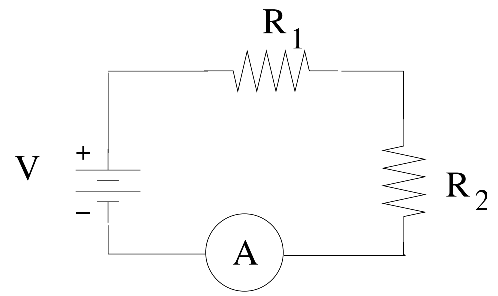
Misure di corrente

- la corrente che fluisce in un ramo viene misurata ponendo lo strumento (galvanometro/amperometro) in **serie** ai componenti attraversati dalla corrente

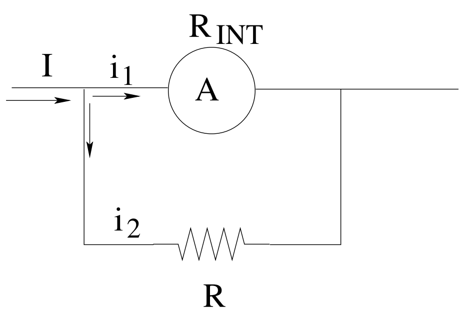


- la *resistenza interna* dello strumento, $R_{in,}$ modifica la R_{eq} del circuito→ il valore di i

$i_{mis} = V/(R_{eq} + R_{in})$ $R_{eq} = R_1 + R_2$ $i = V/R_{eq}$

i_{mis} - i = errore sistematico, riducibile riducendo il piu' possibile R_{in}, ma non eliminabile

- per misurare correnti > portata amperometro: *shunt* noto

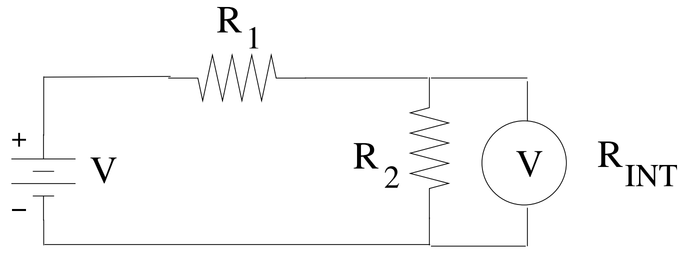


partitore di corrente: i_1 = i R (R + R_{int}) → noti R e R_{int} si ricava i da i1

selettore di fondoscala

Misure di tensione

- la tensione ai capi di un componente viene misurata ponendo lo strumento (voltmetro) in **parallelo** al componente in modo che "legga" la stessa tensione



- la *resistenza interna* dello strumento, $R_{in,}$ modifica la R_{eq} del circuito→ il valore di V

$R_{eq} = R_1 + R_2$ $\qquad$ $R'_{eq} = R_1 + R_2\, R_{int} / (R_2 + R_{int})$

$V_{2mis} = V\ [R_2\, R_{int} / (R_2 + R_{int})] / R'_{eq}$

$V_2 = V\, R_2 / (R_1 + R_2)$

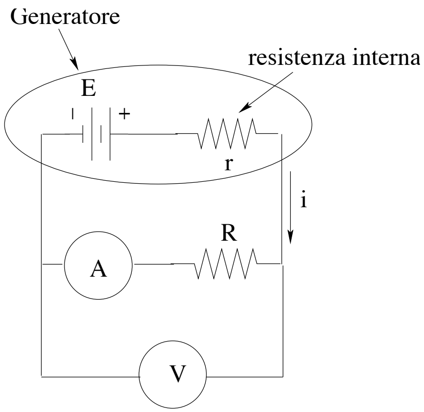
$V_{2mis} - V_2$ = errore sistematico, riducibile quanto piu' $R_{in} > R_2$, ma non eliminabile

Misure di resistenza

misura diretta da V/I: ohmetro

ohmetro amperometrico: V nota, I misurata

Generatori reali di tensione

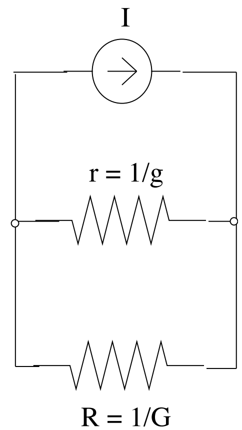


- **la forza elettromotrice (f.e.m.) di un generatore e' la ΔV che esiste tra i morsetti a circuito aperto (no corrente erogata)**

- generatore chiuso su R (R_{int}+carico):
  - la corrente e' inferiore a E/R
  - la ΔV ai capi di R (=tensione tra i morsetti) e' minore della f.e.m.
  - se R varia i varia → ΔV varia linearmente con i e tende a E se i→0
  - **ΔV = E − ir** *r=resistenza interna del generatore*, *ir = caduta interna di tensione*

- **la ΔV ai morsetti di un generatore che non eroga corrente e' la sua f.e.m.; la ΔV ai morsetti di un generatore che eroga corrente e' f.e.m.- caduta interna di tensione** (che dipende anche dal carico esterno attraverso i). **Se r=0 ΔV=E gen. ideale**

