

Dispensa¹ del Modulo M3 - a.a. 2007/2008

ELEMENTI DI MECCANICA DEI SOLIDI

Luciano Colombo

*Dipartimento di Fisica - Università degli Studi di Cagliari
Cittadella Universitaria, 09042 Monserrato (Ca)*

¹La riproduzione, anche parziale, di questa Dispensa in qualsivoglia formato cartaceo, elettronico o virtuale è **severamente vietata**.
Eventuali richieste di autorizzazione all'uso di questa Dispensa vanno indirizzate direttamente all'Autore, scrivendo al seguente indirizzo di posta elettronica: **luciano.colombo@dsf.unica.it**

Presentazione

Questa Dispensa riassume il contenuto delle lezioni svolte nel periodo 22-30 aprile 2008 (corrispondenti al **modulo M3** di 10 ore), nell'ambito del corso integrato professato dal prof. L. Colombo per le L.S. in Ing. Elettronica, Meccanica ed Energetica della Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Cagliari.

Questo **modulo M3** è obbligatorio per gli Studenti dei seguenti corsi:

- *Fisica dei Materiali e Dispositivi Avanzati* - L.S. Ing. Meccanica

Indice

1	Il concetto di mezzo continuo	4
2	Deformazioni e sforzi nei mezzi continui	7
2.1	Tensore delle deformazioni	7
2.1.1	Esempi di calcolo delle deformazioni	8
2.2	Tensore degli sforzi	9
2.2.1	Significato fisico del tensore degli sforzi	11
2.3	Struttura formale della meccanica dei solidi	12
3	Mezzo continuo lineare elastico	14
3.1	Risposta elastica lineare: proprietà formali generali	14
3.2	Notazione di Voigt	14
3.3	Mezzo omogeneo ed isotropo	16
3.3.1	Equazione costitutiva lineare elastica	16
3.3.2	Modulo di compressibilità	18
3.3.3	Moduli di elasticità	19
3.4	Esempi di calcolo degli sforzi	20
3.4.1	Sforzo in una deformazione monoassiale	20
3.4.2	Sforzo in una deformazione di taglio	21
4	Energia elastica	22
4.1	Deformazioni a temperatura nulla	22
4.2	Deformazione a temperatura finita	23
4.2.1	Potenziali termodinamici	23
4.2.2	Mezzi omogenei ed isotropi	24
4.3	Deformazione a temperatura variabile	25
5	Cenni di meccanica della frattura fragile	27
5.1	Fenomenologia di base	27
5.1.1	Materiali fragili e duttili	27
5.1.2	Il ruolo della microstruttura	28
5.1.3	L'intensificazione dello sforzo	28
5.2	Frattura fragile	29
5.2.1	Criterio di Griffith	30
5.2.2	Bilancio energetico	30
5.2.3	Generalizzazione del criterio di Griffith	32
5.3	Resistenza alla frattura	32
5.4	Campo di sforzo all'apice di cricca	33
6	Cenni sulla plasticità	35
6.1	Fenomenologia del comportamento plastico dei materiali	35
6.2	Incrudimento	36
6.3	Condizioni limite di plasticità e superficie di snervamento	37
6.4	Origine microscopica della plasticità	39

Capitolo 1

Il concetto di mezzo continuo

Nell'ambito del modulo M2 abbiamo studiato la struttura elettronica di un cristallo sotto l'approssimazione di Born-Oppenheimer, in accordo alla quale gli atomi del reticolo vengono considerati *fissi* (cioè di massa infinita).

Questa approssimazione deve, ovviamente, essere abbandonata ogniqualvolta si vogliono considerare i fenomeni connessi al moto o allo spostamento degli atomi del reticolo. In effetti, esistono moltissime proprietà fisiche di un cristallo che dipendono da questi moti, tra cui ricordiamo: la propagazione di onde elastiche, l'assorbimento di radiazione elettromagnetica nella regione dell'infrarosso, la diffusione di elettroni (fenomeno connesso alla resistenza elettrica), i fenomeni di deformazione elastica e plastica.

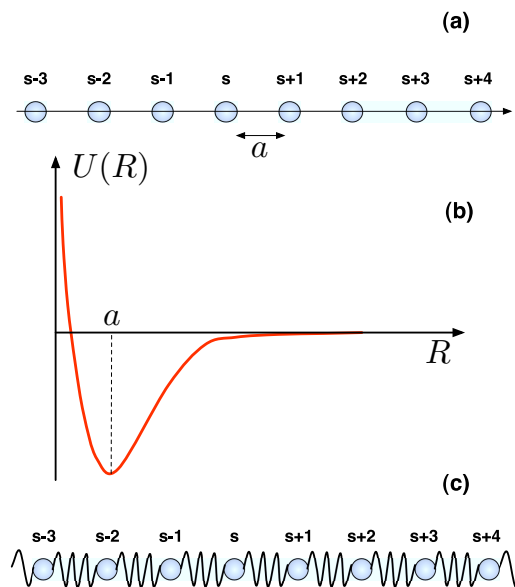


Figura 1.1: Schema di cristallo mono-atomico unidimensionale (a); rappresentazione del potenziale interatomico $U(R)$ (b); illustrazione della approssimazione armonica a primi vicini (c).

In questo Capitolo svilupperemo una conoscenza elementare dei fenomeni di vibrazione reticolare, basando i nostri argomenti sul semplice caso di un cristallo mono-atomico (cioè formato da atomi di una sola specie chimica), uno-dimensionale. Esso è rappresentato in Fig.1.1.

Supponiamo che gli atomi interagiscano tra loro tramite un potenziale $U(R)$, funzione della sola distanza interatomica R . Per piccole oscillazioni longitudinali (cioè per spostamenti lungo la direzione della catena mono-atomica e tali da mantenere ciascun atomo s in un intorno di $R_s = sa$), possiamo assumere che le interazioni tra atomi siano di tipo armonico. Assumeremo, inoltre, che le interazioni siano attive solo tra atomi primi vicini. Essi, dunque, sono modellisticamente collegati da molle (potenziale armonico) di costante elastica pari a γ : queste assunzioni costituiscono la *approssimazione armonica* (a primi vicini) per la dinamica reticolare.

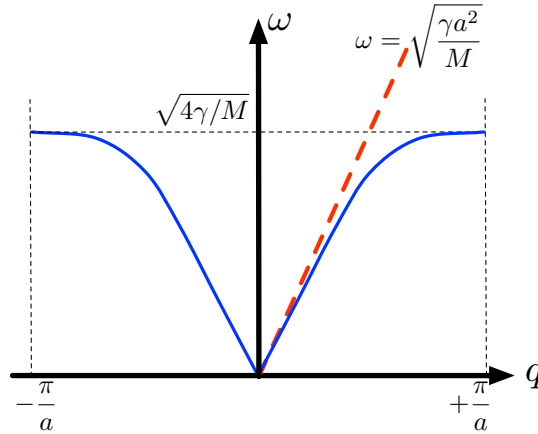


Figura 1.2: Relazione di dispersione per vibrazioni armoniche longitudinali in un cristallo mono-atomico uno-dimensionale (curva continua). Il limite per lunghezze d'onda infinite è rappresentato dalla linea tratteggiata.

L'equazione del moto per il generico atomo in posizione $R_s = sa$ si scrive

$$M \frac{d^2 u_s}{dt^2} = \gamma(u_{s+1} - u_s) + \gamma(u_s - u_{s-1}) \quad (1.1)$$

dove abbiamo indicato con M la massa atomica e con u_s lo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio. Assumiamo, coerentemente con le ipotesi del modello, che lo spostamento u_s dipenda dal tempo in modo armonico: $u_s \sim \exp(-i\omega t)$, dove ω è la pulsazione della vibrazione reticolare considerata. Imponendo, poi, che l'onda vibrazionale sia un'onda piana $u_s = u \exp(iqsa)$ (dove q è il vettore d'onda vibrazionale) otteniamo per sostituzione diretta nella eq.(1.1) la seguente relazione

$$M\omega^2 = -\gamma [\exp(iqa) + \exp(-iqa) - 2] \quad (1.2)$$

che immediatamente fornisce la *relazione di dispersione* per le vibrazioni reticolari

$$\omega^2 = \frac{2\gamma}{M} [1 - \cos(qa)] \quad (1.3)$$

Al fine di rappresentare graficamente questa relazione, dobbiamo ricordare che il vettore d'onda q segue le stesse regole sviluppate nel Modulo M2 per il vettore d'onda elettronico k . In altre parole, anche per il vettore d'onda vibrazionale: (i) si definisce un reticolo reciproco; (ii) ci si può limitare a considerare i soli valori di q appartenenti alla prima zona di Brillouin (1BZ) di questo reticolo¹. La relazione di dispersione è dunque rappresentata in Fig.1.2.

In questo contesto, a noi non interessa approfondire ulteriormente la descrizione teorica delle vibrazioni reticolari², se non per studiare il caso limite in cui la lunghezza d'onda della vibrazione reticolare sia molto grande rispetto al tipico passo reticolare a . Questa condizione equivale a considerare la relazione di dispersione nel limite di vettore d'onda $q \rightarrow 0$ per il quale vale che $\cos(qa) \sim 1 - 1/2(qa)^2$. Si ottiene immediatamente che la relazione di dispersione diventa lineare

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma a^2}{M}} q \quad (1.4)$$

come illustrato in Fig.1.2. La grandezza $v = \sqrt{\gamma a^2/M}$ ha le dimensioni fisiche di una velocità e, pertanto, l'eq.(1.4) rappresenta la relazione di dispersione per un'onda longitudinale acustica, di lunghezza d'onda

¹Tutti gli altri vettori Q equivalenti -per traslazioni di reticolo reciproco- ad un $q \in 1BZ$ definiscono un identico campo di spostamenti reticolari.

²La teoria completa delle vibrazioni reticolari deve comprendere la possibilità che il reticolo sia pluri-atomico, che sia tri-dimensionale -cioè che esistano vibrazioni longitudinali e trasversali- e che le interazioni non siano nè limitate ai soli primi vicini, nè di tipo puramente armonico.

infinita e propagante nel mezzo con velocità v . Quest'ultima rappresenta, dunque, la velocità del suono in quel mezzo.

È evidente che, in questo limite, il fenomeno di propagazione non dipende più dai dettagli reticolari sulla scala atomica (se non per la definizione della velocità v). In altre parole la descrizione del campo di spostamento indotto dall'onda, avviene alla scala macroscopica (coinvolge, cioè modulazioni spaziali su scala molto maggiore delle tipiche distanze interatomiche). Questa conclusione è ulteriormente rafforzata dalla semplice dimostrazione che la legge del moto data in eq.(1.2) si trasforma nel limite $q \rightarrow 0$ nella

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

dove x individua la direzione di propagazione dell'onda. L'eq.(1.5) è l'equazione di d'Alembert per la propagazione delle onde meccaniche nei materiali e sottintende una visione del materiale come un continuo. Questo è proprio la conclusione concettuale importante di questa introduzione: ove si sia interessati a studiare le deformazioni (statiche o dinamiche) di un mezzo materiale su una scala spaziale macroscopica, si può ignorare il dettaglio delle vibrazioni reticolari e *considerare il mezzo come un continuo deformabile*. Questa ipotesi di continuità materiale è alla base della teoria della elasticità e della plasticità che verranno trattate a livello elementare nei prossimi Capitoli.

Capitolo 2

Deformazioni e sforzi nei mezzi continui

È necessario iniziare con una precisazione relativa alla notazione. Nel seguito di questa Dispensa si assume la convenzione che *indici ripetuti sono saturati*. Ovvero:

$$a_i b_i = \sum_i a_i b_i \quad \text{e} \quad A_{ij} B_{jk} = \sum_j A_{ij} B_{jk} \quad (2.1)$$

dove \vec{a} e \vec{b} sono vettori e \hat{A} e \hat{B} sono tensori del secondo ordine.

2.1 Tensore delle deformazioni

Si consideri un mezzo continuo, la posizione dei cui punti materiali è riferita, come indicato in Fig. 2.1 (sinistra), ad una terna cartesiana e definita dai vettori \vec{x} . Quando il mezzo è sottoposto ad una deformazione arbitraria, tutti i suoi punti materiali subiranno uno spostamento nello spazio e le loro posizioni deformate saranno indicate dai vettori \vec{X} . L'unica ipotesi restrittiva che imponiamo è che si operi in regime di *piccole deformazioni*.

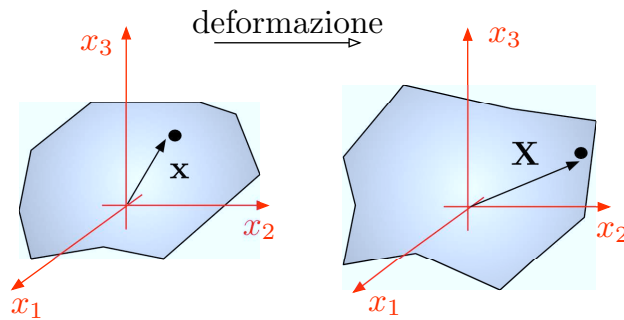


Figura 2.1: Definizione dei vettori posizione per i punti materiali di un mezzo continuo prima (sinistra) e dopo (destra) l'applicazione di una deformazione.

La relazione generale esistente tra i vettori \vec{x} e \vec{X} può essere esplicitata come

$$\vec{X} = \vec{f}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{u}(\vec{x}) \quad (2.2)$$

dove i vettori $\vec{u}(\vec{x})$ rappresentano gli *spostamenti* e, nel caso generale di un corpo di forma arbitraria sottoposto ad una generica deformazione, risultano diversi per ciascun punto materiale. In generale, avremo quindi

$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{cases} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (2.3)$$

La matrice jacobiana $\hat{J} = \{J_{ij}, i, j = 1, 2, 3\}$ dello spostamento dal sistema dei vettori \vec{x} a quello degli \vec{X} è definita da

$$J_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

La matrice jacobiana \hat{J} può essere scritta come somma di una *parte simmetrica* ed una *parte antisimmetrica* come segue

$$\begin{aligned} J_{ij} &= \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{parte simmetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\text{parte antisimmetrica}} \\ &= \epsilon_{ij} + \Omega_{ij} \end{aligned} \quad (2.5)$$

con le condizioni evidenti

$$\begin{cases} \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ji} \\ \Omega_{ij} &= -\Omega_{ji} \end{cases} \quad (2.6)$$

La quantità $\hat{\epsilon} = \{\epsilon_{ij}\}$ si chiama *tensore delle (piccole) deformazioni*, mentre la quantità $\hat{\Omega} = \{\Omega_{ij}\}$ rappresenta il *tensore delle rotazioni locali*. È possibile dimostrare che, per una piccola rotazione locale, si ha $\hat{J} = \hat{\Omega}$ e quindi $\hat{\epsilon} = 0$. Quindi la forma simmetrizzata del tensore delle deformazioni è un oggetto che non tiene in considerazione le rotazioni locali.

