel tempo molto rapidamente così da formare un potente impulso luminoso. Negli assorbitori saturabili il valore molto basso di I_S^* è dovuto al valore molto elevato della sezione d' urto di assorbimento, σ, circa 10^4 volte superiore a quella del materiale attivo.

6.3 Agganciamento di fase dei modi oscillanti

Nella cavità di un laser, in genere, saranno presenti più modi di oscillazione, in particolare tutti quelli corrispondenti ai modi longitudinali della cavità con frequenze comprese entro riga di uscita del laser. In circostanze ordinarie le fasi di questi modi hanno valori casuali, e, per operazione in regime continuo, l' intensita' mostra un andamento casuale. La figura (6.12) mostra l' andamento temporale del quadrato dell' ampiezza del campo elettrico $|A(t)|^2$

del fascio di uscita per $N = 51$ modi oscillanti, tutti con la stessa ampiezza E_0 e ugualmente spaziati in frequenza del valore $\Delta\nu$ tra modi longitudinali successivi. Il fascio di uscita consiste di una sequenza casuale di impulsi

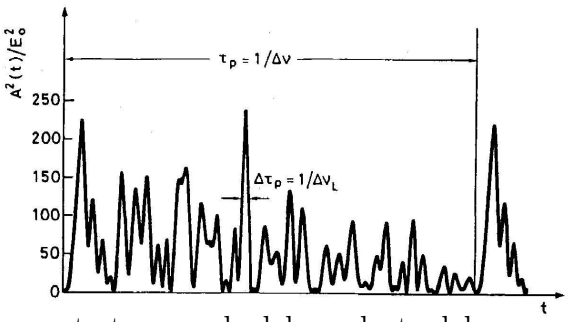

Figura 6.12: Andamento temporale del quadrato del campo elettrico, $|A(t)|^2$, nel caso $N = 51$ modi oscillanti, tutti con uguale ampiezza e fase casuale.

luminosi. Nonostante tale causalita', dato che questi impulsi nascono dalla somma di N componenti di frequenza equispaziate, la forma dell' impulso in figura mostra le seguenti proprieta', caratteristiche di una serie di Fourier: (1) la forma d' onda e' periodica con un periodo $\tau_p = 1/\Delta\nu$; (2) ogni impulso luminoso ha una durata $\Delta\tau_p \simeq 1/\Delta\nu_L$, dove $\Delta\nu_L = N\Delta\nu$ e' la banda oscillante totale. Pertanto, per laser con righe di guadagno relativamente larghe come laser a stato solido, a coloranti e a semiconduttori, $\Delta\nu_L$ puo' essere confrontabile con tale larghezza di riga e si possono produrre impulsi brevi, della durata del *ps* o meno.

Supponiamo che i modi oscillanti, sempre avendo ampiezze uguali o confrontabili, vengano forzati ad oscillare in modo da avere una relazione di fase definita. Il laser viene detto, allora, *agganciato in frequenza o mode locked* e il processo attraverso cui tale condizione viene realizzata viene detto *mode locking.*

6.3.1 Descrizione nel campo della frequenza

Si consideri il caso di $(2n + 1)$ modi longitudinali oscillanti con uguale ampiezza E_0, cone illustrato in figura (6.13). Si supponga, inoltre, che le fasi φ_k dei modi siano correlate secondo la relazione:

$$\varphi_k - \varphi_{k-1} = \alpha \tag{6.59}$$

con α costante. A parte un fattore di fase costante, il campo elettrico totale dell' onda in ogni punto del fascio di uscita potrà scriversi come:

$$E(t) = \sum_{l=-n}^{n} E_0 e^{i[(\omega_0 + l\Delta\omega)t + l\alpha]} \tag{6.60}$$