Generatori reali di corrente



- generatore cortocircuitato se chiuso su una R piccola a piacere
- oppone la minima R al passaggio di i, → $i=I_{max}$
- se R non trascurabile, i erogata diminuisce al crescere di ΔV ai suoi capi:

$$i = I_{max} - g_{int}\,\Delta V$$

g_{int}*=conduttanza interna del generatore*

Se $i = G\,\Delta V$ e $G = 1/R$ $\quad I_{max} = \Delta V\,(g_{int} + G)$ $\quad i = I_{max} - I_{max}\,g_{int}/(g_{int} + G)$

- **se $g_{int} \ll G$ $i \to I_{max}$ indipendentemente da G (cioe' da ΔV) → generatore ideale**
- generatore reale connesso ad un carico: a) gen. di f.e.m. con una R_{int} in serie b) gen. di i con una g_{int} in parallelo
- $R_{int} = 1/g_{int}$

Legge delle tensioni di Kirchhoff (LTK)

anello o maglia con N rami con resistori (R_k) e generatori di tensione (V_k)

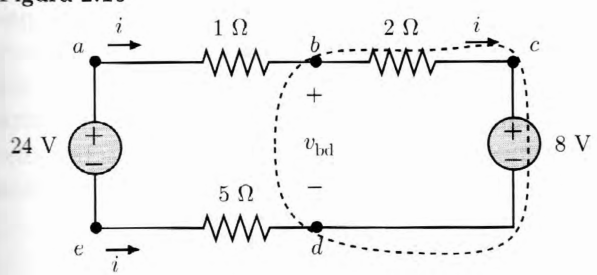
ad ogni istante, in senso orario e antiorario, la somma algebrica delle cadute di tensione ($i_k R_k$) e' uguale alla somma algebrica delle f.e.m. (V_k)

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} V_k = \sum_{k=1}^{N} R_k\, i_k}$$

conseguenza della legge di Ohm applicata ai rami del cammino chiuso.

Calcolare la corrente i e la tensione v_{bd} nel circuito in Figura 2.15.

Figura 2.15



Soluzione

Applicando la LKT alla maglia a-b-c-d-e-a, si ottiene:

$$v_{ab} + v_{bc} + 8 + v_{de} - 24 = 0 \qquad (2.10)$$

Per la legge di Ohm possiamo scrivere

$$v_{ab} = i \qquad v_{bc} = 2i \qquad v_{de} = 5i$$

Sostituendo nella (2.10),

$$i + 2i + 8 + 5i - 24 = 0$$

da cui si ricava

$$i = (24 - 8)/8 = 2 \text{ A}$$

Per ricavare la tensione v_{bd} applichiamo la LKT alla maglia b-c-d-b; si ha:

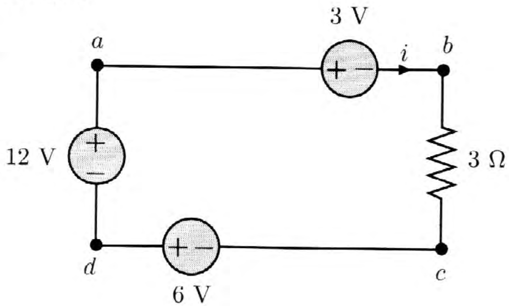
$$2i + 8 - v_{bd} = 0$$

da cui

$$v_{bd} = 2i + 8 = 12 \text{ V}$$

Nel circuito in Figura 2.16 ricavare la corrente i, la potenza dissipata nel resistore e la potenza erogata da ciascun generatore.

Figura 2.16



Soluzione

Applicando la LKT alla maglia *a*-*b*-*c*-*d*-*a* si ottiene

$$3 + 3i - 6 - 12 = 0$$

da cui si ricava

$$i = 5 \text{ A}$$

La potenza dissipata nel resistore vale

$$p_R = Ri^2 = 3 \times 25 = 75 \text{ W}$$

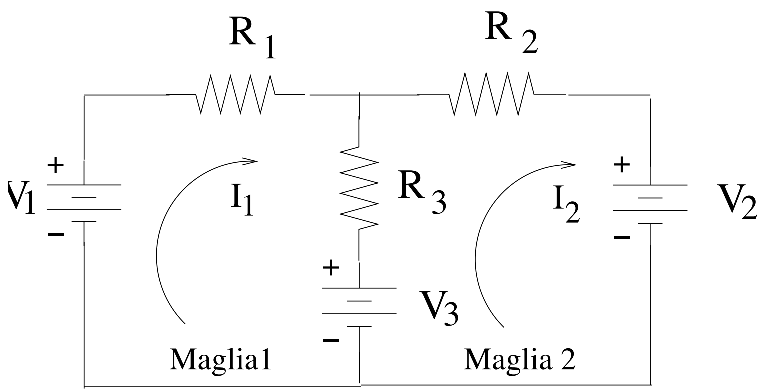
Ricaviamo la potenza erogata dai generatori.
Generatore di 3 V: la corrente di 5 A scorre dal + al −, quindi esso *assorbe* una potenza pari a $3 \times 5 =$ 15 W. La *potenza erogata* è dunque −15 W.
Generatore di 6 V: la corrente di 5 A scorre dal − al +, quindi la *potenza erogata* vale $6 \times 5 = 30$ W.
Generatore di 12 V: la *potenza erogata* vale $12 \times 5 =$ 60 W.
In totale la potenza erogata dai generatori è

$$-15 + 30 + 60 = 75 \text{ W}$$

che coincide con la potenza dissipata nel resistore. Si noti che un generatore indipendente può assorbire potenza, anziché erogarla.