Il tensore delle (piccole) deformazioni contiene tutte le informazioni che riguardano localmente la trasformazione geometrica di un corpo e, quindi, deve poter prevedere come variano le lunghezze e gli angoli in ciascuna regione dello stesso. In particolare, si dimostra che:

- per le *variazioni di lunghezza* vale

$$\epsilon_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot (\hat{\epsilon} \vec{n}) \quad (2.7)$$

dove abbiamo indicato con $\epsilon_{\vec{n}}$ la variazione relativa di lunghezza tra due punti interni A e B del corpo considerato e con \vec{n} il versore della distanza $A - B$

- per le *variazioni angolari* vale

$$\Delta \alpha_{\vec{n}_1, \vec{n}_2} = 2\vec{n}_1 \cdot (\hat{\epsilon} \vec{n}_2) \quad (2.8)$$

dove abbiamo indicato con \vec{n}_1 il versore della distanza tra due punti A e B e con \vec{n}_2 il versore della distanza tra due punti A e C ; l'angolo tra le direzioni individuate dai suddetti versori è $\alpha_{\vec{n}_1, \vec{n}_2}$.

Riassumendo, possiamo dire che lo spostamento $\vec{u}(\vec{x})$ è il campo che descrive in modo completo la deformazione di un corpo. Invece, il tensore $\hat{\epsilon}$ è introdotto allo scopo di legare la fisica delle forze di deformazione alla geometria locale delle deformazioni. È, infatti, facile convincersi che localmente una rotazione non può produrre deformazioni legate all'azione di forze che si trasmettono in quell'intorno del mezzo materiale. Pertanto, in teoria della elasticità la relazione che lega le azioni di forze meccaniche alla deformazione è basata unicamente sul tensore in forma simmetrizzata

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.9)$$

Questa definizione è anche nota come *condizione di congruenza*.

2.1.1 Esempi di calcolo delle deformazioni

Presentiamo brevemente, a titolo esemplificativo, il calcolo esplicito del tensore delle piccole deformazioni in due casi particolarmente semplici, ma importanti nelle applicazioni.

Trazione (o compressione) semplice

Si consideri un solido di forma, dimensioni ed orientamento indicati in Fig. 2.2. Supponiamo che esso sia soggetto ad una trazione lungo x_1 . Trascureremo, per semplicità, tutte le deformazioni nelle direzioni x_2 e x_3 .

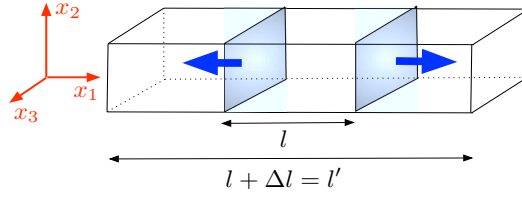


Figura 2.2: Esempio di trazione semplice.

Possiamo calcolare la variazione frazionaria di lunghezza s del solido come

$$s = \frac{l' - l}{l} = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.10)$$

in modo tale che la lunghezza totale dopo l'applicazione della trazione sia $l' = (1 + s)l$. Questo ragionamento è ovviamente valido per un qualunque strato interno al solido, anche se di spessore infinitesimo: lo spessore iniziale dx_1 diventerà $dx'_1 = (1 + s)dx_1$ per effetto della trazione. Dunque, possiamo scrivere

$$\int_0^{x_1} dx'_1 = \int_0^{x_1} (1 + s)dx_1 = (1 + s)x_1 \quad (2.11)$$

da cui è possibile calcolare lo spostamento $u_1(x_1)$ di uno strato infinitesimo in origine sistemato nel punto x_1 come

$$u_1(x_1) = (1 + s)x_1 - x_1 = sx_1 \quad (2.12)$$

Per applicazione diretta della definizione data in Eq. (2.9) otteniamo

$$\frac{du_1(x_1)}{dx_1} = s = \epsilon_{11} \quad (2.13)$$

tutti gli altri elementi del tensore $\hat{\epsilon}$ essendo nulli per le ipotesi scelte. In conclusione, otteniamo il tensore delle deformazioni per una trazione (o compressione) semplice nella forma

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Deformazione di taglio puro

Con riferimento alla Fig. 2.3 si consideri il caso di un solido, due facce opposte del quale sono spostate di un tratto Δl in direzioni antiparallele. Durante questo duplice spostamento si supponga di mantenere la distanza l tra le due facce inalterata.

In questo caso la variazione frazionaria di lunghezza s lungo la direzione dello sforzo di taglio è

$$s = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.15)$$

cui corrisponde un vettore spostamento $\vec{u} = (0, sx_1, 0)$. Per applicazione diretta della Eq. (2.9) otteniamo il tensore delle deformazioni per un puro taglio nella forma

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{s}{2} & 0 \\ \frac{s}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

2.2 Tensore degli sforzi

Si consideri la situazione in cui un corpo solido è soggetto a forze esterne. Il sistema di forze che complessivamente si instaurano in un solido è comprende

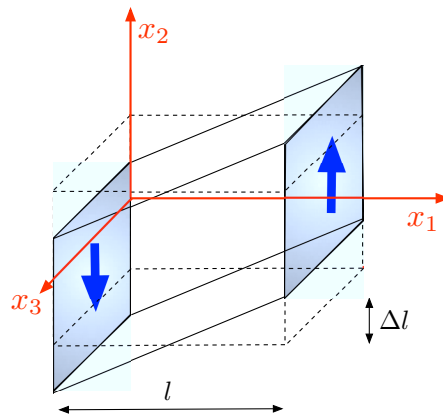


Figura 2.3: Esempio di sforzo di taglio puro.

- le *forze di volume*. Esse sono dipendenti unicamente dai campi esterni che agiscono sul solido e vengono descritte dal vettore $\vec{b}(\vec{x})$ che rappresenta la loro densità. Il significato fisico di tale densità si riassume dicendo che la forza totale $d\vec{F}_V$ applicata ad un piccolo volume dV centrato sul punto \vec{x} è data da $d\vec{F}_V = \vec{b}(\vec{x})dV$. Il vettore $\vec{b}(\vec{x})$ rappresenta quindi una forza per unità di volume. Il caso tipico è quello delle forze gravitazionali che sono proporzionali alla massa della porzione di volume su cui agiscono.
- le *forze di superficie*. Esse sono dovute alle azioni di forza che ciascuna porzione di solido (in Fig. 2.4 indicata dalla porzione interna alla linea tratteggiata) subisce dalla parte rimanente del mezzo continuo (quella esterna alla linea tratteggiata).

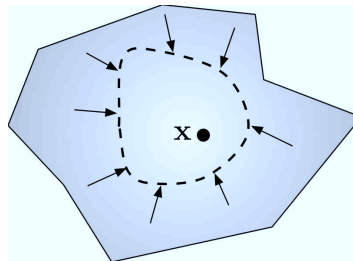


Figura 2.4: Illustrazione schematica delle forze di superficie che agiscono sul contorno di una qualunque porzione (linea tratteggiata) di corpo solido.

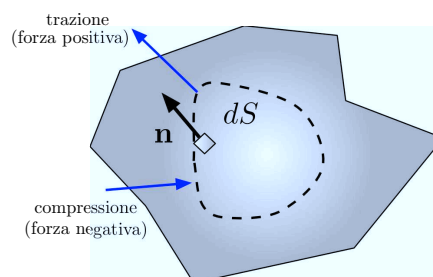


Figura 2.5: Convenzione sui segni delle forze superficiali di trazione e compressione.

La convenzione universalmente accettata prevede che, definito il versore normale uscente \vec{n} all'elemento di superficie dS , una forza di superficie sia *negativa* se orientata oppostamente ad \vec{n} , ovvero sia *positiva* se concorde allo stesso. Dunque, le *forze di compressione* sono *negative*, mentre le *forze di trazione* (o tensili) sono *positive*. La convenzione è illustrata in Fig. 2.5.

Risulterà utile introdurre la seguente notazione per la forza di superficie infinitesima $d\vec{F}_S$ agente sull'elemento dS

$$d\vec{F}_S = \vec{f}dS \quad (2.17)$$

dove \vec{f} assume il significato fisico di una densità di forze per unità di superficie.

È possibile dimostrare in modo rigoroso che esiste (ed è unico) un tensore \hat{T} di rango 3×3 tale per cui

$$\vec{f} = \hat{T}\vec{n} \quad (2.18)$$

Si dimostra, inoltre, che il tensore \hat{T} è simmetrico: $T_{ij} = T_{ji}$. L'esistenza del tensore \hat{T} è un risultato universalmente noto come *teorema di Cauchy*. Grazie a questo teorema è possibile scrivere la forza totale di superficie come

$$d\vec{F}_S = \hat{T}\vec{n}dS \quad (2.19)$$

ovvero

$$dF_{S,i} = T_{ij}n_jdS \quad \rightarrow \quad \frac{dF_{S,i}}{dS} = T_{ij}n_j \quad (2.20)$$

2.2.1 Significato fisico del tensore degli sforzi

Supponiamo che \hat{T} sia diagonale

$$T_{ij} = \sigma\delta_{ij} \quad (2.21)$$

(abbiamo usato la notazione δ_{ij} per l'indice di Kroenecker). In questo caso si ricava subito che

$$\frac{dF_{S,i}}{dS} = \sigma n_i \quad (2.22)$$

e, pertanto, la quantità σ rappresenta in questo caso la pressione idrostatica (di compressione o di trazione, a seconda del segno di σ) applicata sul corpo solido.

Supponiamo, invece, che il tensore \hat{T} sia ora dato nella forma

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

dove τ è una quantità nota (detta sforzo di taglio). Si ricava immediatamente

$$\frac{dF_{S,1}}{dS} = \tau n_2 \quad \frac{dF_{S,2}}{dS} = \tau n_1 \quad \frac{dF_{S,3}}{dS} = 0 \quad (2.24)$$

che corrisponde all'applicazione di uno *sforzo di taglio* tangenziale alle superfici dS , con due componenti non nulle parallele, rispettivamente, all'asse di indice 1 e di indice 2. Infatti, se $\vec{n} \parallel x_1$, allora $\hat{T}\vec{n} \perp \vec{n}$; analogo risultato vale se $\vec{n} \parallel x_2$. In altre parole, riferendosi alla Fig. 2.6, si può dire che alla faccia numero 2 è applicata una forza per unità di superficie di intensità τ diretta lungo x_1 ed alla faccia numero 1 è applicata una forza sempre di intensità τ , ma diretta lungo x_2 . Entrambe queste forze agiscono quindi tangenzialmente alle facce indicate del cubo. Inoltre, si osservi come l'applicazione di tali forze tenda a trasformare la faccia quadrata numero 4 (o analogamente la 3) in un rombo con l'angolo nell'origine degli assi che è acuto se $\tau > 0$ ed ottuso se $\tau < 0$.

Concludiamo, quindi, identificando \hat{T} con il *tensore degli sforzi* ed attribuendogli il significato fisico di una *pressione vettoriale*. La sua unità di misura è dunque il Pa (notiamo che i tipici valori di sforzo che si trovano in meccanica dei solidi variano tra il MPa ed il GPa). Al fine di meglio comprendere tale attribuzione, si consideri l'elemento di volume cubico riportato in Fig. 2.6: esso rappresenta una porzione infinitesima $dV = (dl)^3$ di un qualunque corpo solido. Le sei facce del cubo sono numerate secondo la notazione di Voigt (si veda Sez. 2.2). Qualora su tale elemento di volume agisca uno sforzo descritto dal tensore \hat{T} , le sue nove componenti hanno il significato illustrato in Fig. 2.7. Dunque, la componente T_{ij} rappresenta la pressione esistente sulla faccia di indice j ed agente lungo la direzione i .

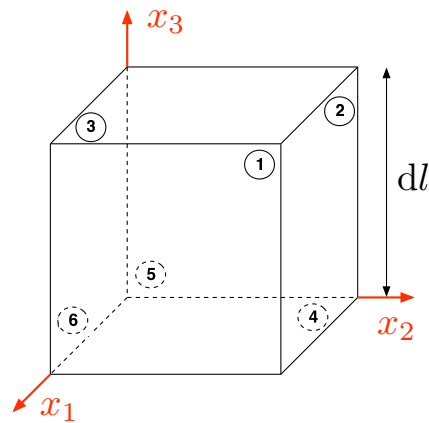


Figura 2.6: Elemento di volume infinitesimo di un qualunque corpo solido. Le sei facce del cubo sono numerate secondo la notazione di Voigt.

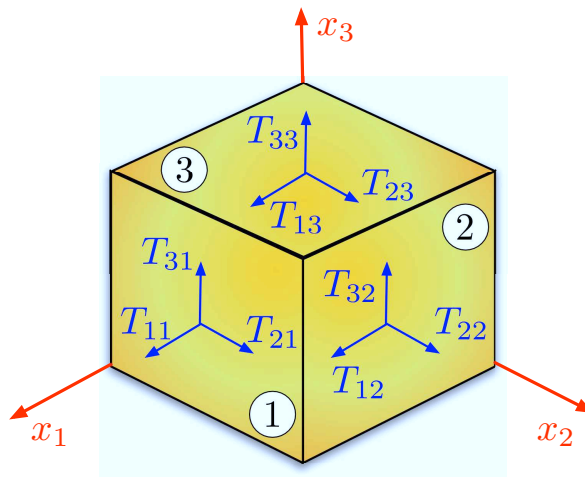


Figura 2.7: Significato geometrico degli indici del tensore degli sforzi \hat{T} .

2.3 Struttura formale della meccanica dei solidi

Gli oggetti matematici introdotti sino a questo punto sono legati da un complesso di quattro equazioni che costituiscono la struttura formale della meccanica del continuo.

