Capitolo 9

Luce di Sincrotrone

9.1 Introduzione

La luce di sincrotrone (LS) ed il suo uso come strumento di indagine scientifica ha una storia interessante e curiosa. Il fenomeno della radiazione emessa da un elettrone che percorre un' orbita circolare era stato previsto in linguaggio pre–quantistico e pre–relativistico circa cent' anni fa. Ricordiamo l' espressione che fornisce la potenza media irradiata da un dipolo oscillante di carica pari alla carica dell' elettrone e (cfr. formula 5.33 appunti di Complementi di Elettromagnetismo):

$$W = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{c^3} \mid \vec{a}_m \mid^2 = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e^2 c^3} \mid \frac{d\vec{p}_m}{dt} \mid^2 \tag{9.1}$$

Larmor (1897) reinterpretò la formula, ammettendone la validità anche per un singolo elettrone, sottoposto ad una accelerazione istantanea $\frac{1}{m_e} \mid \frac{d\vec{p}}{dt} \mid$:

$$W = \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e^2 c^3} \mid \frac{d\vec{p}}{dt} \mid^2 \tag{9.2}$$

dove m_e è la massa a riposo dell' elettrone. Lienard (1898) estese la formula al caso di una accelerazione centripeta. L' argomento rimase inosservato fino al 1940, quando il problema della radiazione emessa da un fascio di elettroni circolanti in un' orbita circolare divenne cruciale per la progettazione dei primi acceleratori di particelle (betatroni, sincrotroni). L' estensione della (9.2) al caso relativistico fu affrontata dalla scuola di Fisica Teorica russa (Veksler, Pomeranchuk, Ivanenko, ...) e nel 1947 fu riportata la prima osservazione "visuale" della luce di sincrotrone da un sincrotrone per elettroni di 70 MeV (General Electric, Schenectaday, N.Y.). Negli anni successivi la teoria relativistica della LS, con particolare applicazione al caso degli acceleratori, fu

sviluppata da Schwinger ed altri. La differenza tra la trattazione classica e quantistica non è rilevante (inferiore al 10 per cento).

Nel seguito verrà riportata una trattazione molto semplice, intuitiva e per analogie, allo scopo di far capire i risultati principali. È quasi superfluo aggiungere che la validità di questa trattazione semplicistica risiede nel fatto che il risultato finale è quello ottenuto con la trattazione rigorosa di Schwinger, e non il viceversa.

9.2 Proprietà della luce di sincrotrone

La (9.2) fornisce la potenza istantanea irradiata da un elettrone non relativistico in tutto lo spazio (angolo solido pari a 4π). La situazione cambia decisamente quando la velocità dell' elettrone è prossima a c ($\beta = v/c \simeq 1$). Bisogna allora utilizzare l' espressione della (9.2) invariante per trasformazioni di Lorentz.

Poichè l' energia elettromagnetica (E_{rad}) ed il tempo si trasformano allo stesso modo per trasformazioni di Lorentz, la potenza istantanea è sempre un invariante ($dE_{rad} = W\ dt$). La (9.2), non relativistica, si riferisce al caso in cui l' osservatore è solidale con il sistema di riferimento dell' elettrone. Nel caso della LS, invece, l' elettrone si muove con β circa uguale ad uno rispetto all' osservatore.

Indichiamo allora con τ il tempo misurato nel sistema di riferimento dell' elettrone e con t quello dell' osservatore (laboratorio). Supponiamo di osservare la LS e quindi di applicare la (9.2) in un punto della traiettoria (il limite di un archetto di circonferenza). Solo in questo caso, infatti, potremo applicare le trasformazioni di Lorentz, valide per sistemi inerziali. Si ha:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{9.3}$$

dove

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{m_e c^2} \tag{9.4}$$

dove E è l' energia totale e m_e è la massa a riposo dell' elettrone.