Analisi delle maglie – circuiti planari con generatori di tensione

si applica la LTK alle correnti di maglia, senso preferibilmente orario



I_1, I_2 = correnti di maglia

LTK ad ogni maglia: $\Sigma\ \Delta V$ nel senso di percorrenza = Σ f.e.m. generatori nel senso di percorr.

- maglia 1 $\quad I_1R_1 + (I_1-I_2)R_3 = V_1 - V_3$ $\quad$ senso orario

  R_1+R_3 = autoresistenza (R_{tot} della maglia); R_3 = mutua resistenza
- maglia 2 $\quad -I_1R_3 + I_2(R_2+R_3) = V_3 - V_2$ $\quad$ senso orario
- i termini di resistenza mutua hanno sempre segno negativo rispetto al senso positivo della maglia

- **Metodo Visuale**
  - **individuare le maglie e fissare Il verso di percorrenza delle correnti di maglia**
  - **trovare le autoresistenze e le resistenze mutue**
  - **trovare le f.e.m. risultanti nel verso positivo fissato**
  - **scrivere le equazioni di maglia: numero incognite = numero eq. se non ci sono generatori di corrente**

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

matrice simmetrica: $R_{ij} = R_{ji}$

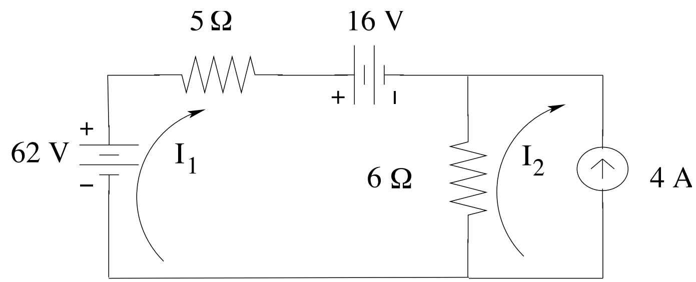
le equazioni risolte (metodo di Cramer) forniscono le correnti di maglia da cui poi le tensioni se richieste

L'analisi delle maglie si applica a circuiti che contengano solo generatori di tensione, dato che non ci sono relazioni che forniscano le tensioni ai capi di generatori di corrente; se, peró nel circuito é presente un generatore di corrente collegato in modo tale da essere percorso da una sola corrente di maglia, tale corrente é pari a quella del generatore o al suo opposto a seconda del segno e non sará necessario applicare la LTK a tale maglia (vedi applicazione 5.1).

Il numero di equazioni di maglia é uguale al munero delle maglie meno il numero di generatori di corrente, se ce ne sono.

Applicazione 5: analisi di maglia

1. Trovare le correnti di maglia nel circuito in figura.



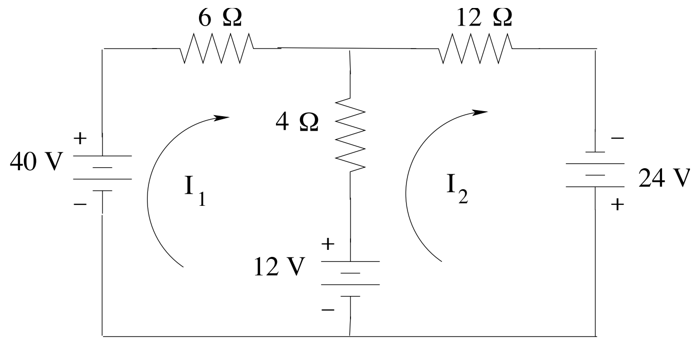
Per ricavare le equazioni di maglia è sempre meglio far uso delle autoresistenze e delle resistenze mutue. Nella maglia 1 l'autoresistenza vale 5+6 = 11 Ω; la resistenza mutua con la maglia 2 è invece di 6 Ω. La somma delle f.e.m. di generatore nella direzione di I_1 ś 62–16 = 46 V. Dunque l'equazione della LTK per la maglia 1 è $11I_1$–$6I_2$= 46.

Per la maglia 2 non ci serve alcuna equazione LTK, visto che l'unica corrente che percorre il generatore da 4 A è I_2, col risultato che I_2= –4 A. La corrente I_2 è negativa perchè la sua direzione di riferimento è opposta a quella del generatore. Incidentalmente, non si può scrivere una equazione LTK per la maglia 2 senza introdurre una variabile per la tensione, incognita, ai capi del generatore di corrente.

Sostituiamo I_2= –4 A nell'equazione della maglia 1 e otteniamo:

$$11I_1 - 6(-4) = 46 \quad \text{e} \quad i_1 = \frac{22}{11} = 2A$$

2. Risolvere il circuito di figura rispetto alle correnti di maglia



L'autoresistenza della maglia 1 è 6+4 = 10 Ω; la resistenza mutua con la maglia 2 è di 4 Ω; la somma delle f.e.m. di generatore nella direzione di I_1 è 40–12 = 28 V. Allora l'equazione della maglia 1 è, con la legge LTK: $10I_1 - 4I_2 = 28$.

Allo stesso modo l'autoresistenza della maglia 2 è 4+12 = 16 Ω; la resistenza mutua è 4 Ω e la sommadelle f.e.m. da generatori di tensione è 24+12 = 36 V. Abbiamo allora un'equazione LTK per la maglia 2: $-4I_1 + 16I_2 = 36$.