Le prime due equazioni – derivate, rispettivamente, dalla *prima e seconda equazione cardinale della meccanica razionale* – discendono direttamente dal bilancio della quantità di moto e del momento della quantità di moto per un sistema di punti materiali. In particolare, nel caso statico, esse rappresentano le condizioni di equilibrio traslazionale e rotazionale di un corpo (si ricordi che l'equilibrio si ha quando la risultante delle forze applicate è nulla e la risultante dei momenti applicati è nullo). Esse sono le prime due relazioni fondamentali della meccanica dei continui e possono essere espresse nel seguente modo

$$\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_i} + b_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

e

$$T_{ij} = T_{ji} \quad (2.26)$$

dove ρ rappresenta la densità volumetrica di massa del mezzo considerato. Queste equazioni sono derivate esplicitamente in Appendice D.

La terza equazione è la *relazione di congruenza* già introdotta

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.27)$$

La quarta equazione descrive fisicamente la relazione tra la deformazione applicata e lo sforzo risultante (o, equivalentemente, tra lo sforzo applicato e la conseguente deformazione osservata)

$$T_{ij} = f(\epsilon_{ij}) \quad (2.28)$$

Essa è detta *equazione costitutiva*. Va sottolineato che la struttura formale della meccanica dei solidi non è in grado di ricavare tale relazione costitutiva che, invece, deve essere assunta *a priori* del problema meccanico di interesse. Ogni risultato del continuo, dunque, è profondamente legato alla specifica equazione costitutiva che è stata adottata sulla base della conoscenza fenomenologica del mezzo fisico o sulla base della convenienza formale (o numerica). Questo è uno dei punti concettualmente più rilevanti dove la teoria atomistica può giocare un ruolo importante. Infatti, in linea di principio, una volta assegnato il più opportuno modello di coesione atomica (empirico o basato su una più rigorosa descrizione delle struttura elettronica del solido considerato), è possibile ricavare in modo esatto (senza ipotesi di convenienza, nè su base puramente empirica) la effettiva relazione costitutiva sforzo-deformazione.

L'Eq. (2.28) assume in ogni punto del solido un'applicazione che associa biunivocamente un tensore degli sforzi ad un dato tensore delle deformazioni. Durante una deformazione, la rimozione delle forze esterne applicate comporta il ritorno del solido nelle condizioni iniziali di stato naturale. Tale stato naturale, o indeformato, corrisponde ad assenza di sforzi all'interno del corpo ($\hat{T} = 0$ se $\hat{\epsilon} = 0$ e viceversa). Per molti materiali l'Eq. (2.28) risulta lineare entro certi limiti di deformazione e/o sforzo. Altre volte le equazioni costitutive devono necessariamente contenere termini non lineari (per esempio quadratici e cubici nelle deformazioni) per rappresentare il comportamento reale del mezzo.

Un altro aspetto importante della teoria dell'elasticità riguarda l'ipotesi di piccole deformazioni: quando tale assunzione è lecita, la teoria si sviluppa come descritto nel seguito di questa Dispensa; nel caso si debbano tenere in conto deformazioni di entità superiore bisogna adottare uno schema più raffinato che esula dagli scopi di questa trattazione per sconfinare nella teoria dell'elasticità per grandi deformazioni.

Capitolo 3

Mezzo continuo lineare elastico

3.1 Risposta elastica lineare: proprietà formali generali

Il formalismo sviluppato nel precedente Capitolo è esatto e di validità generale, sotto l'unica condizione che si stiano considerando piccoli spostamenti. Tuttavia, il dispositivo teorico è del tutto generico e, al fine di procedere oltre, è necessario esprimere in maniera esplicita l'equazione costitutiva per la tipologia di comportamento meccanico che si intende studiare. L'approssimazione più ampiamente diffusa e studiata - nonchè di amplissima utilità pratica - equivale ad assumere che la risposta del sistema all'azione di uno sforzo sia *elastica lineare*. L'equazione costitutiva associata si scrive come

$$T_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (3.1)$$

dove le C_{ijkl} sono opportune costanti. L'Eq. (3.1) è di validità generale, comprendendo cioè ogni possibile caso di simmetria cristallina e/o anisotropia. Il tensore \hat{C} ha $3^4 = 81$ componenti ed è noto come *tensore elastico* o *delle costanti elastiche*. Il numero effettivo delle sue componenti indipendenti è necessariamente ridotto da relazioni matematiche universalmente valide. Infatti:

- la simmetria del tensore degli sforzi impone che

$$C_{ijkl} = C_{jikh} \quad (3.2)$$

- la simmetria del tensore delle deformazioni impone che

$$C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (3.3)$$

- considerazioni energetiche¹ impongono che

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3.4)$$

La conseguenza pratica di questa gerarchia di simmetrie è che il tensore \hat{C} ha solamente 21 componenti indipendenti, nel caso più generale. Ulteriore riduzione del numero di componenti indipendenti è imposta dalla simmetria cristallina del solido considerato.

3.2 Notazione di Voigt

Le simmetrie dei tensori $\hat{\epsilon}$, \hat{T} e \hat{C} suggeriscono di utilizzare una notazione semplificata, detta *notazione di Voigt*: anziché rappresentare $\hat{\epsilon}$ e \hat{T} tramite le corrispondenti matrici $\{\epsilon_{ij}\}$ e $\{T_{ij}\}$, è conveniente utilizzare dei vettori colonna, i cui elementi rappresentino le sei componenti indipendenti della deformazione e dello sforzo.

¹Questo argomento verrà affrontato nel prossimo Capitolo

Per formalizzare questa convenienza dobbiamo innanzitutto ricordare che noi abbiamo sempre indicato le direzioni cartesiane (x, y, z) con gli indici $(1, 2, 3)$. Le sei componenti indipendenti del tensore delle deformazioni possono, dunque, essere arrangiate in un unico vettore colonna come segue

$$\tilde{\epsilon} = \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{bmatrix}}_{\text{indici cartesiani}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{bmatrix}}_{\text{indici numerici}} \quad (3.5)$$

A questo punto, procediamo con l'identificazione di ciascuna coppia di *indici cartesiani* con un indice numerico, secondo lo schema seguente

$$xx \rightarrow 1 \quad yy \rightarrow 2 \quad zz \rightarrow 3 \quad xy \rightarrow 4 \quad yz \rightarrow 5 \quad xz \rightarrow 6 \quad (3.6)$$

In questo modo, il vettore colonna $\tilde{\epsilon}$ viene indicato come

$$\tilde{\epsilon} = \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{bmatrix}}_{\text{notazione esplicita}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}}_{\text{notazione compatta di Voigt}} \quad (3.7)$$

In maniera del tutto analoga si può procedere per il tensore degli sforzi

$$\tilde{T} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{xy} \\ T_{yz} \\ T_{xz} \end{bmatrix}}_{\text{notazione esplicita}} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix}}_{\text{notazione compatta di Voigt}} \quad (3.8)$$

D'ora in poi $\tilde{\epsilon}$ e \tilde{T} rappresenteranno i vettori associati ai tensori $\hat{\epsilon}$ e \hat{T} , mediante la convenzione di Voigt. In tale ipotesi il tensore elastico \mathcal{C}_{ijkl} a quattro indici si trasforma in una matrice quadrata, avente sei righe e sei colonne, che indicheremo con $\tilde{\mathcal{C}}$. Ovviamente vale

$$\tilde{T} = \tilde{\mathcal{C}} \tilde{\epsilon} \quad (3.9)$$

che espressamente diventa

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{11} & \mathcal{C}_{12} & \mathcal{C}_{13} & \mathcal{C}_{14} & \mathcal{C}_{15} & \mathcal{C}_{16} \\ \mathcal{C}_{12} & \mathcal{C}_{22} & \mathcal{C}_{23} & \mathcal{C}_{24} & \mathcal{C}_{25} & \mathcal{C}_{26} \\ \mathcal{C}_{13} & \mathcal{C}_{23} & \mathcal{C}_{33} & \mathcal{C}_{34} & \mathcal{C}_{35} & \mathcal{C}_{36} \\ \mathcal{C}_{14} & \mathcal{C}_{24} & \mathcal{C}_{34} & \mathcal{C}_{44} & \mathcal{C}_{45} & \mathcal{C}_{46} \\ \mathcal{C}_{15} & \mathcal{C}_{25} & \mathcal{C}_{35} & \mathcal{C}_{45} & \mathcal{C}_{55} & \mathcal{C}_{56} \\ \mathcal{C}_{16} & \mathcal{C}_{26} & \mathcal{C}_{36} & \mathcal{C}_{46} & \mathcal{C}_{56} & \mathcal{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

che dimostra come le componenti indipendenti del tensore elastico sono 21. Introduciamo anche le relazioni inverse mediante la formula

$$\hat{\epsilon} = \hat{\mathcal{D}} \hat{T} \quad (3.11)$$

con $\hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{C}}^{-1}$; analogamente

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{\mathcal{D}} \tilde{T} \quad (3.12)$$

con $\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{C}}^{-1}$. Le nuove quantità $\hat{\mathcal{D}}$ e $\tilde{\mathcal{D}}$ sono dette *tensori di cedevolezza* (o *flessibilità*).

3.3 Mezzo omogeneo ed isotropo

Un caso di grande importanza in meccanica dei solidi (sia sotto il profilo concettuale, sia sotto il profilo applicativo) è quello di un *mezzo continuo, omogeneo ed isotropo*:

- per omogeneità si intende che il comportamento meccanico del mezzo è identico in tutti i suoi punti: formalmente cioè equivale a dire che il tensore elastico non dipende dalle coordinate del punto considerato
- per isotropia si intende che le proprietà meccaniche non dipendono dalla direzione considerata: formalmente ciò equivale a dire che tali proprietà sono invarianti per rotazioni

Un esempio di mezzo elastico, omogeneo ed isotropo è quello di un materiale che, a parità di trazione, si allunga della stessa quantità indipendentemente dalla direzione lungo la quale viene applicato lo sforzo ed indipendentemente dal punto ove viene applicato lo stesso. Un mezzo che gode delle proprietà di omogeneità, isotropia e linearità (elasticità) è anche detto *mezzo normale*.

Per un mezzo normale esistono due sole componenti indipendenti del tensore \hat{C} (cioè due sole costanti elastiche): esse sono dette *coefficienti di Lamé* e sono universalmente indicate con i simboli μ (*modulo di scorrimento* oppure *di taglio*) e λ (primo coefficiente di Lamé). Alternativamente vengono utilizzati il *modulo di Young* E ed il *coefficiente di Poisson* ν . Infine, possono essere utilizzati i moduli μ e K , quest'ultimo noto come *modulo di compressibilità*.

3.3.1 Equazione costitutiva lineare elastica

Visto che il tensore degli sforzi \hat{T} è un tensore simmetrico, esiste sicuramente una base (cioè un sistema di riferimento) in cui esso è diagonale. Mettiamoci dunque in tale sistema e indichiamo con \hat{T}^* la sua rappresentazione diagonale, dove sono non nulli unicamente gli elementi T_{11}^* , T_{22}^* e T_{33}^* . Se, poi, consideriamo il caso semplice di un mezzo normale soggetto ad uno sforzo di trazione uniassiale lungo x_1 , abbiamo che: $T_{11}^* \neq 0$, $T_{22}^* = 0$ e $T_{33}^* = 0$. L'esperienza indica che in risposta ad una tale sollecitazione il mezzo si allunga lungo la direzione x_1 e si restringe nel piano (x_2, x_3) . Possiamo formalizzare queste semplici risultanze fenomenologiche scrivendo

$$\begin{aligned}\epsilon_{11}^* &= +\frac{1}{E}T_{11}^* \\ \epsilon_{22}^* &= -\frac{\nu}{E}T_{11}^* \\ \epsilon_{33}^* &= -\frac{\nu}{E}T_{11}^* \\ \epsilon_{12}^* &= 0 \\ \epsilon_{23}^* &= 0 \\ \epsilon_{31}^* &= 0\end{aligned}\tag{3.13}$$

Il modulo di Young E descrive la variazione di lunghezza lungo la direzione di applicazione dello sforzo (si veda la prima formula in Eq. (3.13)); il coefficiente di Poisson ν descrive invece l'entità della restrizione o dilatazione nelle direzioni ortogonali (si vedano la seconda e la terza formula in Eq. (3.13)). Ovviamente nelle condizioni scelte non si osservano deformazioni di taglio.

Quando lo sforzo (pur sempre diagonale) assume carattere triassiale possiamo generalizzare le Eq. (3.13) in modo immediato

$$\begin{aligned}\epsilon_{11}^* &= \frac{1}{E} [T_{11}^* - \nu (T_{22}^* + T_{33}^*)] \\ \epsilon_{22}^* &= \frac{1}{E} [T_{22}^* - \nu (T_{11}^* + T_{33}^*)] \\ \epsilon_{33}^* &= \frac{1}{E} [T_{33}^* - \nu (T_{22}^* + T_{11}^*)] \\ \epsilon_{12}^* &= 0 \\ \epsilon_{23}^* &= 0 \\ \epsilon_{31}^* &= 0\end{aligned}\tag{3.14}$$

Anche in questo caso il tensore di sforzo è diagonale e, quindi, produce variazioni di lunghezza lungo i tre assi, senza produrre invece variazioni angolari. Si deve osservare come l'Eq. (3.14) sia una semplice sovrapposizione dei tre effetti descritti in Eq. (3.13) ed applicati ai tre differenti assi.