Ricordiamo le seguenti formule di cinematica relativistica, valide per una particella:

$$E = T + m_e c^2 \tag{9.5}$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4 \tag{9.6}$$

e dalle (9.5) e (9.6):

$$pc = \sqrt{T^2 + 2m_e c^2 T} \tag{9.7}$$

Dalle (9.4), (9.5), (9.6) e (9.7) si ricava ancora:

$$pc = \beta E \tag{9.8}$$

Per ottenere dalla (9.2) una formula valida relativisticamente è necessario non solo sostituire $d\tau$ a dt, ma anche il quadrimpulso $(\vec{p}, iE/c)$ a $\vec{p}$:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2 \tag{9.9}$$

Si ottiene allora:

$$\begin{aligned} W &= \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e^2 c^3}\left[\left(\frac{d\vec{p}}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{d\tau}\right)^2\right] \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e^2 c^3}\,\gamma^2\left[\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2\right] \end{aligned} \tag{9.10}$$

La (9.10) esprime, in maniera generale, la potenza irradiata da una carica in moto ed i due termini corrispondono rispettivamente all' accelerazione centripeta (variazione di direzione di $\vec{v}$) ed a quella tangenziale (variazione di modulo di $\vec{v}$). Il secondo termine rende conto della *radiazione di frenamento* (bremmstrahlung, tubi a raggi X), il primo della LS.

Consideriamo ora un sincrotrone, o meglio un anello di accumulazione (AA) di raggio R. Indichiamo con ω_0 la velocità angolare dell' elettrone. Si ha evidentemente, indicando con T il periodo, ovvero il tempo di rivoluzione dell' elettrone nell' anello,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\frac{R}{\beta c}} = \frac{\beta c}{R} \tag{9.11}$$

Per $E \geq 50\ MeV$ si può verificare che nella (9.10) $dE/dt << dp/dt$, e dunque è trascurabile. Si verifica anche, considerando la figura (9.1), che:

$$\frac{|\,\Delta\vec{p}\,|}{|\,\vec{p}\,|} = \frac{\Delta s}{R} = \theta \tag{9.12}$$

$$\frac{|\,\Delta\vec{p}\,|}{\Delta t} = |\,\vec{p}\,|\,\frac{\theta}{\Delta t} \tag{9.13}$$

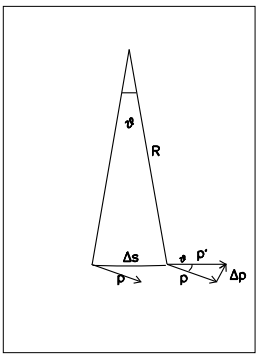

Figura 9.1:

e quindi che:

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 p^2 \tag{9.14}$$

Sostituendo nella (9.10) le (9.14) e (9.11) e ricordando la (9.8), si ottiene, infine:

$$\begin{aligned} W &= \frac{2}{3}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{m_e^2 c^3}\frac{\gamma^2 p^2 \beta^2 c^2}{R^2} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma^2 E^2 \beta^4}{R^2 m_e^2 c^3} = \\ &= \frac{2}{3}\frac{e^2 c}{4\pi\epsilon_0}\frac{\beta^4}{R^2}\left(\frac{E}{m_e c^2}\right)^4 = \frac{2}{3}\frac{e^2 c}{4\pi\epsilon_0 R^2}\beta^4\gamma^4 \end{aligned} \tag{9.15}$$

La (9.15) è l' equazione fondamentale della LS. Si può anche riscrivere nella seguente forma, che fornisce la perdita di energia δE di una particella in un giro completo nell' AA, cioè in un tempo $T = (2\pi R)/(c\beta)$:

$$\delta E = W\,\frac{2\pi R}{c\beta} = \frac{e^2}{3\epsilon_0}\frac{\beta^3\gamma^4}{R} \tag{9.16}$$

Le (9.15) e (9.16) mostrano che:

- soltanto elettroni (e positroni) sono di valore pratico per la produzione di LS a causa della loro ridotta massa a riposo ($m_e c^2 = 0.511\ MeV$);
- la potenza istantanea e la perdita di energia per giro aumentano con la quarta potenza dell' energia della particella, e ciò è completamente diverso dal caso non relativistico.

La (9.16) si riscrive spesso nella espressione seguente, in cui δE è espressa in MeV, E in GeV, R in metri e con il seguente fattore numerico che tiene conto di queste unità di misura "ibride":

$$\delta E(MeV) = 8.85 \cdot 10^{-2} \frac{[E(GeV)]^4}{R(m)} \tag{9.17}$$

La (9.17), unitamente all' altra formula di uso pratico (non è altro che la forza di Lorentz nel caso in cui il piano dell' orbita della particella sia ortogonale al vettore $\vec{B}$):

$$pc(MeV/c) \;=\; 300\; B(T)\; R(m) \tag{9.18}$$

permette di calcolare il dimensionamento di un anello di accumulazione. È da notare che la (9.17) è valida solo per elettroni e positroni, in quanto il fattore numerico congloba la massa a riposo dell' elettrone, la (9.18), invece, è valida per qualsiasi particella.