Se esaminiamo il sistema delle due equazioni di maglia notiamo la simmetria dei coefficienti (–4) rispetto alla diagonale principale, dovuta alla comune resistenza mutua:

$$\begin{aligned} 10I_1 - 4I_2 &= 28 \\ -4I_1 + 16I_2 &= 36 \end{aligned}$$

Un buon metodo di soluzione è qui di sommare alla seconda la prima equazione, moltiplicata per 4; in tal modo si elimina I_2. Risultato:

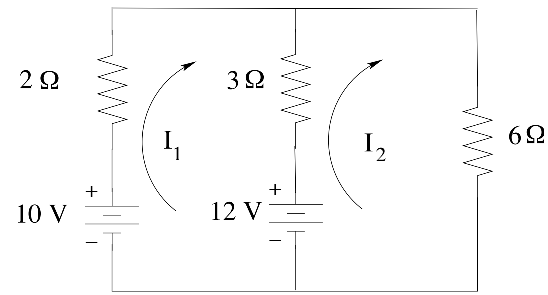
$$40I_1 - 4I_1 = 112 + 36 \;\text{ da cui }\; I_1 = \frac{148}{36} = 4.11A$$

Sostituendo nella seconda equazione:

$$-4(4.11) + 16I_2 = 36 \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{52.44}{16} = 3.28A$$

Applicazione 6: analisi di maglia

. Trovare nel circuito in figura le correnti che fluiscono dai terminali positivi di batteria. L'autoresistenza della maglia 1 è 2+3 = 5 Ω; la resistenza mutua



vale 3 Ω, la tensione netta collaborante di generatore vale 10–12 = –2 V. Per la maglia 2 l'autoresistenza è 6+3 = 9 Ω, la resistenza mutua è 3 Ω, la tensione netta collaborante di generatore vale 12 V. Allora le equazioni di maglia sono le seguenti:

$$\begin{aligned} 5I_1 - 3I_2 &= -2 \\ -3I_1 + 9I_2 &= 12 \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima per 3 e sommandola alla seconda eliminiamo I_2:

$$15I_1 - 3I_1 = -6 + 12 \quad \text{da cui} \quad I_1 = \frac{6}{12} = 0.5A$$

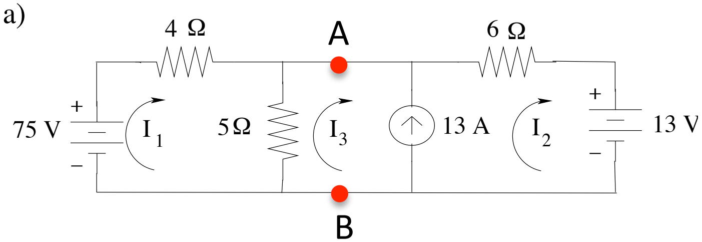
Sostituiamo nella seconda equazione ed abbiamo:

$$I_2 = \frac{12 + 3(0.5)}{9} = 1.5A$$

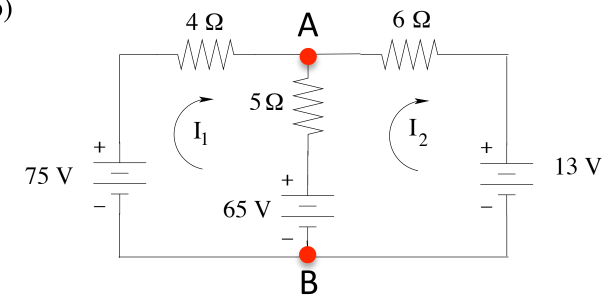
La corrente che esce dal polo positivo della batteria da 10 V è $I_1 = 0.5$ A. La corrente analoga della batteria da 12 V è invece: $I_2 - I_1 = 1.5 - 0.5 = 1$ A.

2. Trovare le correnti di maglia nel circuito in figura a.

a)



b)



le I_1 e I_2 non variano tra le figure a) e b) perche' e' stato introdotto il circuito equivalente di Norton tra i punti A e B

Per prima cosa convertiamo il generatore di corrente da 13 A e il resistore da 5 Ω in parallelo in un generatore di tensione, come si vede nel circuito della figura b.

L'autoresistenza della maglia 1 è 4+5 = 9 Ω, quella della maglia 2 è 6+5 = 11 Ω. La resistenza mutua è 5 Ω. Le f.e.m. dei generatori sono: 75–65 = 10 V per la maglia 1 e 65–13 = 52 V per la 2. Le corrispondenti equazioni di maglia sono:

$$\begin{aligned} 9I_1 - 5I_2 &= 10 \\ -5I_1 + 11I_2 &= 52 \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per 5, la seconda per 9 e sommiamo, eliminando I_1:

$$-25I_2 + 99I_2 = 50 + 468 \quad \text{da cui} \quad I_2 = \frac{518}{74} = 7A$$

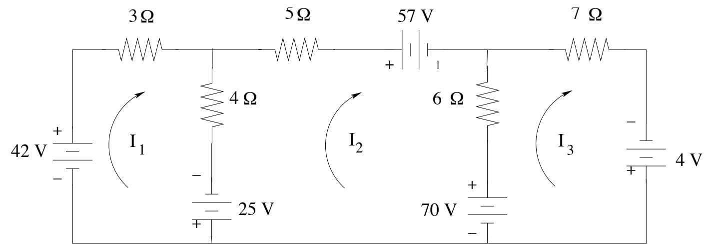
che sostituita nella prima equazione ci da:

$$9I_1 + 5(7) = 10 \quad \text{ovvero} \quad I_1 = \frac{10+35}{9} = 5A$$

corrente con segno negativo: invertire il verso

Nel circuito originale la corrente di generatore è $I_2 - I_3 = 13$ A. Quindi $I_3 = I_2 - 13 = 7 - 13 = -6$ A.