Siamo arrivati quindi a dire che la relazione costitutiva del mezzo ha la forma data in Eq. (3.14). Essa, come ipotizzato inizialmente, è tuttavia valida solo sulla base ortonormale che diagonalizza il tensore degli sforzi (in cui tale tensore è in forma diagonale). A noi interessa generalizzare tale relazione costitutiva ad ogni possibile sistema di riferimento e, quindi, procediamo nel seguente modo. Per cominciare osserviamo che la Eq. (3.14) può essere scritta in forma più compatta come segue

$$\begin{aligned}\epsilon_{kk}^* &= \frac{1}{E} [(1 + \nu)T_{kk}^* - \nu(T_{11}^* + T_{22}^* + T_{33}^*)] \\ \epsilon_{ij}^* &= 0 \text{ se } i \neq j\end{aligned}\quad (3.15)$$

e che vale quindi la relazione matriciale

$$\hat{\epsilon}^* = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu)\hat{T}^* - \nu\hat{I} \text{Tr}(\hat{T}^*) \right] \quad (3.16)$$

dove \hat{I} è la matrice identità 3×3 ed, inoltre, \hat{T}^* ed $\hat{\epsilon}^*$ sono diagonali. Adesso ruotiamo il sistema di riferimento mediante una matrice di rotazione arbitraria \hat{R} : a seguito di tale rotazione il tensore degli sforzi \hat{T}^* si trasforma in \hat{T} ed il tensore delle deformazioni $\hat{\epsilon}^*$ si trasforma in $\hat{\epsilon}$. Tali trasformazioni per rotazione sono evidentemente descritte dalle relazioni

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon} &= \hat{R}^T \hat{\epsilon}^* \hat{R} & \Leftrightarrow & \hat{\epsilon}^* = \hat{R} \hat{\epsilon} \hat{R}^T \\ \hat{T} &= \hat{R}^T \hat{T}^* \hat{R} & \Leftrightarrow & \hat{T}^* = \hat{R} \hat{T} \hat{R}^T\end{aligned}\quad (3.17)$$

dove \hat{R}^T rappresenta la matrice trasposta di \hat{R} . Utilizzando l'Eq. (3.16) tra i tensori diagonalizzati otteniamo

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon} &= \hat{R}^T \frac{1}{E} \left[(1 + \nu)\hat{T}^* - \nu\hat{I} \text{Tr}(\hat{T}^*) \right] \hat{R} \\ &= \frac{1}{E} \left[(1 + \nu)\hat{R}^T \hat{T}^* \hat{R} - \nu\hat{R}^T \hat{I} \hat{R} \text{Tr}(\hat{T}^*) \right] \\ &= \frac{1}{E} \left[(1 + \nu)\hat{T} - \nu\hat{I} \text{Tr}(\hat{T}^*) \right]\end{aligned}\quad (3.18)$$

Osserviamo anche che

$$\text{Tr}(\hat{T}^*) = \text{Tr}(\hat{R} \hat{T} \hat{R}^T) = \text{Tr}(\hat{R}^T \hat{R} \hat{T}) = \text{Tr}(\hat{T}) \quad (3.19)$$

avendo usato la proprietà commutativa della traccia $\text{Tr}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Tr}(\hat{B}\hat{A})$ e l'ortogonalità $\hat{R}^T \hat{R} = \hat{I}$. Combinando questi risultati, si ottiene finalmente la relazione costitutiva valida in qualsiasi sistema di riferimento (in cui sia il tensore di sforzo sia quello di deformazione non sono più in forma diagonale)

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{E} \left[(1 + \nu)\hat{T} - \nu\hat{I} \text{Tr}(\hat{T}) \right] \quad (3.20)$$

Essa scritta esplicitamente diventa

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1}{E} [T_{11} - \nu(T_{22} + T_{33})] \\ \epsilon_{22} &= \frac{1}{E} [T_{22} - \nu(T_{11} + T_{33})] \\ \epsilon_{33} &= \frac{1}{E} [T_{33} - \nu(T_{22} + T_{11})] \\ \epsilon_{12} &= \frac{1 + \nu}{E} T_{12} \\ \epsilon_{23} &= \frac{1 + \nu}{E} T_{23} \\ \epsilon_{31} &= \frac{1 + \nu}{E} T_{31}\end{aligned}\quad (3.21)$$

Si noti che in questo caso generico le variazioni angolari sono differenti da zero.

A partire dalla relazione fondamentale Eq. (3.20) è possibile trovare la relazione inversa. Innanzitutto calcoliamo la traccia del tensore delle deformazioni

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\hat{\epsilon}) &= \frac{1}{E} \left[(1 + \nu) \text{Tr}(\hat{T}) - 3\nu \text{Tr}(\hat{T}) \right] \\ &= \frac{1 - 2\nu}{E} \text{Tr}(\hat{T})\end{aligned}\quad (3.22)$$

da cui otteniamo

$$\text{Tr}(\hat{T}) = \frac{E}{1 - 2\nu} \text{Tr}(\hat{\epsilon}) \quad (3.23)$$

Dalla Eq. (3.20) otteniamo quindi il tensore degli sforzi

$$\hat{T} = \frac{E}{1 + \nu} \hat{\epsilon} + \frac{\nu}{1 + \nu} \hat{I} \text{Tr}(\hat{T}) \quad (3.24)$$

che, sostituendo il risultato di Eq. (3.23), fornisce immediatamente

$$\hat{T} = \frac{E}{1 + \nu} \hat{\epsilon} + \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \hat{I} \text{Tr}(\hat{\epsilon}) \quad (3.25)$$

La Eq. (3.25) rappresenta la relazione costitutiva nella forma inversa. A questo punto è possibile definire i coefficienti di Lamé universalmente indicati con i simboli μ e λ secondo queste relazioni

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.26)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.27)$$

Abbiamo perciò dimostrato che l'equazione costitutiva in regime lineare elastico per un mezzo omogeneo e isotropo è

$$\hat{T} = 2\mu\hat{\epsilon} + \lambda\hat{I}\text{Tr}(\hat{\epsilon}) \quad (3.28)$$

La forma tensoriale di questa equazione può essere esplicitata in componenti

$$T_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk} \quad (3.29)$$

3.3.2 Modulo di compressibilità

Consideriamo il caso di uno sforzo idrostatico descritto dal tensore

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Anche in questo caso, tramite le equazioni costitutive, si può dimostrare che

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon} &= \left[\frac{1}{2\mu} - \frac{3\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \right] \sigma \hat{I} \\ &= \frac{1}{2\mu + 3\lambda} \sigma \hat{I} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{\lambda + \frac{2}{3}\mu} \sigma \hat{I}\end{aligned}\quad (3.31)$$

Questo risultato permette di introdurre un nuovo parametro fisico di grande importanza ed estesamente utilizzato in meccanica dei solidi: il modulo di compressibilità K

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (3.32)$$

così che

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{3K} \sigma \hat{I} \quad (3.33)$$

che riassume la relazione sforzo-deformazione nel caso di una pressione idrostatica di intensità σ in un modo estremamente compatto. Si osservi inoltre che la relazione

$$\text{Tr}(\hat{\epsilon}) = \frac{\sigma}{K} \quad (3.34)$$

rappresenta un risultato importante perché descrive la *variazione volumetrica locale nel caso di sforzo idrostatico*. Questo risultato, quindi, giustifica completamente la definizione di K mediante l'Eq. (3.32). Si osservi, inoltre, che l'equazione costitutiva fondamentale può essere scritta in termini del modulo di scorrimento e del modulo di compressibilità

$$\begin{aligned} \hat{T} &= 2\mu\hat{\epsilon} + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right) \hat{I}\text{Tr}(\hat{\epsilon}) \\ &= 2\mu \left[\hat{\epsilon} - \frac{1}{3} \hat{I}\text{Tr}(\hat{\epsilon}) \right] + 3K \left[\frac{1}{3} \hat{I}\text{Tr}(\hat{\epsilon}) \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Nell'ultima espressione la quantità $\left[\hat{\epsilon} - \frac{1}{3} \hat{I}\text{Tr}(\hat{\epsilon}) \right]$ si chiama parte deviatorica del tensore delle deformazioni e la quantità $\left[\frac{1}{3} \hat{I}\text{Tr}(\hat{\epsilon}) \right]$ si chiama parte sferica del tensore delle deformazioni. Questo risultato rappresenta l'applicazione in un caso particolare della proprietà generale tale per cui *ogni tensore può sempre essere decomposto nelle sue parti sferica e deviatorica*.

3.3.3 Moduli di elasticità

I cinque moduli di elasticità λ, μ, K, E, ν sono in relazione tra loro mediante le espressioni discusse nella Sezione precedente. Quindi, ciascuno di essi può essere scritto in funzione di altri due. Si ottiene in questo modo una serie di formule molto utili nelle applicazioni pratiche. Esse sono riportate in Tabella 2.1 dove, leggendo la Tabella per righe, si trova ciascun modulo espresso in funzione di una coppia di altri moduli.

Tabella 3.1: Relazioni tra i moduli di elasticità.

	(λ, μ)	(K, μ)	(μ, ν)	(E, ν)	(E, μ)
λ		$K - \frac{2}{3}\mu$	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	$\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$
μ				$\frac{E}{2(1+\nu)}$	
K	$\frac{3\lambda+2\mu}{3}$		$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E\mu}{3(3\mu-E)}$
E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	$2(1+\nu)\mu$		
ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$			$\frac{E-2\mu}{2\mu}$

In quanto forze per unità di superficie, i moduli E, λ, μ e K vengono misurati nel sistema internazionale in Pa (1 Pa=1 N/m²) o, più spesso, in MPa (1 MPa=1 N/mm²). Invece, il coefficiente di Poisson ν è una quantità adimensionale essendo definita come rapporto tra due deformazioni. In Tabella 2.2 si riportano i valori delle costanti E e ν per alcuni metalli. Come si può osservare, i valori di ν sono compresi tra 0.2 e 0.4 per la maggioranza dei metalli. Inoltre, in Tabella 2.3 si riportano i valori delle altre costanti elastiche λ, μ e K per gli stessi elementi.

Tabella 3.2: Valori tipici delle costanti E e ν per alcuni metalli.

Materiale	$E(10^3\text{MPa})$	ν
Acciaio	206	0.33
Alluminio	69	0.28
Argento	71	0.22
Ferro	206	0.25
Piombo	16	0.33
Rame	110	0.19
Stagno	46	0.43
Titanio	117	0.31
Tungsteno	388	0.28
Zinco	99	0.30

 Tabella 3.3: Valori tipici delle costanti λ , μ e K per alcuni metalli.

Materiale	$\lambda(\text{MPa})$	$\mu(\text{MPa})$	$K(\text{MPa})$
Acciaio	150300	77440	202000
Alluminio	34300	26950	52270
Argento	22860	29100	42260
Ferro	82400	82400	137300
Piombo	11700	6000	15700
Rame	28300	46200	59150
Stagno	98800	16100	109500
Titanio	72860	44650	102630
Tungsteno	192900	151560	294000
Zinco	57100	38100	82500

3.4 Esempi di calcolo degli sforzi

Presentiamo il calcolo esplicito del tensore degli sforzi, o di alcuni suoi elementi, in casi semplici, ma importanti nelle applicazioni pratiche.

3.4.1 Sforzo in una deformazione monoassiale

Si consideri una sbarra costituita da un materiale omogeneo, isotropo, lineare con costanti di Lamé λ e μ . Esso viene deformato per semplice trazione lungo la direzione x_1 , in modo che la sua lunghezza vari dal valore l al valore $l' = l + \Delta l$. Ci poniamo l'obiettivo di calcolare il tensore degli sforzi associato a questa trazione.

L'unica componente non nulla del tensore delle deformazioni (notazione di Voigt) è $\epsilon_1 = \frac{\Delta l}{l}$ in modo che

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\Delta l}{l} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Da questa equazione si ricava immediatamente il risultato che stiamo cercando

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} (2\mu + \lambda) \frac{\Delta l}{l} \\ \lambda \frac{\Delta l}{l} \\ \lambda \frac{\Delta l}{l} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

È interessante notare che, sebbene la deformazione sia di trazione semplice, esistono tre diverse componenti non nulle del tensore degli sforzi:

- la componente T_1 rappresenta lo sforzo che occorre applicare per allungare la sbarra lungo la direzione x_1 ;
- le componenti T_2 e T_3 rappresentano gli sforzi tensili che è necessario applicare lungo le direzioni trasverse x_2 e x_3 , rispettivamente, al fine di mantenere il valore della sezione della sbarra fisso al valore iniziale.

3.4.2 Sforzo in una deformazione di taglio

Lo stesso sistema di cui al caso precedente, è ora soggetto ad una deformazione di taglio puro. Il tensore delle deformazioni in notazione esplicita è dato dalla Eq. (2.16), cui corrisponde in notazione di Voigt il vettore 6-dimensionale

$$\tilde{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{s}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta l}{2l} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Applicando ancora una volta l'equazione costitutiva lineare

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta l}{2l} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

otteniamo immediatamente lo sforzo risultante

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu \frac{\Delta l}{l} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Questo risultato giustifica pienamente il nome “modulo di taglio” dato al coefficiente di elasticità μ : esso, infatti, mette in relazione l'entità della deformazione di taglio direttamente con lo sforzo di taglio applicato.

Capitolo 4

Energia elastica

4.1 Deformazioni a temperatura nulla

La meccanica elementare insegna che una forza di tipo conservativo è calcolata dal gradiente della funzione energia potenziale associata a quel campo di forze. Considerando un mezzo continuo elastico a temperatura nulla, possiamo facilmente ammettere che esista la funzione *energia potenziale elastica*¹. Indicato con U il suo valore per unità di volume, possiamo generalizzare la relazione forza–potenziale della meccanica elementare al caso in cui le forza corrisponda, in realtà, al campo di sforzo T_{ij} presente nel mezzo ed il gradiente di U vada calcolato, in realtà, rispetto al campo di deformazione ϵ_{ij} . Otteniamo, dunque

$$T_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (4.1)$$

Questo è un risultato fondamentale che può essere riassunto come segue: *esiste una densità di energia potenziale elastica dalla quale è possibile ottenere la relazione costitutiva del mezzo*. Se consideriamo un intervallo infinitesimo di tempo dt possiamo anche scrivere

$$\frac{dU}{dt} = T_{ij} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} \quad (4.2)$$

che rappresenta la più generale espressione possibile che lega l'energia elastica accumulata nel mezzo per unità di tempo, per effetto di una deformazione variabile nel tempo.

Nel caso in cui il mezzo sia lineare (ma, in generale, anisotropo) sappiamo che l'equazione costitutiva si scrive nella forma $T_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$. Da tale relazione otteniamo $C_{ijkl} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}}$, ovvero usando l'Eq. (4.1), possiamo scrivere

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 U}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}} \quad (4.3)$$

Questa relazione rende evidente la simmetria del tensore elastico nelle due coppie di indici (ij) e (kl) , poichè la derivata seconda di una funzione sufficientemente regolare è permutabile. È inoltre possibile per il caso lineare esplicitare la funzione U in una forma molto compatta di grande utilità applicativa. Infatti, dalla relazione data in Eq. (4.2) si ha

$$\frac{dU}{dt} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \frac{d\epsilon_{ij}}{dt} \quad (4.4)$$

che, sfruttando la proprietà di simmetria appena ricavata, si riscrive come

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \frac{d(\epsilon_{ij}\epsilon_{kl})}{dt} \quad (4.5)$$

ovvero

$$U = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (4.6)$$

¹Si pensi all'analogia con il caso di un oscillatore armonico unidimensionale di costante elastica k dove: $U = \frac{1}{2} kx^2$ e quindi $F = -kx$.