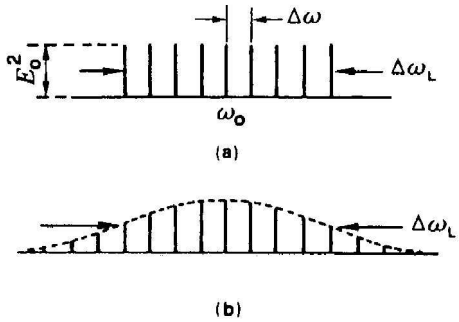

Figura 6.13: Ampiezze dei modi di una cavita' in funzione della frequenza per un laser mode locked. (a) Distribuzione uniforme, (b) distribuzione gaussiana su una larghezza di banda FWHM $\Delta\omega_L$.

dove ω_0 è la frequenza del modo centrale, $\Delta\omega$ è la differenza di frequenza fra due modi longitudinali successivi e vale $\omega = \pi c/d$ per una cavità di lunghezza d (5.4) e il valore della fase del modo centrale e' stato assunto essere nullo. La serie contenuta nella (6.60) è una serie geometrica di ragione $e^{i(\omega t+\alpha)}$; calcolandone la somma si può scrivere:

$$E(t) = A(t)e^{i\omega_0\ t} \tag{6.61}$$

dove

$$A(t) = \sum_{l=-n}^{n} E_0 e^{il(\Delta\omega t+\alpha)} \tag{6.62}$$

ovvero, passando a una nuova variabile temporale tale per cui $\Delta\omega t' = \Delta\omega t+\alpha$

$$A(t') = E_0 \frac{\sin[(2n+1)(\Delta\omega t'+\alpha)/2]}{\sin[(\Delta\omega t'+\alpha)/2]} \tag{6.63}$$

Si vede che $E(t)$ è costituito da un' onda sinusoidale portante di frequenza ω_0 modulata in ampiezza da $A(t)$. L' andamento della funzione $A^2(t')$ è mostrato in figura 6.14 per $(2n+1) = 7$. A causa della relazione di fase (6.59) i vari modi oscillanti, interferendo fra di loro, producono degli impulsi di luce. I massimi di tali impulsi si hanno quando il denominatore della (6.63) si annulla. Usando la variabile t', il primo massimo si ha per $t' = 0$. A questo istante, anche il numeratore della (6.63) si annulla. Approssimando $sin\alpha \sim \alpha$ per piccoli valori di α, dalla (6.63) si vede che $A^2(0) = (2n+1)E_0^2$. L' impulso successivo si produce quando il denominatore della (6.63) si annulla di nuovo, cioe' per t' tale per cui $\Delta t'/2 = \pi$. Pertanto due picchi successivi sono separati in tempo di una quantità

$$\tau_p = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu}$$

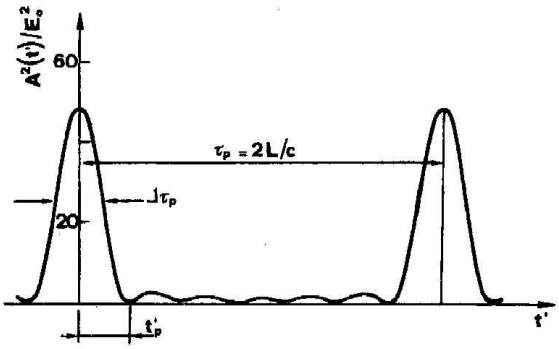

Figura 6.14: Andamento temporale della luce emessa da un laser oscillante su 7 modi di eguale ampiezza e con fasi agganciate.

dove $\Delta\nu$ e' la separazione in frequenza tra modi successivi. Per $t' > 0$, in figura 6.14 si vede che il primo zero di $A^2(t')$ si ha quando il numeratore si annulla di nuovo, cioe' per $[(2n+1)\Delta\omega\ t'_p/2] = \pi$. Poiche' la FWHM di $A^2(t')$, $\Delta\tau_p$, e' circa uguale a t'_p, si ha:

$$\Delta\tau_p \simeq \frac{2\pi}{(2n+1)\Delta\omega} = \frac{1}{\Delta\nu_L}$$

dove $\Delta\nu_L = (2n+1)\Delta\omega/2\pi$ e' la larghezza di banda totale del laser.