Applicazione 7
Risolvere il circuito rispetto alle correnti di maglia.



Le autoresistenze sono: 3+4 = 7 Ω per la maglia 1; 4+5+6 = 15 Ω per la 2; 6+7 = 13 Ω per la maglia tre. Le resistenze mutue sono: 4 Ω per le maglie 1 e 2, 6 Ω per la 2 e la 3, 0 Ω per la 1 e la 3. Le tensioni di generatore collaboranti sono: 42+25 = 67 V per la maglia 1; –25–57–70 = –152 per la 2; 70+4 = 74 V per la maglia 3. Dunque le equazioni di maglia sono:

$$
\begin{aligned}
7I_1 - 4I_2 - 0I_3 &= 67 \\
-4I_1 + 15I_2 - 6I_3 &= -152 \\
-0I_1 - 6I_2 + 13I_3 &= 74
\end{aligned}
$$

Notare la simmetria dei coefficienti di resistenza mutua rispetto alla diagonale principale. Sono le resistenze mutue comuni che danno regolarmente luogo a questa simmetria. Si vede anche che in ogni maglia l'autoresistenza è uguale o maggiore alla somma delle resistenze mutue, dato che la prima comprende le seconde.

Con la regola di Cramer:

$$
I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 67 & -4 & 0 \\ -152 & 15 & -6 \\ 74 & -6 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 15 & -6 \\ - & -6 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{4525}{905} = 5A
$$

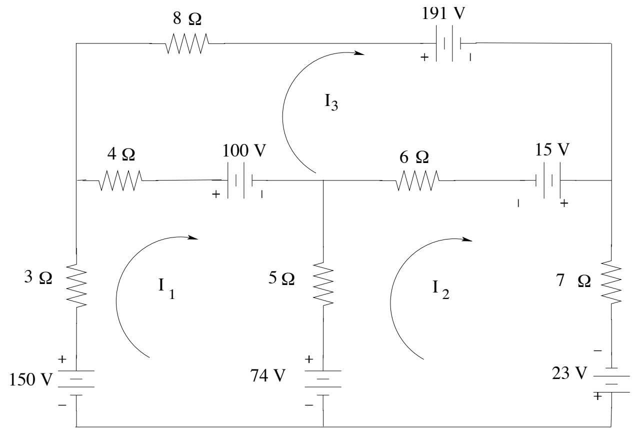
$$
I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 67 & 0 \\ -4 & -152 & -6 \\ 0 & 74 & 13 \end{vmatrix}}{905} = \frac{-7240}{905} = -8A
$$

corrente con segno negativo: invertire il verso

$$
I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 67 \\ -4 & 15 & -152 \\ 0 & -6 & 74 \end{vmatrix}}{905} = \frac{-1810}{905} = 2A
$$

Applicazione 8

Trovare le correnti di maglia nel seguente ciruito.



Le autoresistenze sono: 3+4+5 = 12 Ω per la maglia 1; 5+6+7 = 18 Ω per la 2; 6+4+8 = 18 Ω per la maglia tre. Le resistenze mutue valgono: 5 Ω per le maglie 1 e 2, 6 Ω per la 2 e la 3, 4 Ω per la 1 e la 3. Le tensioni di generatore collaboranti sono: 150–100–74 = –24 V per la maglia 1; 74+15+23 = 112 per la 2 e 100–191–15 = –106 V per la maglia 3. Le equazioni di maglia sono allora:

$$\begin{aligned} 12I_1 - 5I_2 - 4I_3 &= -24 \\ -5I_1 + 18I_2 - 6I_3 &= 112 \\ -4I_1 - 6I_2 + 18I_3 &= - - 106 \end{aligned}$$

Notare, come verifica, la simmetria dei coefficienti di resistenza mutua rispetto alla diagonale principale.

Con la regola di Cramer:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -24 & -5 & -4 \\ 112 & 18 & -6 \\ -106 & -6 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -5 & -4 \\ -5 & 18 & -6 \\ -4 & -6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{-4956}{2478} = -2A$$

corrente con segno negativo: invertire il verso

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -24 & -4 \\ -5 & 122 & -6 \\ -4 & -106 & 18 \end{vmatrix}}{2478} = \frac{9912}{2478} = 4A$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -5 & 24 \\ -5 & 18 & 112 \\ -4 & -6 & -106 \end{vmatrix}}{2478} = \frac{-12390}{2478} = -5A$$

Legge delle correnti di Kirchhoff (LCK)

nodo nel quale concorrono N rami percorsi dalle correnti i_k

correnti positive se escono dal nodo, negative se entrano

ad ogni istante, la somma algebrica delle correnti nei rami facenti capo allo stesso nodo e' nulla

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} i_k = 0}$$

conseguenza della conservazione della carica ai nodi di una rete/circuito.