Questa relazione può essere ulteriormente sviluppata nel caso di mezzo lineare e isotropo, assumendo una forma molto compatta

$$\begin{aligned}
 U(\hat{\epsilon}) &= \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} = \frac{1}{2} T_{ij} \epsilon_{ij} \\
 &= \frac{1}{2} (2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij}) \epsilon_{ij} \\
 &= \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{kk} \epsilon_{ii}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

dove abbiamo fatto uso esplicito dei coefficienti di Lamé introdotti nel Capitolo precedente. Ora, visto che $\epsilon_{kk} = \epsilon_{ii} = \text{Tr}(\hat{\epsilon})$ e che $\epsilon_{ij} \epsilon_{ij} = \text{Tr}(\hat{\epsilon}^2)$ possiamo scrivere

$$U(\hat{\epsilon}) = \mu \text{Tr}(\hat{\epsilon}^2) + \frac{1}{2} \lambda [\text{Tr}(\hat{\epsilon})]^2 \tag{4.8}$$

che rappresenta la forma più generale per la *dipendenza della densità di energia potenziale elastica dalla deformazione in un mezzo elastico omogeneo ed isotropo* per deformazioni a temperatura nulla.

4.2 Deformazione a temperatura finita

Passiamo ora a considerare il caso di deformazioni che avvengono a *temperatura finita*. Ci limiteremo a considerare unicamente *trasformazioni termodinamiche in regime quasi-statico*: in altre parole, la deformazione applicata al mezzo avviene in tempi sufficientemente lunghi da permettere di considerare sempre il sistema all'equilibrio termodinamico istantaneo (ad una data temperatura).

4.2.1 Potenziali termodinamici

A temperatura maggiore di zero, tutti i moti di agitazione termica dei costituenti elementari del nostro mezzo sono attivi. Risulta pertanto necessario considerare il loro contributo energetico, nonchè il contributo che descrive il trasferimento di calore dal mezzo elastico all'ambiente esterno o viceversa. È proprio tramite questo meccanismo che il sistema può scambiare calore con l'ambiente esterno, secondo la

$$dQ = T dS \tag{4.9}$$

dove T rappresenta la temperatura, S rappresenta l'entropia per unità di volume e Q il calore assorbito per unità di volume. Possiamo, quindi, scrivere il primo principio della termodinamica nella forma completa

$$dU = T_{ij} d\epsilon_{ij} + dQ = T_{ij} d\epsilon_{ij} + T dS \tag{4.10}$$

dove la grandezza U ora assume il significato di una *densità di energia interna* del sistema in oggetto. Questo risultato rappresenta *l'equazione fondamentale della termodinamica dei mezzi continui deformati quasi-staticamente* (ovvero, reversibilmente).

Nel caso di deformazioni particolari l'Eq. (4.10) si riconduce facilmente ai risultati canonici della termodinamica classica. Consideriamo, infatti, il caso di una deformazione di compressione o espansione, che risulti descritta da un tensore degli sforzi del tipo $T_{ij} = -\mathcal{P} \delta_{ij}$. In questa espressione, la grandezza \mathcal{P} rappresenta la pressione idrostatica applicata, mentre il segno negativo indica che tale pressione viene esercitata sul sistema. Sotto queste condizioni risulta immediatamente che

$$T_{ij} d\epsilon_{ij} = -\mathcal{P} \delta_{ij} d\epsilon_{ij} = -\mathcal{P} d\text{Tr}(\hat{\epsilon}) \tag{4.11}$$

Il termine $d\text{Tr}(\hat{\epsilon}) = dV$ rappresenta ovviamente la variazione di volume (per unità di volume). Il bilancio energetico per un sistema compresso idrostaticamente in modo reversibile risulta

$$dU = T dS - \mathcal{P} dV \tag{4.12}$$

come noto dalla termodinamica elementare (anche se in questo caso ciascuna grandezza estensiva è espressa per unità di volume; al contrario, temperatura e pressione essendo grandezze intensive sono misurate nelle unità convenzionali).

In aggiunta all'energia interna U possiamo anche definire l'*energia libera di Helmholtz* \mathcal{F} (per unità di volume) come

$$\mathcal{F} = U - \mathcal{T}S \quad (4.13)$$

Tramite questo potenziale termodinamico possiamo stabilire delle espressioni operative inverse che consentono di calcolare direttamente il tensore degli sforzi. Ad esempio è facile ricavare che

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \left. \frac{\partial U}{\partial \epsilon_{ij}} \right|_S \\ &= \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon_{ij}} \right|_{\mathcal{T}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

dove si intende che nei due casi debbano essere mantenute costanti l'entropia o la temperatura, rispettivamente.

4.2.2 Mezzi omogenei ed isotropi

Si consideri un mezzo omogeneo ed isotropo in regime di piccole deformazioni reversibili, e si consideri la temperatura \mathcal{T} uniforme e costante in tutto il mezzo. Chiamiamo \mathcal{F}_0 la sua energia libera in assenza di deformazioni, ma alla stessa temperatura osservata quando esse sono in azione. Poiché, come detto, le deformazioni sono piccole, possiamo assumere che il potenziale \mathcal{F} sia espandibile in serie di potenze delle deformazioni

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon_{ij}} \right|_{\mathcal{T}} \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{hk}} \right|_{\mathcal{T}} \epsilon_{ij} \epsilon_{hk} + \dots \quad (4.15)$$

Il termine al primo ordine in ϵ_{ij} deve necessariamente essere nullo: vale, infatti, l'Eq. (4.14) e per di più all'equilibrio (cioè in assenza di deformazioni) lo sforzo T_{ij} è nullo. Dunque, i primi termini da considerare nello sviluppo sono quelli quadratici. Ci arresteremo, poi, proprio a quest'ordine, ancora una volta ricordando che le deformazioni sono per ipotesi piccole. Poiché il termine \mathcal{F}_0 è definito a meno di una costante arbitraria, è conveniente assumere anche che $\mathcal{F}_0 = 0$. Ricordando, inoltre, che l'energia libera \mathcal{F} è ovviamente uno scalare, possiamo concludere che anche il termine quadratico nella deformazione dovrà esserlo. Poiché il tensore delle piccole deformazioni $\hat{\epsilon}$ è simmetrico, possiamo con i suoi elementi costruire due sole grandezze scalari indipendenti: $[\text{Tr}(\hat{\epsilon})]^2$ e $\text{Tr}(\hat{\epsilon}^2)$. Poiché $\epsilon_{ii} = \epsilon_{jj} = \text{Tr}(\hat{\epsilon})$ e $\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} = \text{Tr}(\hat{\epsilon}^2)$, possiamo finalmente scrivere

$$\mathcal{F}(\epsilon_{ij}) = c_1 \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + c_2 \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \quad (4.16)$$

che rappresenta l'espressione generale per l'*energia libera di un mezzo omogeneo ed isotropo*. Se associamo le due costanti c_1 e c_2 ai coefficienti di Lamé secondo le relazioni

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\lambda}{2} \\ c_2 &= \mu \end{aligned} \quad (4.17)$$

troviamo una spiegazione termodinamica esauriente del perché un mezzo omogeneo e isotropo in regime lineare sia caratterizzato da due soli moduli elastici.

L'espressione esplicita che abbiamo appena ricavato per l'energia libera come funzione della deformazione consente di dimostrare delle condizioni fondamentali che i moduli elastici devono soddisfare. In condizioni di equilibrio \mathcal{F} è minima e, in particolare, vale zero per quella particolare deformazione corrispondente a $\epsilon_{ij} = 0 \quad \forall i, j$. Quindi, la forma quadratica data in Eq. (4.16) è definita positiva. In altri termini, possiamo dire che il solido elastico in condizione non deformata deve essere in equilibrio stabile per ipotesi e, quindi, l'energia potenziale relativa deve avere un minimo in corrispondenza a tale condizione. Ponendo a zero l'energia potenziale in condizione non deformata, risulta che deve essere sempre positiva la funzione definita in Eq. (4.16). Supponiamo ora di applicare una deformazione tale per cui $\epsilon_{ii} = 0$. Allora si deve avere che

$$\mathcal{F} = c_2 \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} > 0 \quad \implies c_2 > 0 \quad (4.18)$$

Se invece applichiamo la deformazione $\epsilon_{ij} = s \delta_{ij}$ con $s \in \Re$ allora

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= c_1 (s \delta_{ii})(s \delta_{jj}) + c_2 (s \delta_{ij})(s \delta_{ij}) \\ &= 9s^2 c_1 + 3s^2 c_2 > 0 \quad \implies 3c_1 + c_2 > 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Ricordando l'Eq. (4.17), ricaviamo subito due importanti relazioni

$$\mu > 0 \quad (4.20)$$

$$3\lambda + 2\mu > 0 \quad (4.21)$$

Utilizzando le corrispondenze tra i cinque moduli elastici di un mezzo omogeneo ed isotropo date in Tabella 2.1 si dimostrano immediatamente le seguenti relazioni

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \implies K > 0 \quad (4.22)$$

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu} \implies E > 0 \quad (4.23)$$

$$(4.24)$$

Anche per il modulo di Poisson è possibile definire un intervallo assoluto di variabilità. Partendo dalla relazione

$$\nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} \quad (4.25)$$

si dimostra facilmente che

$$\nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} = \frac{1}{2} - \frac{3\mu}{2(3K + \mu)} < \frac{1}{2} \quad (4.26)$$

e che

$$\nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)} = \frac{9K}{2(3K + \mu)} - 1 > -1 \quad (4.27)$$

ovvero, in forma compatta, vale sempre che

$$-1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (4.28)$$

È interessante notare che questo risultato formale – che ammette i valori negativi per il modulo di Poisson – è stato per molto tempo controverso. Tutti i materiali tradizionali, infatti, si restringono trasversalmente se allungati longitudinalmente. Tuttavia, negli ultimi decenni, sono stati scoperti numerosi materiali non convenzionali per i quali è stato sperimentalmente misurato un valore $\nu < 0$. Esempi di questi materiali sono rappresentati dalle schiume, dai laminati, e anche da alcuni materiali nano- o micro-porosi.

4.3 Deformazione a temperatura variabile

Ammettendo che la temperatura del sistema possa variare, abbiamo la necessità di contemplare sia il caso di una deformazione indotta da una variazione di temperatura, sia la possibilità opposta che una deformazione determini riscaldamento o raffreddamento del mezzo. L'espressione completa per la funzione energia libera del sistema dovrà quindi contenere un *termine di accoppiamento temperatura-deformazione*.

Considerato che lavoriamo in regime di piccole deformazioni ed assumendo *piccole variazioni di temperatura* $\Delta\mathcal{T}$, è naturale scrivere tale termine di accoppiamento in modo che dipenda solo da termini al primo ordine in $\hat{\epsilon}$ ed in $\Delta\mathcal{T}$. Inoltre, poiché $\hat{\epsilon}$ è un tensore simmetrico di rango due, è possibile costruire a partire dalle sue componenti una sola grandezza scalare invariante di primo grado (come necessario perché possa essere inserita nella espressione per l'energia libera), ovvero la sua traccia. Concludendo, possiamo scrivere l'energia libera per un mezzo omogeneo ed isotropo in condizioni di temperatura variabile come

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \mathcal{F}_0(\mathcal{T}) - K\alpha\Delta\mathcal{T}\epsilon_{ii} + \frac{1}{2}K\epsilon_{ii}\epsilon_{jj} + \mu\left(\epsilon_{ij}\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{ii}\epsilon_{jj}\right) \quad (4.29)$$

dove, in analogia a quanto già scritto nel caso di deformazioni a temperatura costante, il termine $\mathcal{F}_0(\mathcal{T})$ rappresenta un contributo di energia libera del sistema indeformato, dipendente unicamente dalla temperatura. Gli ultimi due termini del membro di destra, invece, descrivono la variazione puramente meccanica (cioè legata alla deformazione) di energia libera e non contemplano contributi termodinamici. Dunque, il termine di accoppiamento è $-K\alpha\Delta\mathcal{T}\epsilon_{ii}$, dove il parametro α assumerà il significato fisico spiegato nel seguito.

Il tensore degli sforzi in condizioni di temperatura variabile è ricavato applicando l'Eq. (4.14)

$$T_{ij} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon_{ij}} = -K\alpha\Delta\mathcal{T}\delta_{ij} + K\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (4.30)$$

Il primo termine di destra rappresenta quindi *lo sforzo (interno) indotto dalla variazione di temperatura*.

Consideriamo ora il caso particolare di una *dilatazione termica libera*, ovvero di una dilatazione che avviene in assenza di sforzi esterni applicati al sistema. Una volta dilatatosi, il sistema raggiungerà un nuovo stato di equilibrio in corrispondenza del quale anche gli sforzi interni saranno nulli. Abbiamo, quindi, raggiunto la condizione

$$0 = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon_{ij}} = -K\alpha\Delta\mathcal{T}\delta_{ij} + K\epsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3}\epsilon_{kk}\delta_{ij} \right) \quad (4.31)$$

che fornisce immediatamente il risultato

$$0 = -K\alpha\Delta\mathcal{T} + K\epsilon_{kk} \quad (4.32)$$

ovvero

$$\epsilon_{kk} = \alpha\Delta\mathcal{T} \quad (4.33)$$

È quindi finalmente possibile identificare α come il *coefficiente di dilatazione (volumetrica) termica del sistema considerato*. Operativamente, tale coefficiente è calcolato tramite la

$$\alpha = \frac{\epsilon_{kk}}{\Delta\mathcal{T}} = \frac{\Delta V'}{\Delta\mathcal{T}} \quad (4.34)$$

avendo sfruttato il fatto che $\epsilon_{kk} = \text{Tr}(\hat{\epsilon}) = \Delta V'$ è la variazione relativa di volume (per unità di volume) dell'elemento considerato. Ne segue che α è misurato in K^{-1} (perché $\Delta V'$ è adimensionale). In Tabella 3.1 si riportano i valori medi (a temperatura ambiente) di α per alcuni materiali.