Si può in particolare capire il motivo per cui i grandi accumulatori di elettroni–positroni (LEP) abbiano un raggio così grande, ben superiore a quello della (9.18) con $\mid \vec{B} \mid \sim 1,\; 2\; T$. La δE data dalla (9.17) fornirebbe un valore troppo elevato per poter essere compensato da un opportuno numero di cavità acceleratrici poste lungo il percorso delle particelle.

9.3 Distribuzione angolare della LS

Ricordiamo che l' intensità irradiata da un dipolo elementare oscillante non relativistico era data dall' espressione:

$$I = \frac{\mid \vec{p}_0 \mid^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \tag{9.19}$$

che si trasforma facilmente nella potenza istantanea irradiata per unità di angolo solido:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)^2 \sin^2\theta \tag{9.20}$$

La figura 9.2 fornisce il grafico di I, dato dalla lunghezza del vettore congiungente l' origine del sistema di coordinate $(\vec{v}, d\vec{v}/dt)$ con il punto generico situato sul contorno dei due lobi, e corrispondente all' angolo θ misurato a partire dalla direzione di $d\vec{v}/dt$, che coincide con l' asse del dipolo istantaneo. Ovviamente questa distribuzione ha simmetria rotazionale rispetto

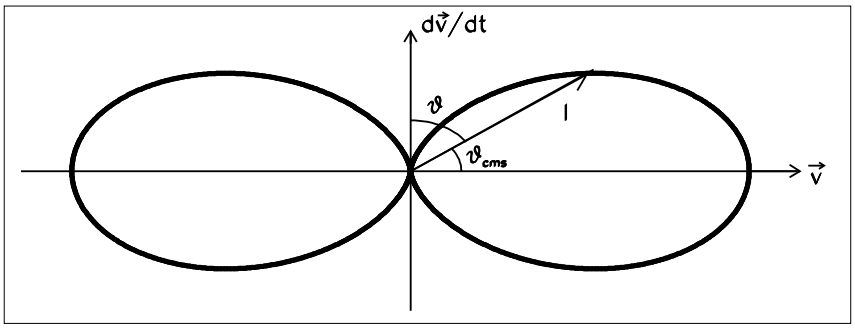

Figura 9.2:

a $d\vec{v}/dt$ nel sistema di riferimento dell' elettrone. Ricordiamo che l' integrazione della (9.20) su tutto l' angolo solido aveva portato alla formula di Larmor(9.1).

La distribuzione della radiazione cambia completamente quando l' elettrone si muove con velocità v prossima alla velocità della luce. La distribuzione angolare è infatti completamente spostata in avanti, come indicato in figura 9.3, nella direzione di $\vec{v}$, cioè tangente alla traiettoria nel punto considerato. La larghezza del cono in avanti può essere determinata dalla (9.20). Dalla figura 9.3 è chiaro che, indicando con θ_{cms} l' angolo di emissione del fotone misurato a partire dalla direzione di $\vec{v}$, risulta $\theta_{cms} = \pi/2 - \theta$. La trasformazione di θ_{cms} dal sistema dell' elettrone a quello del laboratorio (θ_L) è data dalla relazione:

$$tg\ \theta_L = \frac{1}{\gamma}\ \frac{\sin\theta_{cms}}{\beta + \cos\theta_{cms}} \tag{9.21}$$

Nel caso estremo di $\theta_{cms} = \pi/2$, la (9.21) si riduce a $tg\ \theta_L \simeq 1/\gamma$; la radiazione emessa da un elettrone relativistico con $\gamma >> 1$ è quindi ristretta in un cono di apertura:

$$\theta_L \sim 1/\gamma \sim m_0c^2/E \tag{9.22}$$

Per elettroni da 5 GeV, θ_L è pari a circa 10^{-4} rad.