Calcolare la tensione v nel circuito in Figura 2.23a.

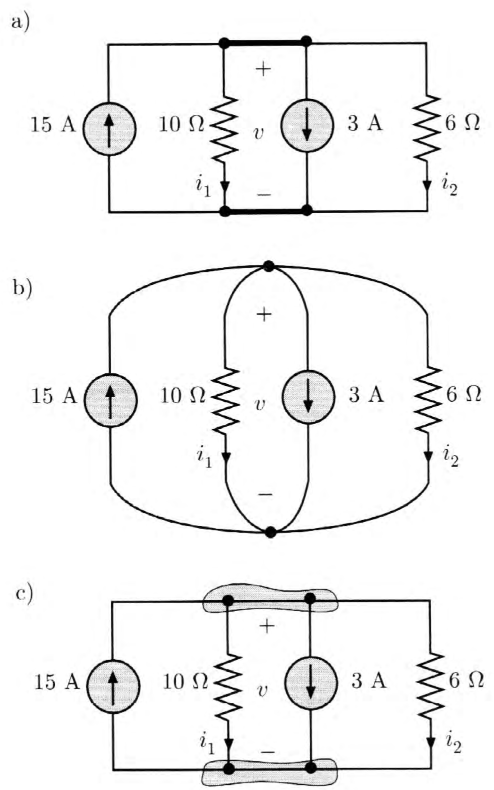


Figura 2.23 Il circuito in (a) può essere disegnato come in (b), senza modificare le correnti i_1 e i_2. In alternativa si può applicare la LKC ad una delle due linee chiuse, mostrate in (c).

Soluzione

I fili di collegamento a tratto più marcato in Figura 2.23a, sono equipotenziali; pertanto i quattro elementi hanno la stessa tensione, v. Il circuito può esere ridisegnato come in Figura 2.23b, senza modificare le correnti nei resistori. Si tratta di un circuito con due nodi.

Applicando la LKC ad uno dei due nodi in Figura 2.23b, si ha:

$$15 - i_1 - 3 - i_2 = 0 \tag{2.16}$$

Per la legge di Ohm si può scrivere

$$i_1 = \frac{v}{10} \qquad i_2 = \frac{v}{6}$$

Sostituendo nella (2.16) si ha,

$$15 - \frac{v}{10} - 3 - \frac{v}{6} = 0$$

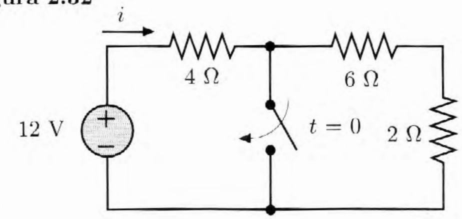
da cui

$$v = \frac{12}{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{6}} = 45 \text{ V}$$

Anziché ridisegnare il circuito come in Figura 2.23b potremmo applicare la LKC ad una delle due linee chiuse mostrate in Figura 2.23c. Otterremmo ugualmente la relazione (2.16) e quindi lo stesso valore di v.

Nel circuito in Figura 2.32 ricavare la corrente i per $t < 0$ e per $t > 0$.

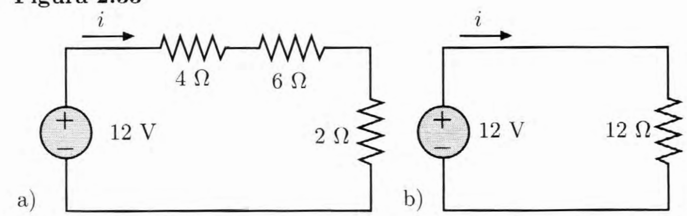
Figura 2.32



Soluzione

Per $t < 0$ l'interruttore è aperto. Il circuito può essere rappresentato come in Figura 2.33a.

Figura 2.33



I tre resistori in serie equivalgono ad un resistore di 12 Ω (Figura 2.33b). Pertanto

$$i = \frac{12}{12} = 1 \text{ A}$$

Per $t > 0$ l'interruttore è chiuso. Possiamo rappresentare l'interruttore chiuso come un corto circuito (Figura 2.34a). I due resistori in serie di 6 Ω e 12 Ω, equivalgono ad un resistore di resistenza 8 Ω (Figura 2.34b).

La tensione v *è nulla* per la presenza del corto circuito. Di conseguenza la corrente i_2 è nulla,