Tabella 4.1: Valori medi della costante α di alcuni materiali.

Materiale	$\alpha(10^{-6}\text{K}^{-1})$	Materiale	$\alpha(10^{-6}\text{K}^{-1})$
Acciaio	36	Oro	42
Alluminio	72	Piombo	87
Argento	60	Platino	18
Bronzo	54	Quarzo	1.5
Caucciù	231	Rame	51
Ghisa	30	Stagno	78
Invar	1.5	Vetro	24
Nichel	39		

Capitolo 5

Cenni di meccanica della frattura fragile

5.1 Fenomenologia di base

5.1.1 Materiali fragili e duttili

Si immagini la condizione di carico descritta schematicamente in Fig.5.1, corrispondente alle condizioni di sforzo di trazione. Il campione corrisponde ad un materiale omogeneo ed isotropo, il cui spessore nella direzione perpendicolare al piano della figura è infinito. In questa geometria particolarmente semplice è possibile formulare il problema della frattura tramite un formalismo scalare. Sia dunque σ il valore della opportuna componente del tensore degli sforzi che descrive la trazione cui è soggetto il campione lungo la direzione verticale.

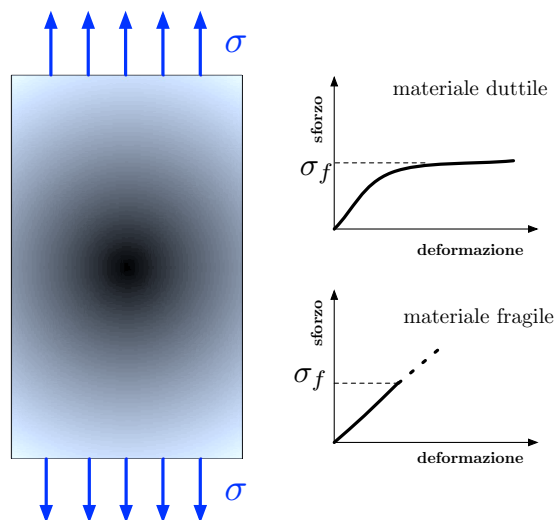


Figura 5.1: Sinistra: Geometria di carico per un materiale omogeneo ed isotropo; la componente dello sforzo che definisce la trazione lungo la verticale è indicata come σ . Destra (alto): curva sforzo-deformazione per un materiale duttile. Destra (basso): curva sforzo-deformazione per un materiale fragile. Il valore σ_f rappresenta lo sforzo di snervamento (materiali duttili) o di cedimento (materiali fragili).

In base alle modalità di risposta allo sforzo esterno di Fig. 5.1, i materiali si distinguono in:

- **materiali duttili:** rispondono a piccoli sforzi in modo idealmente elastico lineare, mentre possono accomodare grossi sforzi mediante deformazioni permanenti irreversibili. Questa risposta definisce il

comportamento plastico ed è tipica dei metalli. Un materiale duttile, dunque, è capace di sostenere grandi deformazioni, senza necessariamente rompersi. Questa capacità è legata alla presenza di dislocazioni. La corrispondente curva sforzo-deformazione è schematicamente illustrata in Fig. 5.1 (in alto a destra). È evidente dal contesto che tale curva misura la deformazione lungo la verticale, causata dallo sforzo σ . Per valori $\sigma > \sigma_f$ il materiale duttile ha ceduto, ovvero è possibile ottenere deformazioni arbitrariamente grandi senza aumentare il valore di sforzo applicato. Questa condizione è detta *limite di snervamento*.

- **materiali fragil:** rispondono in modo elastico lineare sino ad un certo valore di sforzo (detto *sforzo di cedimento*), oltre al quale si rompono in maniera irreversibile. Per i valori $\sigma > \sigma_f$ non è dunque possibile rappresentare la curva sforzo-deformazione che, pertanto, in Fig. 5.1 (a destra in basso) è solo tratteggiata. Questo tipo di fenomeno è detto *frattura fragile* ed è tipica dei materiali ceramici, dei semiconduttori o del comune vetro. Una volta che la frattura è innescata, essa propaga in maniera irreversibile e catastrofica nel materiale.

5.1.2 Il ruolo della microstruttura

La Fig. 5.1 (disegno a sinistra) implicitamente assume che le condizioni di cedimento siano studiate sotto l'assunzione semplificatrice che *il materiale sia un continuo perfetto*, ovvero un sistema privo di microstruttura. In questa accezione, la microstruttura di un mezzo materiale non ha nulla a che fare con la sua composizione atomica: siamo, infatti, pur sempre nell'ambito di una teoria di continuo. Piuttosto, la locuzione "assenza di microstruttura" deve intendersi come assenza (nella matrice continua) di difetti (quali: disomogeneità, inclusioni, vuoti), oppure di fessure (nel seguito indicate anche col termine *cricche*).

L'esperienza pratica ha, tuttavia, ampiamente dimostrato che si possono generare fenomeni di cedimento anche operando ben al di sotto di σ_f . Il concetto chiave che dobbiamo introdurre per riconciliare la trattazione formale del fenomeno di cedimento con l'evidenza sperimentale consiste nell'ammettere che *a livello microscopico un materiale sia un oggetto strutturalmente complesso*. In altre parole, è necessario ammettere che il materiale non sia più un mezzo omogeneo ed isotropo, bensì che contenga possibili disomogeneità (cioè piccole regioni con proprietà elastiche diverse) o cricche (cioè delle fessure vuote), entrambe immerse in una matrice altrimenti uniforme. È proprio l'esistenza di questa microstruttura che cambia qualitativamente l'analisi del problema paradigmatico della frattura. Concettualmente il problema di base è riformulato come in Fig. 5.2, dove le precedenti condizioni di carico sono ora applicate ad un materiale disomogeneo contenente una microcricca.

5.1.3 L'intensificazione dello sforzo

Relativamente al problema di Fig. 5.2, è possibile dimostrare che una cricca ellittica funziona come un *concentratore di sforzo*. Infatti, su ciascuno dei due apici di cricca lo sforzo risultante σ_{tip} è dato da

$$\sigma_{tip} = \sigma \left(1 + \frac{2L}{B} \right) = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{L}{\rho}} \right) \quad (5.1)$$

dove σ è lo sforzo applicato e $\rho = B^2/L$ descrive il raggio di curvatura dell'apice di cricca. Questo risultato – dovuto ad Inglis (1913) – ha grande importanza concettuale: *un materiale reale cede a valori di sforzo applicato inferiori al valore di cedimento teorico*¹ perchè la sua microstruttura opera intensificando i valori di sforzo internamente al materiale stesso. Può, dunque, accadere che uno sforzo applicato $\sigma < \sigma_f$ possa essere localmente ampliato oltre il limite di cedimento e, quindi, possa generare propagazione di una microcricca.

È interessante studiare due diversi casi particolari:

- **cricca di eccentricità nulla:** in questo caso si ha che $B = L$ e, pertanto, $\sigma_{tip}/\sigma = 3$. Questo risultato importante è spesso riassunto dicendo che *un foro circolare riduce la resistenza a frattura di un mezzo fragile di un fattore tre*. La nozione di resistenza a frattura verrà meglio descritta nel seguito, ma è già possibile capirne il significato fenomenologico: poichè nel caso di foro circolare il fattore di intensificazione di sforzo è pari a 3, il valore di sforzo di cedimento sarà corrispondentemente diminuito di un terzo (a parità di sforzo applicato).

¹Il termine "teorico" qui va inteso come riferito al caso di materiale perfettamente omogeneo, ovvero privo di microstruttura.

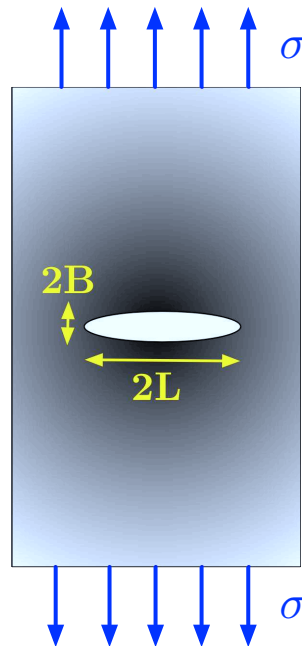


Figura 5.2: Rappresentazione di un sistema continuo ed isotropo contenente una cricca ellittica di asse maggiore $2L$ ed asse minore $2B$, posta trasversalmente all'asse di carico. Caso bidimensionale (corrispondente ad un sistema reale di spessore molto grande e contenente una cricca passante).

- **cricca sottile:** in questo caso $L \gg B$ e quindi

$$\frac{\sigma_{tip}}{\sigma} = 2\sqrt{\frac{L}{\rho}} \quad (5.2)$$

Il rapporto dato in Eq. (5.2) è chiamato *fattore di intensificazione di sforzo* e dipende unicamente da fattori geometrici, quali la dimensione L della cricca e la sua forma, riassunta nel valore della curvatura ρ al suo apice. Come anche l'intuizione suggerisce, il modello di Inglis prevede che a parità di materiale, forma di cricca e condizioni di carico, maggiore è la dimensione della fessura, minore è la resistenza a frattura (nel senso che maggiore è il fattore di intensificazione dello sforzo).

Il caso di cricca sottile si presta ad una importante osservazione. Consideriamo, infatti, il limite matematico di fessura infinitesimamente sottile per la quale $\rho \rightarrow 0^2$: lo sforzo all'apice di fessura diverge! Nessun materiale reale può, ovviamente, resistere ad un siffatto sforzo e, dunque, dobbiamo ammettere -come conseguenza necessaria del modello di Inglis- che un materiale contenente una fessura sottilissima si rompa per applicazione di uno sforzo comunque piccolo (idealmente, anche infinitesimo). È ovvio che questo risultato è paradossale e contrario all'esperienza pratica che dimostra come materiali fessurati possono, in opportune condizioni, resistere alla frattura. Questo paradosso motiva uno studio più approfondito del problema di una cricca ellittica sotto sforzo.

5.2 Frattura fragile

Studiamo ora in dettaglio del fenomeno di frattura fragile dove, come detto, al raggiungimento del limite di cedimento il materiale si rompe in modo irreversibile.

²Questa condizione si ottiene, in pratica, ogniqualvolta il semiasse minore $2B$ (si veda Fig. 5.2) della fessura sia trascurabilmente piccolo rispetto alle dimensioni del sistema studiato

5.2.1 Criterio di Griffith

Da un punto di vista fisico, affinché una cricca si propaghi è necessario che il fenomeno, nel suo complesso, sia energeticamente favorevole. Inoltre, l'energia elastica accumulata nel materiale (per effetto del campo di forze di trazione) deve essere sufficiente alla formazione delle due nuove superfici libere interne che si formano all'avanzare della cricca. La situazione descritta corrisponde allo schema concettuale di Fig. 5.3: una fessura (o cricca) di lunghezza $2L$, inizialmente creata dentro ad un blocco materiale (altrimenti omogeneo ed isotropo) lineare elastico, può avanzare sotto l'effetto dello sforzo di trazione σ unicamente se la variazione dE_t di energia totale per incremento elementare della lunghezza di fessura dL è negativo

$$\text{criterio di Griffith : } \frac{dE_t}{dL} \leq 0 \quad (5.3)$$

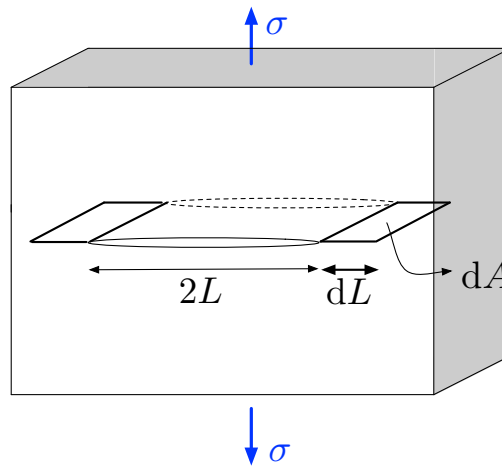


Figura 5.3: Il problema di Griffith: una fessura ellittica di lunghezza $2L$ subisce un incremento di lunghezza $2dL$ per effetto della trazione σ . Corrispondentemente, l'area della superficie interna del materiale aumenta di una quantità $2dA$.

È evidente che in questo contesto E_t assume il ruolo di un'energia libera di Helmholtz e, quindi, il processo fisico può progredire solo in modo da diminuirla. Il processo di avanzamento della cricca è accompagnato dalla creazione di nuova superficie interna, in ragione di un incremento dA per ogni allungamento dL della fessura stessa. Noi faremo sempre riferimento alla deformazione di apertura, indicata in Fig.5.3, lasciando la trattazione delle altre possibili modalità di sollecitazione di una frattura a testi più specialistici.

5.2.2 Bilancio energetico

L'energia totale E_t del sistema può essere scritta come somma di un contributo di *energia di superficie* E_s e di un contributo di *energia meccanica di interazione* W_i

$$E_t = E_s + W_i \quad (5.4)$$

Il primo termine descrive il lavoro necessario a creare nuova superficie (si tratta quindi di un termine legato alla struttura atomica del materiale ed alla tipologia dei legami chimici in esso instaurati); il secondo termine viene denominato energia di interazione perchè descrive effettivamente la relazione esistente tra il lavoro compiuto dalle forze che generano lo stato di carico del mezzo e l'energia potenziale elastica accumulata nello stesso. L'energia d'interazione viene a sua volta espressa come una somma

$$W_i = \Delta E_{est} + \Delta E_p^{macro} \quad (5.5)$$

dove: ΔE_p^{macro} rappresenta la differenza di energia potenziale elastica nel mezzo tra il caso in cui la cricca è presente ed il caso in cui essa è assente, mentre ΔE_{est} rappresenta la differenza di lavoro che le forze esterne agenti sul sistema debbano esercitare nei due casi opposti di mezzo fessurato e mezzo ideale.