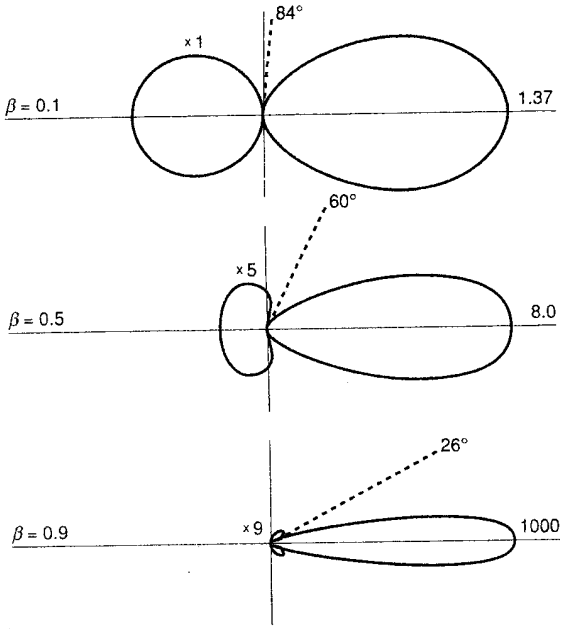

Figura 9.3: Distribuzione angolare della radiazione di sincrotrone nel piano orbitale (asse x: velocità, asse y: accelerazione) per diversi valori di β. La linea tratteggiata corrisponde ad intensità irraggiata nulla. Una frazione della potenza totale, residuo della distribuzione di dipolo, è irraggiata in direzione opposta a quella del lobo principale di radiazione (cono di radiazione). Per evidenziare i lobi di irraggiamento all' indietro, la loro intensità è moltiplicata nei vari casi per il fattore indicato.

9.4 Composizione spettrale della LS

Intuitivamente ci si può aspettare che la distribuzione di frequenze della LS si estenda dalla frequenza fondamentale di rivoluzione degli elettroni (9.11) fino a valori molto alti delle armoniche superiori. L' ordine di grandezza del limite ad alta frequenza può essere ottenuto calcolando la durata di un impulso luminoso che è misurato da un osservatore solidale con il sistema del laboratorio. Sia allora θ l' angolo di collimazione della radiazione emessa da un punto determinato dell' orbita. Dalla figura 9.4 è ovvio che l' osservatore riceve la luce da tutti i punti dell' orbita compresi tra A e B. Si noti che la figura è molto "allargata", dato che vale la (9.22). La durata dell' impulso luminoso misurato dall' osservatore è uguale alla differenza tra il tempo di transito dell' elettrone e quello della luce tra A e B:

$$\Delta t = \frac{R\theta}{v} - \frac{R\theta}{c} = \frac{1-\beta}{v} R\theta \tag{9.23}$$

Con $\theta \sim 1/\gamma$, $v/R = \omega_0$, cioè la frequenza fondamentale, e approssimando $(1-\beta) = (1+\beta)^{-1}\gamma^{-2} \sim 1/(2\gamma^2)$, si ottiene:

$$\Delta t = \frac{1}{2}\frac{1}{\omega_0}\frac{1}{\gamma^3} \tag{9.24}$$

L' analisi di Fourier di un impulso luminoso di durata Δt mostra che esso può contenere frequenze fino a $1/\Delta t$. Trascurando il fattore 2, otteniamo dalla (9.24) il valore massimo della frequenza ω_c:

$$\frac{\omega_c}{\omega_0} = \gamma^3 \tag{9.25}$$

La lunghezza d' onda corrispondente alla frequenza critica ω_c , $\lambda_c = \frac{c2\pi}{\omega_c}$, prende il nome di *lunghezza d' onda critica.* Un' espressione esatta per λ_c, in unità di misura pratiche è:

$$\lambda_c(\mathring{A}) = 5.6\ \frac{R(m)}{E^3(GeV)} \ = \ \frac{18.6}{B(T)E^2(GeV)} \tag{9.26}$$

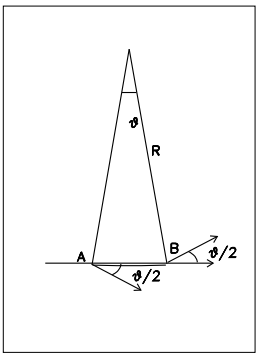

Figura 9.4:

Ci si può chiedere se le armoniche superiori possano essere risolte tra di loro o meno. A parte il problema sperimentale, ci sono argomenti per cui si può dire che ciò che si ottiene sia uno spettro continuo alle armoniche elevate.

Tutti i calcoli finora eseguiti sono stati basati sull' ipotesi che l' elettrone percorresse una circonferenza di raggio esattamente uguale a R. In generale si ha una piccola dispersione nei raggi dell' orbita, perchè gli elettroni in un acceleratore affettuano oscillazioni attorno all' orbita di equilibrio (oscillazioni di betatrone). L' ampiezza di queste oscillazioni ΔR è tale per cui $\Delta R/R \sim 10^{-4}$. Quindi noi non abbiamo una frequenza netta ω_0, ma piuttosto una banda di larghezza $\Delta\omega_0/\omega_0 \sim 10^{-4}$. Di conseguenza dalla 10^4 armonica lo spettro diventa continuo, come rappresentato in figura 9.5.