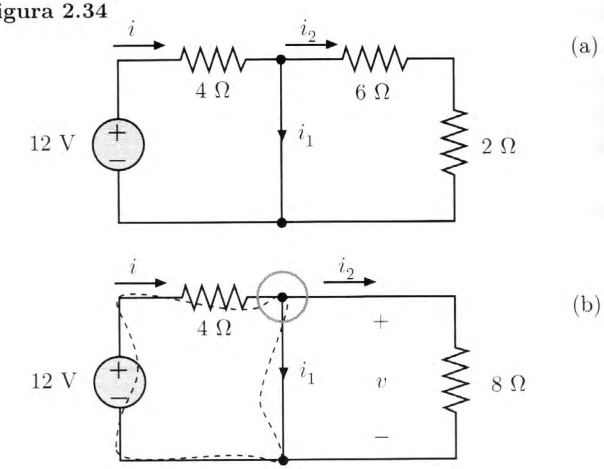
$$i_2 = v/8 = 0$$

Applicando la LKT alla maglia tratteggiata si ha

$$12 = 4i \Rightarrow i = 3 \text{ A}$$

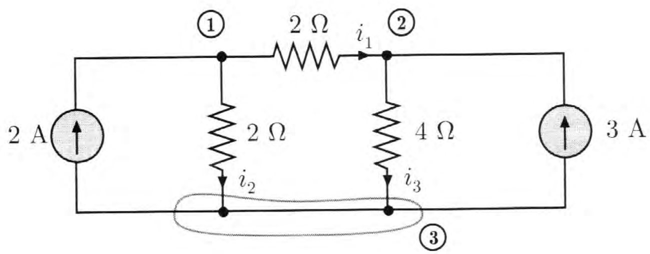
Applicando, infine, la LKC al nodo cerchiato in Figura 2.34b, si ha $i_1 = i - i_2 = i = 3$ A.

Figura 2.34



Analisi dei nodi – circuiti con generatori di corrente

si applica la LCK alle tensioni di nodo



nodo 1 $\quad -2 + i_1 + i_2 = 0$

nodo 2 $\quad -i_1 - 3 + i_3 = 0$

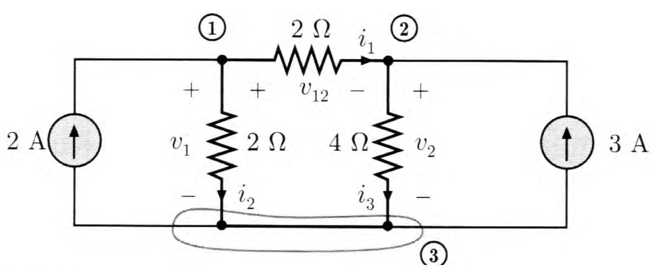
nodo 3 $\quad -i_2 - i_3 + 5 = 0$

Se sommiamo membro a membro le tre equazioni otteniamo l'identità: $0 = 0$. Ciò vuol dire che le tre equazioni *non sono linearmente indipendenti*, ma ciascuna di esse può essere ottenuta come combinazione lineare delle rimanenti due. Poiché un'equazione è ridondante, la possiamo scartare. Per esempio, scartando la terza, si ottiene il seguente sistema di due equazioni

nodo 1 $\quad -2 + i_1 + i_2 = 0 \qquad (3.2a)$

nodo 2 $\quad -i_1 - 3 + i_3 = 0 \qquad (3.2b)$

incognite > # equazioni
→ ridurre le incognite



$$i_2 = \frac{v_1}{2} \qquad i_3 = \frac{v_2}{4} \qquad i_1 = \frac{v_{12}}{2} \qquad (3.3)$$

dove v_{12} è la tensione tra i nodi 1 e 2. Applicando la LKT alla maglia evidenziata in neretto in Figura 3.3, si ha

$$v_{12} + v_2 - v_1 = 0$$

ovvero

$$v_{12} = v_1 - v_2 \tag{3.4}$$

quindi

$$i_1 = \frac{v_1 - v_2}{2} \tag{3.5}$$

In definitiva tutte le correnti possono essere espresse in funzione delle tensioni v_1 e v_2.

Le tensioni v_1 e v_2 sono chiamate **tensioni di nodo**; esse sono riferite entrambe al nodo ③ che è il **nodo di riferimento** ([1]).

Sostituendo le (3.3) e (3.5) nelle (3.2) si ottiene il sistema seguente con due equazioni e due incognite:

$$-2 + \frac{v_1 - v_2}{2} + \frac{v_1}{2} = 0$$

$$-\frac{v_1 - v_2}{2} - 3 + \frac{v_2}{4} = 0$$

Il sistema può essere riscritto nella forma seguente

$$v_1 - \frac{v_2}{2} = 2$$

$$-\frac{v_1}{2} + \frac{3}{4}v_2 = 3$$

o, in forma matriciale,

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema (3.6) con la regola di Cramer si ha:

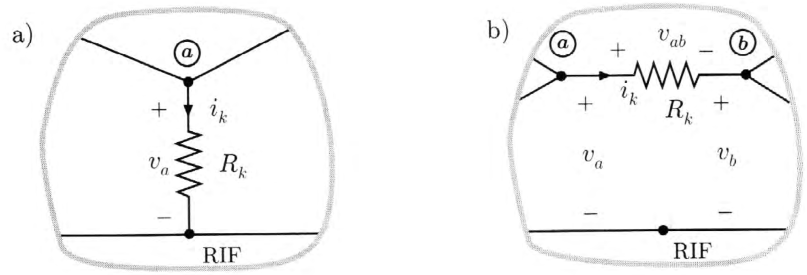
$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & \frac{3}{4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \text{ V} \qquad v_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \text{ V}$$

La conoscenza di v_1 e v_2 permette di calcolare anche v_{12} con la (3.4), e quindi i_1, i_2 e i_3 con le (3.3). Dunque le due tensioni di nodo hanno il ruolo di **variabili principali**, una volta calcolate le quali è possibile risalire *a tutte le tensioni e a tutte le correnti* nel circuito.