Assumendo che lo sforzo applicato σ sia costante durante l'apertura della frattura, si dimostra che $\Delta E_{est} = -2\Delta E_p^{macro}$ in modo che

$$W_i = -\Delta E_p^{macro} \quad (5.6)$$

Il segno negativo per l'energia meccanica sta ad indicare *una riduzione effettiva di energia durante la propagazione della frattura*. La condizione definita in Eq. (5.3) può essere finalmente esplicitata come segue

$$\frac{dE_t}{dL} = -\frac{d\Delta E_p^{macro}}{dL} + \frac{dE_s}{dL} \leq 0 \quad (5.7)$$

ovvero, in forma più compatta

$$\boxed{\frac{d\Delta E_p^{macro}}{dL} \geq \frac{dE_s}{dL}} \quad (5.8)$$

Questo importante risultato sancisce che, affinché avvenga un fenomeno di frattura, è necessario che la variazione di energia potenziale elastica dovuta alla presenza della cricca sia superiore al lavoro speso per creare nuova superficie libera interna.

L'energia di superficie E_s (per larghezza unitaria del fronte di frattura) è facilmente esprimibile come

$$E_s = 4L\gamma_s \quad (5.9)$$

dove γ_s rappresenta l'energia di superficie (o, meglio: l'energia per larghezza unitaria di fronte di frattura spesa per generare un incremento unitario della lunghezza di fessura). Nella Fig. 5.3 tale fronte si sviluppa ortogonalmente sia all'asse di carico, sia all'asse di cricca. L'energia γ_s è ovviamente un parametro caratteristico del materiale: misura, infatti, il lavoro necessario a rompere i legami chimici (che terrebbero coeso il materiale) lungo una linea ideale rappresentante un segmento unitario del fronte di frattura. Non è compito della teoria lineare elastica della frattura provvedere al calcolo di γ_s , essendo invece questo un tipico problema di fisica dello stato solido e, quindi, noi la supporremo nota e la considereremo – alla stregua, per esempio, dei moduli elastici – come un parametro materiale.

Il termine ΔE_p^{macro} è più difficile da calcolare e richiede argomentazioni non elementari. Qui ci limitiamo a ricordare il risultato finale della teoria di Griffith che – per un mezzo lineare elastico di modulo di Young E e coefficiente di Poisson ν soggetto ad una deformazione di apertura – permette di scrivere

$$\Delta E_p^{macro} = \frac{\pi L^2 \sigma^2}{E} \quad (5.10)$$

Per completezza ricordiamo che il valore del modulo di Young da inserire in questa equazione, deve essere rinormalizzato a seconda delle condizioni al contorno che si specificano per il problema. Noi sia interessati ad una formulazione concettuale del problema e, quindi, non trattiamo questo (importante) dettaglio, rinviando a testi più approfonditi di meccanica della frattura.

Sostituendo le Eq. (5.9) e (5.10) nella Eq. (5.8) otteniamo immediatamente che la condizione fisica di propagazione della cricca è che lo sforzo σ applicato normalmente all'asse maggiore della cricca soddisfi la condizione

$$\sigma \geq \sqrt{\frac{2\gamma_s E}{\pi L}} \quad (5.11)$$

Questa condizione permette di definire operativamente lo *sforzo di cedimento* σ_f per una cricca di lunghezza L_f come

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2\gamma_s E'}{\pi L_f}} \quad (5.12)$$

Riassumendo:

- per ciascuna cricca di lunghezza assegnata L_f esiste un valore di soglia dello sforzo applicato, oltre al quale il materiale cede (nel senso che la cricca inizia a propagare)
- fissato un certo valore di sforzo tensile $\bar{\sigma}$, inizieranno a propagare tutte le cricche eventualmente presenti nel materiale, purchè la loro semi-lunghezza iniziale sia uguale o superiore alla *lunghezza critica* L_f

$$L_f = \frac{2\gamma_s E}{\pi \bar{\sigma}^2} \quad (5.13)$$

5.2.3 Generalizzazione del criterio di Griffith

La teoria di Griffith è estremamente semplice dal punto di vista concettuale e conduce a risultati quantitativamente corretti e, soprattutto, espressi come funzione di parametri materiali calcolabili o misurabili direttamente. Essa riveste un ruolo di paradigmatica importanza concettuale nella meccanica della frattura ed è stata applicata anche oltre il limite di comportamento fragile. Ciò è fattibile, a livello elementare, introducendo una semplice correzione fenomenologica che renda tale equazione applicabile anche a materiali duttili.

Chiamiamo γ_p il lavoro plastico³ per elemento di superficie (e per una larghezza unitaria di fronte di frattura). Allora è possibile proporre una formula fenomenologica per lo *sforzo di snervamento in un materiale duttile* come segue

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2(\gamma_s + \gamma_p)E'}{\pi L}} \quad (5.14)$$

A questo livello γ_p non è altro che un termine empirico, il cui calcolo da principi fondamentali richiederebbe lo sviluppo di un adeguato modello per la dissipazione di energia tramite una deformazione plastica. Questo argomento, pur estremamente interessante, va oltre gli scopi di questo testo [?].

5.3 Resistenza alla frattura

Introduciamo la nozione di *forza generalizzata G di propagazione della frattura*

$$G = -\frac{dW_i}{dL} \quad (5.15)$$

che rappresenta l'energia resa disponibile per ogni incremento dL della lunghezza della fessura (per una larghezza unitaria di fronte di frattura). Dalle Eq. (5.6) e (5.10) si ricava immediatamente che

$$G = \frac{2\pi\sigma^2 L}{E} \quad (5.16)$$

Combinando questo risultato con la definizione di sforzo di cedimento σ_f dato in Eq. (5.12), è possibile riformulare il criterio di Griffith dicendo che la condizione fisica a partire dalla quale si osserva la propagazione della cricca è che la forza generalizzata di propagazione della frattura raggiunga almeno il valore critico G_c dato da

$$G_c = 4\gamma_s \quad (5.17)$$

La grandezza G_c è, dunque, un parametro proprio di ciascun materiale.

Definiamo ora la seguente relazione per l'energia di superficie E_s

$$R = \frac{dE_s}{dL} \quad (5.18)$$

e attribuiamo al nuovo parametro R il significato di *resistenza alla frattura*: esso misura il lavoro che è necessario spendere per ogni incremento dL della lunghezza della fessura e per una larghezza unitaria di fronte di frattura (si veda Fig. 5.3). Anche la grandezza R varia da materiale a materiale: la sua definizione, infatti, lo lega al lavoro che bisogna spendere sul sistema al fine di rompere una data sequenza di legami chimici attraverso il fronte di frattura, affinché sia assicurato l'avanzamento del suo fronte. Questo lavoro dipende sia dalla densità spaziale di legami (cioè dalla orientazione della cricca rispetto alla cristallografia del mezzo), sia dalla loro natura e forza.

Tramite i due nuovi concetti introdotti attraverso le grandezze G ed R possiamo dettagliare il bilancio energetico dato in Eq. (5.4) per ogni processo elementare di avanzamento dL come segue

$$dE_t = dW_i + dE_s = (R - G)dL \quad (5.19)$$

Questo risultato permette di affermare che *in condizioni critiche* – cioè quando $G = G_c$ – vale la seguente relazione

$$R = 4\gamma_s \quad (5.20)$$

³Questo lavoro rappresenta l'energia spesa dalle forze di carico per generare una deformazione permanente nel sistema.

ovvero: *la resistenza a frattura è proprio data dall'energia di superficie*. Quindi: il fronte di frattura avanza se $G > R$, mentre regredisce se $G < R$. In Tabella 5.1 riportiamo i valori di resistenza a frattura (prima colonna) e di forza generalizzata critica G_c (seconda colonna) per diversi materiali fragili reali. Poichè valgono le Eq. (5.17) e (5.20), la differenza tra i valori numerici delle grandezze riportate in prima e seconda colonna fornisce una stima della deviazione di ciascun materiale dal comportamento fragile ideale.

Tabella 5.1: Valori tipici della resistenza a frattura R , dell'energia di superficie $4\gamma_s$ e della tenacità a frattura $K_{I,c}$ per diversi materiali fragili reali.

Materiale	R (J m ⁻²)	$4\gamma_s$ (J m ⁻²)	$K_{I,c}$ (Nm ^{-3/2})
diamante	15	12	4
silicio	3	2.4	0.7
carburo di silicio	15	8	2.5
ossido di silicio	8	2	0.75
zaffiro	25	8	3
ossido di magnesio	3	3	0.9

5.4 Campo di sforzo all'apice di cricca

Consideriamo ancora una volta il caso descritto in Fig. 5.2. Ricordando che in base al modello di Inglis la cricca funziona come concentratore di sforzo, ci poniamo ora il problema di *calcolare il campo di sforzo \hat{T} in un'intorno dell'apice della cricca stessa*.

Le componenti interessanti sono quelle associate alla direzione definita dall'asse di cricca, che d'ora innanzi indicheremo con x , e dalla direzione di carico, che d'ora in poi indicheremo con y . Il problema è, dunque, due-dimensionale e consiste nel definire per ogni punto P il valore locale delle tre componenti indipendenti T_{xx} , T_{yy} e T_{xy} , come illustrato in Fig. 5.8. Per meglio visualizzare il significato geometrico del problema, un elemento infinitesimo di area di forma quadrata è stato disegnato attorno a P e le componenti del tensore \hat{T} sono state disegnate rispetto alle facce di questo quadrato, secondo la convenzione definita in Fig. 1.12. Naturalmente, $T_{xy} = T_{yx}$ per la simmetria del tensore degli sforzi. L'origine degli assi è posta esattamente al centro della cricca. La geometria del problema suggerisce, inoltre, di introdurre un sistema di coordinate polari (r, ρ) centrato sull'apice di cricca, utile per definire la posizione di P nel piano $x - y$.

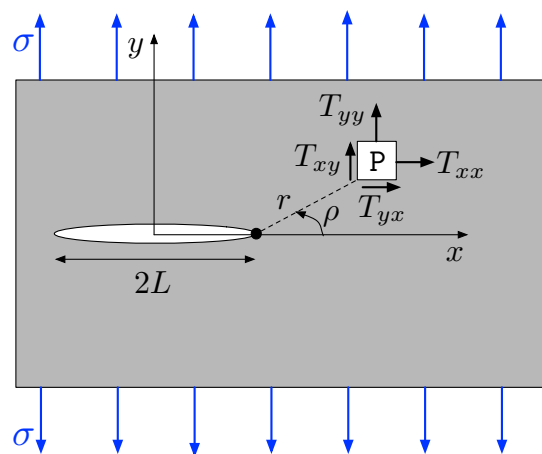


Figura 5.4: Componenti T_{xx} , T_{yy} e $T_{xy} = T_{yx}$ del tensore degli sforzi nel punto P posto in prossimità dell'apice di una cricca di lunghezza $2L$. Il sistema è sotto trazione σ .

È possibile dimostrare che

$$\lim_{r \rightarrow 0} T_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\rho) \quad (5.21)$$

dove $i, j = x, y$. In questa equazione:

- la funzione $f_{ij}(\rho)$ rappresenta un mero fattore geometrico;
- la grandezza K è detta *fattore di intensificazione dello sforzo* ed è legata alla forza generalizzata per la propagazione di frattura dalla relazione

$$K_I = \sqrt{\frac{GE}{2}} = \sigma\sqrt{\pi L} \quad (5.22)$$

Quando GG_c di Griffith, allora la grandezza

$$K_c = \sqrt{\frac{G_c E}{2}} \quad (5.23)$$

è detta *tenacità a frattura*. Il valore di questo parametro caratteristico per diversi materiali è riportato in Tabella 5.1, da cui si evince immediatamente il suo significato fenomenologico: maggiore è il suo valore, maggiore è la resistenza meccanica del materiale.

Capitolo 6

Cenni sulla plasticità

I materiali plastici hanno la proprietà di mantenere una certa deformazione in modo permanente, anche dopo la rimozione di tutte le forze applicate. Il problema fondamentale nello studio della plasticità consiste nella determinazione del valore limite dello sforzo (tensione) che separa il comportamento del materiale da reversibile a irreversibile. Tale valore limite è comunemente detto *tensione di snervamento*. Esso, per convenzione, viene definito come valore di tensione che comporta una deformazione permanente dello 0.2% (in certi casi, il valore convenzionale di deformazione permanente viene fissato allo 0.1% o allo 0.5%).

6.1 Fenomenologia del comportamento plastico dei materiali

In Fig.6.1 sono rappresentate le curve sforzo-deformazione per alcune tipologie paradigmatiche di comportamento meccanico in risposta ad una trazione semplice.

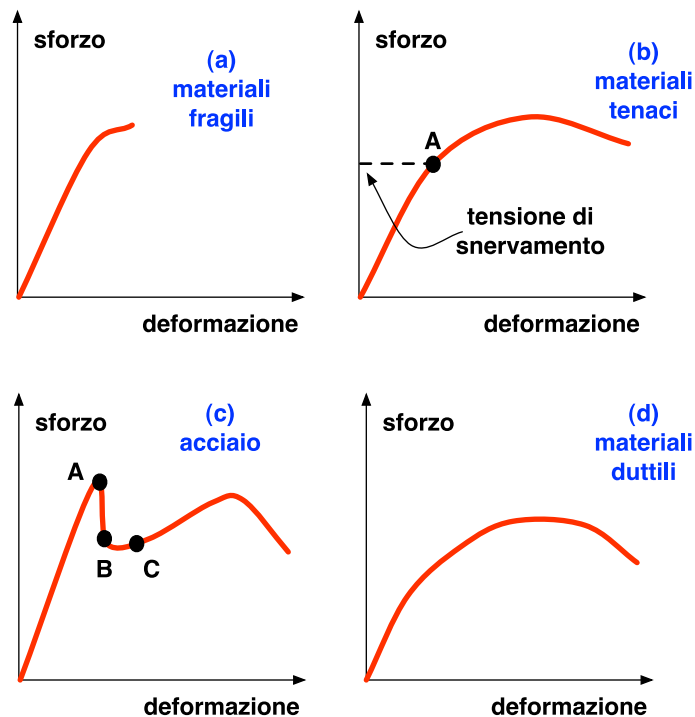


Figura 6.1: Esempi paradigmatici di curve sforzo-deformazione per esperimenti di trazione semplice. Si veda il testo per una dettagliata spiegazione delle diverse curve.