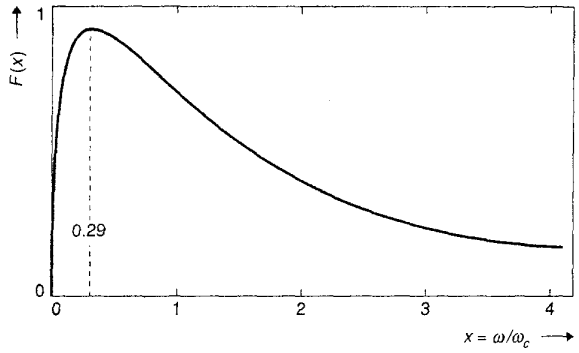

Figura 9.5: Funzione che descrive lo spettro di potenza della radiazione di sincrotrone.

9.5 Struttura temporale

Mentre le caratteristiche della LS discusse finora sono "intrinseche", la struttura temporale è una proprietà forzata dal modo di operazione della macchina acceleratrice. Ne consegue che le strutture temporali che possono essere realizzate sono uniche nel campo dell' ultravioletto e dei raggi X. Consideriamo il caso di un AA in cui sono accumulati 10^{15} elettroni e supponiamo che la radiofrequenza delle cavità ecceleratrici, che compensano le perdite dovute alla (9.16), sia la stessa ω_0 data dalla (9.11). Allora soltanto gli elettroni che sono raggruppati in una singola porzione dell' orbita possono essere in fase correttamente con la radiofrequenza della cavità. La lunghezza di questi "pacchetti" di elettroni è una piccola frazione L (circa 1/10) della lunghezza d' onda λ_{RF} della cavità. La struttura temporale di questo modo di operazione è caratterizzata da impulsi luminosi di durata $\tau = L/c$ con una frequenza di ripetizione eguale alla frequenza fondamentale degli elettroni circolanti.

Un discorso analogo vale se l' anello opera con cavità a radiofrequenza che sono un' armonica di ordine N di ω_0. In questo caso circoleranno N "pacchetti" di elettroni e λ_{RF} sarà più piccola.

9.6 Struttura dell' AA

Finora è stato trattato il caso della LS proveniente da AA non dedicati. Nel caso di AA dedicati alla LS, sono state proposte e realizzate particolari strutture magnetiche, localizzate in porzioni limitate dell' orbita, che permettono di ottenere LS di intensità maggiore, lunghezza d' onda minore ed elevata monocromaticità. Esse sono:

- il Wiggler. Un wiggler è una struttura magnetica che forza gli elettroni

del fascio circolante ad eseguire una traiettoria con un raggio locale di curvatura minore del raggio di curvatura nei normali dipoli dell' anello. Ciò è ottenuto mediante campi magnetici locali più elevati, spesso ottenuti mediante magneti superconduttori. L' effetto globale è quindi quello di ottenere un' intensità maggiore (cfr. (9.15)) ed una energia maggiore.

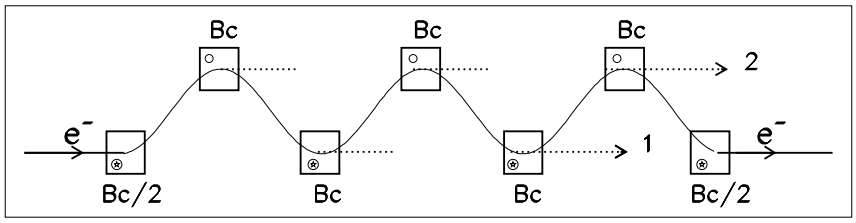

Figura 9.6:

Un ulteriore aumento dell' intensità di un fattore N per ciascuno dei due fasci di fotoni ottenuti nella direzione parallela all' asse del fascio di elettroni può essere ottenuto con 2N+1 poli, come schematizzato in figura 9.6. In questa ipotesi molto semplice il wiggler non produce effetti di interferenza.