Le proprieta' caratteristiche di un laser mode locked, cioe' di un laser che soddisfi la condizione (6.59), sono le seguenti. Il fascio di uscita consiste di una successione di impulsi di mode locking; la durata di ogni impulso e' $\Delta\tau_p$ pari all' incirca all' inverso della banda passante totale del laser $\Delta\nu_L$. Questo fatto discende da una proprieta' generale delle serie di Fourier. Poiche' $\Delta\nu_L$ puo' essere dell' ordine della larghezza della riga di guadagno $\Delta\nu_0$, impulsi di durata inferiore al ps possono essere ottenuti con laser a stato solido o a semiconduttore operati in mode locking. Per laser a colorante o a stato solido adattabili in frequenza la larghezza della riga di guadagno puo' essere anche un fattore 100 volte maggiore e pertanto si possono ottenere impulsi dell' ordine di $\sim 25\ fs$ per la rhodamina 6G e $\sim 7\ fs$ per il laser a Ti:zaffiro. Nel caso dei laser a gas la larghezza della riga di guadagno e' molto inferiore (fino a pochi GHz) e pertanto si generano impulsi alquanto lunghi, ($\sim 100\ ps$).

Inoltre le potenze di picco sono molto elevate. La potenza di picco, infatti, risulta proporzionale a $(2n+1)^2 E_0^2$. Se, invece, le fasi dei modi fossero casuali la potenza totale sarebbe $(2n+1)E_0^2$. L' aumento della potenza di picco è quindi pari al numero totale di modi oscillanti, che per laser a stato solido o a liquidi puo' essere molto elevato, anche $10^3 - 10^4$. Il mode locking

percio' viene utilizzato non solo per produrre impulsi molto corti, ma anche per ottenere potenze di picco molto elevate.

Nel caso piu' realistico di ampiezze dei modi distribuite con andamento gaussiano in funzione della frequenza, come mostrato in figura (6.13) b), si ottiene per la durata del singolo impulso:

$$\Delta\tau_p = \frac{2ln2}{\pi\Delta\nu_L} = \frac{0.441}{\Delta\nu_L}$$

.

6.3.2 Descrizione nel campo del tempo

Nella condizione di mode locking (6.59), due impulsi consecutivi del fascio laser sono separati dal tempo τ_p. Poiche' $\Delta\nu = c/(2L)$, dove L e' la lunghezza della cavita', $\tau_p = 2L/c$, cioe' pari al tempo di un cammino chiuso della cavita' (round trip). Si noti che la estensione spaziale Δz di un tipico impulso mode locked e' in genere molto piu' corta di L. Pertanto il comportamento oscillante nella cavita' puo' essere visualizzato come dovuto ad un singolo impulso ultracorto, di durata $\Delta\tau_p$, che si propaga avanti ed indietro nella cavita'. In tal caso, infatti, il fascio di uscita consiste di una successione di impulsi separati di un tempo pari al tempo di round trip. Questa e' la cosiddetta *descrizione temporale* del mode locking.

Seguendo tale descrizione, e' facile comprendere che la condizione di mode locking (6.59) puo' essere ottenuta inserendo un otturatore opportunamente veloce ad uno dei due estremi della cavita', come schematizzato in figura (6.15) a). Infatti, supponiamo che all' interno della cavita' si trovi un

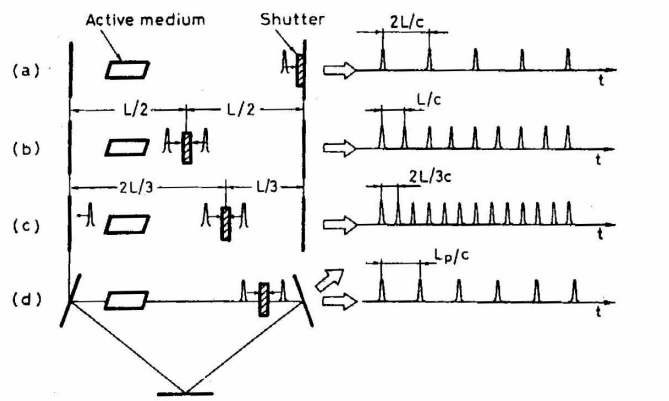

Figura 6.15: Uso di un otturatore veloce per ottenere la condizione di mode locking. (vedi testo)