La curva (a) descrive il comportamento dei materiali fragili (ceramiche, ghisa) ed è stata inserita

unicamente a scopo comparativo. Le curve (b), (c) e (d) corrispondono, rispettivamente al caso dell'acciaio ad alto contenuto di carbonio, al caso dell'acciaio con basso contenuto di carbonio ed al caso dei materiali metallici (rame, alluminio). In tutti i casi si può parlare di comportamento plastico, anche se:

- nel caso (b) è chiaramente individuabile un regime di risposta lineare (reversibile) che termina nel punto A che, inoltre, definisce la tensione di snervamento;
- nel caso (c) si può notare un punto A di snervamento superiore ed un punto B di snervamento inferiore, cui segue l'inizio della deformazione plastica (nel primo tratto B-C caratterizzata da una deformazione crescente, a tensione praticamente costante);
- nel caso (d) è veramente difficile individuare lo snervamento. Per questa ragione la tensione corrispondente viene definita in base ad un valore di deformazione permanente convenzionalmente stabilito.

Si noti che nella curva tipo (a) la tensione di snervamento coincide in pratica con lo sforzo di cedimento; invece, nelle curve (b), (c) e (d) la frattura del materiale avviene dopo un'ampia deformazione plastica, in corrispondenza della quale lo sforzo applicato dapprima aumenta, ma successivamente diminuisce. Il valore massimo rappresenta per convenzione il *carico di rottura* del materiale, mentre il valore cui avviene l'effettiva rottura del materiale è detto *carico ultimo*.

6.2 Incrudimento

Le curve sforzo-deformazione dei materiali plastici presentano una interessante caratteristica: oltre il punto di snervamento la curva è ancora crescente, anche se con pendenza inferiore rispetto alla zona lineare reversibile. Questo fenomeno è detto *incrudimento* ed è caratteristico di tutti i metalli, anche se si manifesta con modalità differenti da materiale a materiale. Esso, inoltre, dipende sia dalla temperatura, sia dalla velocità di deformazione.

Al fine di capire gli effetti del fenomeno di incrudimento sul comportamento meccanico di un materiale plastico, supponiamo di sottoporre un dato materiale metallico ad una serie di cicli di tensione-rilascio consecutivi. Ebbene, dopo ciascun rilascio, al successivo ciclo di tensione corrisponderà un valore di snervamento più alto. La situazione è schematicamente illustrata in Fig.6.2.

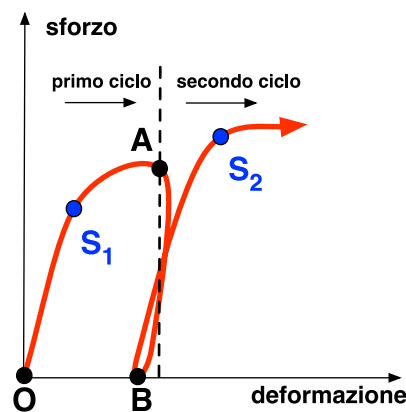


Figura 6.2: Cicli di tensione-rilascio su un materiale plastico. Il punto A corrisponde allo scarico, mentre il punto B individua la deformazione permanente accumulata nel primo ciclo. I punti S_1 ed S_2 rappresentano lo sforzo di snervamento, rispettivamente, del primo e del secondo ciclo.

Dopo il rilascio dello sforzo, che ha portato il sistema dal punto O al punto A, il sistema raggiunge il punto B. Qui inizia il nuovo ciclo di carico che fa percorrere al sistema il tratto $B - S_2$ con pendenza praticamente uguale a quella osservata nel primo tratto di carico $O - S_1$. Il fenomeno dell'incrudimento è alla base di tutta la metallurgia, una delle prime tecnologie sviluppate dall'Uomo.

6.3 Condizioni limite di plasticità e superficie di snervamento

Come noto il tensore degli sforzi è simmetrico e, quindi, in ciascun punto di un materiale dato è sempre possibile definire un sistema di riferimento rispetto al quale tale tensore è diagonale. In questo sistema di riferimento, il tensore degli sforzi assume la forma

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Da un punto di vista matematico $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sono gli autovalori del tensore \hat{T} (invarianti per cambiamento di sistema di riferimento); essi sono detti *tensioni principali*. Nel caso particolare di *materiali isotropi* la rappresentazione del dominio elastico (cioè: della parte della curva sforzo-deformazione con andamento lineare e reversibile) può essere espressa in termini delle sole tensioni principali: infatti, si dimostra che esiste una funzione $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ tale per cui:

- la condizione $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0$ definisce il comportamento elastico lineare reversibile;
- la condizione di frontiera $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ definisce il limite oltre al quale sopraggiungono fenomeni plastici e non lineari.

In altre parole, quindi, la condizione di frontiera definisce una superficie, detta *superficie limite* o *superficie di snervamento* che ha la seguente notevole proprietà: per valori di sforzo applicato esterni alla superficie limite il materiale manifesta comportamento plastico; al contrario, per valori interni il materiale risponde elasticamente.

Tutti i valori di sforzo che giacciono sull'asse $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ sono sicuramente interni alla suddetta superficie limite: essi, infatti, corrispondono ad uno sforzo idrostatico che comporta variazione di volume e, pertanto, non sono associabili a fenomeni plastici in quanto è *sperimentalmente osservato che, a tutti gli effetti pratici, le deformazioni plastiche permanenti non sono mai accompagnate da una variazione di volume*. In conclusione, la superficie di snervamento avrà una forma allungata, con asse parallelo alla retta $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

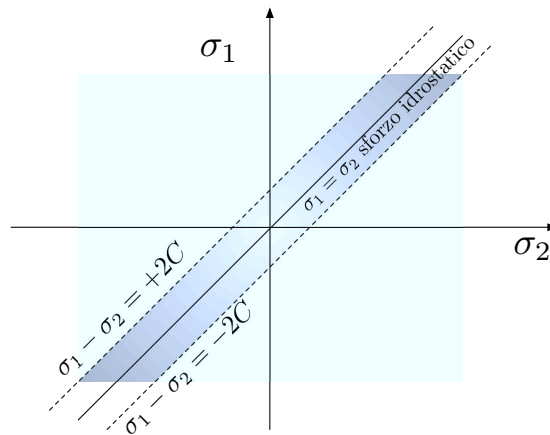


Figura 6.3: Costruzione della superficie di snervamento per un materiale due-dimensionale. Il parametro C rappresenta il valore massimo imposto a τ_{max} (vedi testo).

Al fine di giustificare la suddetta forma della superficie di snervamento, consideriamo uno stato di sforzo descritto da σ_1, σ_2 e σ_3 . Si verifica facilmente che lo sforzo di taglio massimo τ_{max} generato internamente al materiale è dato da

$$\tau_{max} = \max \left\{ \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}, \frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2} \right\} \quad (6.2)$$

Le grandezze che intervengono a definire la superficie limite sono proprio le $\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$, $\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2}$ e $\frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{2}$. Consideriamo, a scopo illustrativo, il caso due-dimensionale illustrato dalla Fig.6.3. Lo sforzo tangenziale

massimo è dato da $\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2}$. Se imponiamo la soglia $\tau_{max} = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{2} < C$, allora otteniamo: $|\sigma_1 - \sigma_2| < 2C$ ovvero $-2C < \sigma_1 - \sigma_2 < +2C$. Quest'ultima relazione rappresenta le due rette tratteggiate in Fig.6.3, dove la zona tratteggiata rappresenta la regione di risposta elastica. La generalizzazione al caso tri-dimensionale porta a definire un'analoga "superficie allungata" con asse $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Rimane da chiarire come mai nel precedente ragionamento sia stato inserito il concetto di sforzo tangenziale massimo τ_{max} . Supponiamo di applicare al mezzo di Fig.6.4 uno sforzo di trazione semplice descritto dal tensore

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Consideriamo una qualunque superficie π interna al mezzo, individuata dal versore normale \vec{n} . Grazie alla eq.(2.18) possiamo affermare che la forza per unità di superficie \vec{F} sul piano π è

$$\vec{F} = \hat{T}\vec{n} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma n_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

dove abbiamo introdotto i coseni direttori del versore \vec{n} in modo che $\vec{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$. La forza (per unità di superficie) \vec{F} può essere scomposta in una componente \vec{p} normale ed in una componente $\vec{\tau}$ parallela al piano (π si veda Fig.6.4).

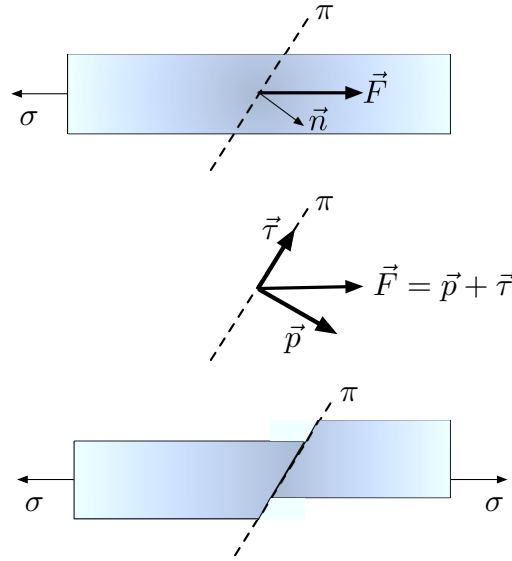


Figura 6.4: Definizione dello sforzo tangenziale $\vec{\tau}$ in un esperimento di semplice trazione (a-b). Slittamento generato da un valore di sforzo tangenziale oltre il limite di snervamento del materiale (c).

Il modulo della forza normale al piano π è

$$p = \vec{F} \cdot \vec{n} = \sigma n_1^2 \quad (6.5)$$

e, quindi, poichè $p^2 + \tau^2 = \vec{F} \cdot \vec{F}$ si ha che

$$\begin{aligned} \tau^2 &= \vec{F} \cdot \vec{F} - p^2 \\ &= \hat{T}\vec{n} \cdot \hat{T}\vec{n} - (\sigma n_1^2)^2 \\ &= \sigma^2 n_1^2 - \sigma^2 n_1^4 \\ &= \sigma^2 n_1^2 (1 - n_1^2) \end{aligned} \quad (6.6)$$

La funzione $n_1^2(1 - n_1^2)$ del termine di destra nell'uguaglianza appena ricavata assume valore massimo per $n_1 = \pm 1/\sqrt{2}$ (si ricordi che $-1 < n_1 < +1$ in quanto coseno direttore). Pertanto, esiste un valore

massimo per la componente di forza parallela al piano π che definiamo proprio sforzo di taglio massimo¹ e che risulta data da

$$\tau_{max} = \frac{|\sigma|}{2} \quad (6.7)$$

La conclusione generale che si trae da questo esempio è molto importante: *su un qualunque piano interno ad un materiale soggetto a sforzo arbitrario agisce uno sforzo di taglio τ* . In particolari condizioni di carico, il valore assunto da τ può eventualmente generare slittamento lungo in piano di sforzo, se ivi il materiale cede. La situazione è illustrata in Fig.6.4. Questa è la condizione di snervamento e, dunque, si giustifica la definizione della superficie limite in termini di un valore massimo τ_{max} di sforzo di taglio interno.

Storicamente sono stati presentati diversi criteri atti a quantificare il limite di plasticità o, equivalentemente, la superficie di snervamento, tra cui:

- *il criterio di Tresca* (1864) che impone $\tau_{max} = \frac{\sigma_s}{2}$, dove σ_s è un parametro fenomenologico da determinare sperimentalmente. La condizione limite è definita dall'equazione

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_s^2] [(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_s^2] [(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_s^2] = 0 \quad (6.8)$$

che determina una superficie snervamento di in forma di un prisma a base esagonale.

- *il criterio di Von Mises* che definisce la condizione limite in termini energetici, ovvero in termini dell'energia elastica dovuta allo sforzo di taglio. Tale condizione è in questo caso definita dall'equazione

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_s^2 = 0 \quad (6.9)$$

La superficie di snervamento di Von Mises ha forma cilindrica.

Concludiamo osservando che la possibilità di definire forme diverse per la superficie di snervamento è legata alla discussione di inizio Capitolo, quando abbiamo commentato che la definizione della condizione limite di plasticità è data solo in base ad una convenzione.

6.4 Origine microscopica della plasticità

Il reticolo cristallino dei materiali reali ospita una gran varietà di *difetti strutturali*:

- *difetti puntuali* - vacanze ed interstiziali, corrispondenti rispettivamente ad un atomo mancante, oppure alla presenza in posizione extra-reticolare di un atomo in eccesso;
- *difetti estesi* - bordi di grano e dislocazioni, corrispondenti rispettivamente a filari atomici in eccesso (rispetto alla normale struttura del reticolo cristallino), oppure all'interfaccia da grani cristallini differentemente orientati nello spazio.

Tra tutti questi difetti, le *dislocazioni sono il mediatore microscopico della plasticità*. Esse, infatti, favoriscono lo slittamento di alcuni piani reticolari rispetto ad altri, generando deformazioni permanenti nel reticolo stesso (come schematicamente illustrato in Fig.6.4).

Le dislocazioni interagiscono con tutti gli altri difetti presenti nel reticolo che, dunque, offrono un ostacolo al movimento delle dislocazioni stesse. Il moto di una dislocazione, quindi, avviene per superamento di barriere energetiche create dal reticolo stesso e dai suoi difetti. La tensione di snervamento corrisponde al valore di sforzo di taglio interno che è necessario esercitare su un materiale affinché le sue dislocazioni possano effettivamente superare le suddette barriere energetiche e, dunque, muoversi.

Il fenomeno dell'incrudimento, infine, corrisponde al fatto che il moto di una dislocazione genera altre dislocazioni, cosa che rende sempre più difficile il suo movimento. Si richiede, allora, un incremento di tensione per produrre ulteriore deformazione (cioè ulteriore movimento di dislocazioni).

¹È, infatti, una forza per unità di superficie e, quindi, dimensionalmente corrisponde ad uno sforzo.

Bibliografia

Una presentazione completa della teoria della elasticità è riportata in

- L. Colombo e S. Giordano, *Introduzione alla teoria della elasticità* (Springer)

Una presentazione didatticamente accessibile alla meccanica della frattura è riportata in

- A. Borruto, *Meccanica della frattura* (Hoepli)

mentre una trattazione completa è riportata in

- T.L. Anderson, *Fracture mechanics* (CRC Press)

Una presentazione completa della plasticità è riportata in

- J. Lubliner, *Plasticity theory* (Macmillan Publishing Company)