- l' Ondulatore. Ha una struttura simile ad un wiggler ad N–poli e forza gli elettroni ad eseguire oscillazioni in un piano trasversale (ondulatore piano) o a descrivere un' elica attorno all' orbita media (ondulatore elicoidale). La deflessione del fascio di elettroni in un ondulatore è $\leq$ all' angolo di apertura della LS dato dalla (9.22) e ciò produce interessanti effetti interferenziali, per lunghezze d' onda $\lambda \simeq 1A$ con strutture magnetiche periodiche aventi lunghezze 2–20 cm. L' effetto dell' ondulatore si può intuire dalla figura 9.6.

  Ci sono tre contributi alla differenza di fase tra luce ed elettroni che percorrono la stessa distanza λ_0 nell' ondulatore. La somma delle tre differenze di percorso l_1, l_2, l_3 deve soddisfare la condizione di interferenza costruttiva:

$$l_1 + l_2 + l_3 = m\lambda \tag{9.27}$$

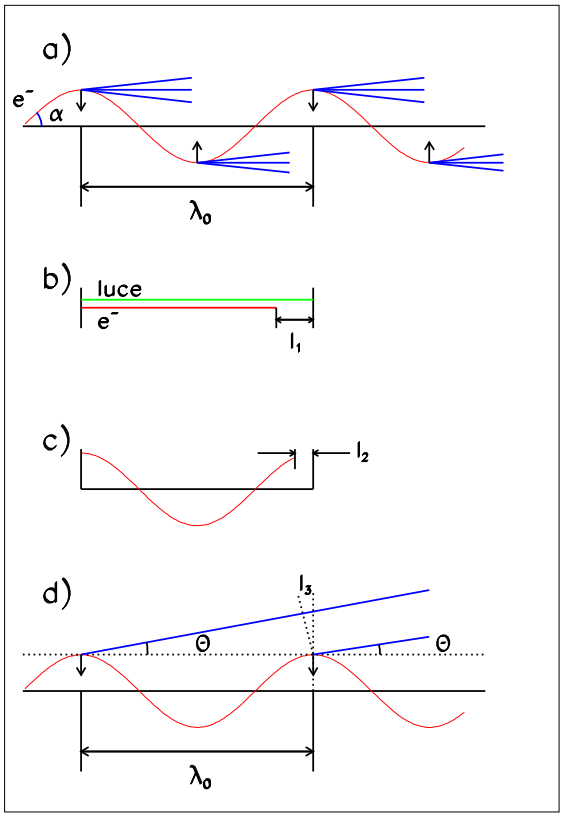

Figura 9.7:

A causa della piccola differenza di velocità dell' elettrone v e della luce c, anche se essi viaggiano lungo la stessa linea retta, c'è una differenza di cammino l_1 data da:

$$\frac{l_1}{\lambda_0} = \frac{c-v}{c} \simeq \frac{1}{2}\left(1-\beta^2\right) = \frac{1}{2}\gamma^{-2} \tag{9.28}$$

ovvero

$$l_1 = \frac{\lambda_0}{2\gamma^2} \tag{9.29}$$

Il secondo contributo l_2 deriva dallo scostamento che l' elettrone esegue nel suo percorso incurvato rispetto alla linea retta. Questo integrale

di percorso si può facilmente calcolare per un cammino sinusoidale e dipende dal campo magnetico massimo e da γ:

$$l_2 = \frac{\lambda_0 K^2}{4\gamma^2} \tag{9.30}$$

dove K è il parametro dell' ondulatore:

$$K = 93.4\ B(T)\ \lambda_0(m)\ =\ \alpha\gamma \tag{9.31}$$

dove α è l' angolo indicato in figura 9.6 a).

Se la radiazione dell' ondulatore è osservata da una direzione che forma un angolo Θ con l' asse di simmetria, la differenza di cammino relativa a fronti d' onda originati da punti distanti λ_0 è:

$$\lambda_0 - l_3 = \lambda_0\ \cos\Theta\ \simeq\ \lambda_0 - \frac{\lambda_0\Theta^2}{2} \tag{9.32}$$

e quindi

$$l_3 = \frac{\lambda_0\Theta^2}{2} \tag{9.33}$$

Dalle (9.29), (9.30) e (9.33), inserite nella (9.27), si ottiene:

$$\lambda_m = \frac{1}{m}\frac{\lambda_0}{2\gamma^2}\left(1 + \frac{K^2}{2} + \gamma^2\Theta^2\right) \tag{9.34}$$

che fornisce gli angoli Θ sotto cui si possono osservare i massimi di interferenza corrispondenti a radiazioni monocromatiche.