fascio che inizialmente non sia mode locked, e presenti una distribuzione di

ampiezza del tipo di quella della figura (6.12); se l' otturatore viene azionato con un periodo $T = 2L/c$, possibilmente a partire dall' istante in cui esso viene raggiunto dall' impulso luminoso piu' intenso, e se il tempo di apertura dell' otturatore e' confrontabile con la durata dell' impulso luminoso, allora solo tale impulso sopravvivera' nella cavita' del laser e produrra' la situazione di mode locking della figura (6.15) a). Analogamente, se l' otturatore viene posizionato al centro della cavita' ed aperto periodicamente con periodo $T = L/c$, si realizzera' la situazione di mode locking della figura (6.15) b): in questo caso due impulsi ultracorti sono presenti nella cavita' e si muovono in modo tale da incontrarsi in corrispondenza dell' otturatore quando esso e' aperto. Ancora, se l' otturatore e' posizionato ad una distanza $L/3$ da uno dei due specchi e viene aperto periodicamente con $T = 2L/(3c)$, si realizzera' la situazione di mode locking della figura (6.15) c): nella cavita' si avranno tre impulsi ultracorti che si muoveranno in modo tale che due impulsi si incontrino sempre in corrispondenza dell' otturatore quando questo e' aperto. Negli ultimi due casi il rate di ripetizione degli impulsi e' $2\Delta\nu$ e $3\Delta\nu$ rispettivamente mentre nel primo e' $\Delta\nu$: per tale motivo se due ultime situazioni vengono indicate come casi di *mode locking armonico*, mentre la prima viene indicata come *mode locking fondamentale*. Si noti anche che la relazione di fase che produce le due ultime situazioni sara' diversa dalla (6.59), dato che questa realizza la prima situazione.

Una situazione interessante si ha quando si utilizza una cavita' ad anello in condizione di mode locking, come rappresentato in figura (6.15) d). In questo caso, indipendentemente dalla posizione dell' otturatore, il laser produce mode locking fondamentale o di seconda, terza armonica a seconda che la frequenza di apertura dell' otturatore sia pari a c/L_p, $2c/L_p$ o $3c/L_p$ dove L_p e' la lunghezza del perimetro della cavita' ad anello. Per esempio si assuma che la frequenza sia c/L_p: allora se due impulsi contropropagantesi si incontrano una prima volta in corrispondenza dell' otturatore, essi si incontreranno nella stessa posizione dopo ogni round trip, indipendentemente dalla posizione dell' otturatore.

I metodi per realizzare il mode locking si dividono in due categorie: (1) metodi di mode locking attivo, in cui l' elemento di mode locking e' guidato da una sorgente esterna e (2) metodi di mode locking passivo, in cui l' elemento che induce il mode locking non e' guidato da una sorgente esterna ma sfrutta qualche effetto ottico non lineare, come la saturazione di un assorbitore saturabile o le variazioni non lineari dell' indice di rifrazione di opportuni materiali.

Tra i metodi attivi ricordiamo: (1) il mode locking indotto da un modulatore di ampiezza, *AM mode locking*, (2) quello indotto da un modulatore di fase, *FM mode locking*, e (3) quello indotto da una modulazione periodica

del guadagno del laser ad una frequenza pari alla frequenza fondamentale della cavita', *mode locking by synchronous pumping.*

Tra i metodi passivi ricordiamo, invece: (1) il mode locking indotto da un assorbitore saturabile velocemente, *fast saturable absorber ML*, (2) quello che si basa sulle proprieta' autofocalizzanti di mezzi ottici non lineari, *Kerr lens ML*, (3) quello indotto da un assorbitore saturabile lentamente, *slow saturable absorber ML*, e (4) quello che si basa sulla automodulazione di fase in mezzi ottici non lineari inseriti in cavita' ausiliarie *additive pulse ML.*