Metodo Visuale − Algoritmo 1 (soli generatori di corrente)

- **individuare il numero effettivo di nodi (N)**
- **scegliere un nodo di riferimento**
- **applicare la LCK a tutti i nodi eccetto quello di riferimento (N-1)**
- **esprimere tutte le correnti nei resistori in funzione delle tensioni di nodo**

In generale possiamo distinguere due casi: (1) un resistore connesso al nodo di riferimento (Figura 3.4a); (2) un resistore non connesso al nodo di riferimento (Figura 3.4b).



(1) Nel primo caso la corrente è semplicemente

$$\boxed{i_k = \frac{v_a}{R_k} = v_a G_k} \qquad (3.7)$$

dove v_a è la tensione del nodo ⓐ rispetto al riferimento.

(2) Il secondo caso è illustrato in Figura 3.4b. Applicando la LKT alla maglia ⓐ-ⓑ-*riferimento*-ⓐ, si ottiene

$$v_{ab} + v_b - v_a = 0 \qquad v_{ab} = v_a - v_b \qquad (3.8)$$

- **scrivere il sistema delle equazioni di nodo**

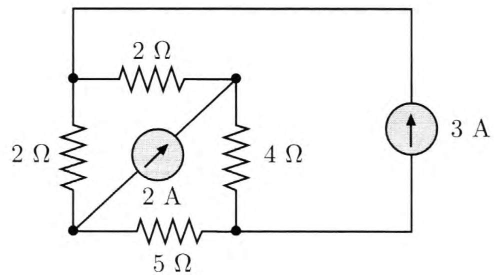
$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

- $G_{ii} = \sum$ conduttanze dei resistori connessi al nodo i,
- $G_{ij} = -\sum$ conduttanze dei resistori connessi tra il nodo i e il nodo j,
- $I_i = \sum$ correnti dei generatori connessi al nodo i, considerando positive quelle entranti e negative quelle uscenti.

Una conseguenza è che la matrice dei coefficienti è sempre *simmetrica*, cioè $G_{ij} = G_{ji}$. Dunque basta calcolare gli elementi sulla diagonale principale e quelli sopra di essa.

Applicare l'analisi nodale al circuito in Figura 3.6.

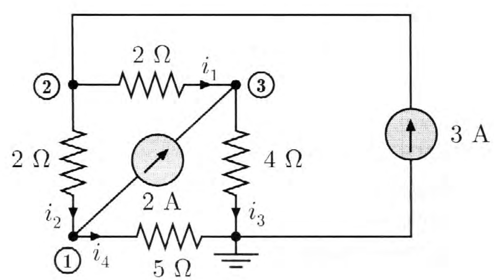
Figura 3.6



Soluzione

I nodi sono quattro. A ciascuno di essi sono connessi due resistori. Dunque la scelta del riferimento è arbitraria. Scegliamo il nodo in basso a destra, indicato in Figura 3.7 con il simbolo della terra.

Figura 3.7



Scriviamo le equazioni LKC per i tre nodi, prendendo col segno + le correnti uscenti.

nodo 1 $\quad i_4 - i_2 + 2 = 0$

nodo 2 $\quad i_1 + i_2 - 3 = 0$

nodo 3 $\quad i_3 - i_1 - 2 = 0$

Per le correnti, applicando le relazioni (3.7) (3.8), si ha:

$$i_1 = \frac{v_2 - v_3}{2} \tag{3.10a}$$

$$i_2 = \frac{v_2 - v_1}{2} \tag{3.10b}$$

$$i_3 = \frac{v_3}{4} \tag{3.10c}$$

$$i_4 = \frac{v_1}{5} \tag{3.10d}$$

Sostituendo le (3.10) nelle equazioni LKC si ha infine il sistema

$$\begin{bmatrix} 0{,}7 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 0{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

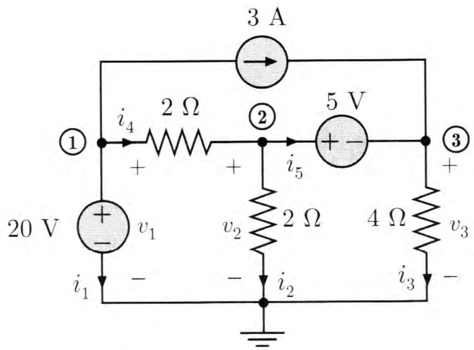
Vediamo che la matrice dei coefficienti è simmetrica. L'elemento G_{11} vale 0,7, che è la somma delle conduttanze dei resistori connessi al nodo 1, cioè $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$. Analogamente, $G_{22} = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$, $G_{33} = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$. L'elemento G_{13} è zero poiché tra il nodo 1 e il nodo 3 non è connesso alcun resistore. L'elemento I_1 è uguale a -2, poiché al nodo 1 è connesso un generatore da 2 A, con verso uscente. Per gli altri coefficienti del sistema, la verifica è lasciata al lettore. La soluzione del sistema è

$$v_1 = 3{,}846 \text{ V}$$

$$v_2 = 9{,}384 \text{ V}$$

$$v_3 = 8{,}923 \text{ V}$$

Circuiti con generatori di tensione



nodo ① $\quad i_1 + i_4 + 3 = 0$

nodo ② $\quad i_2 + i_5 - i_4 = 0$

nodo ③ $\quad i_3 - i_5 - 3 = 0$

Applicando la legge di Ohm si ha:

nodo ① $\quad i_1 + \dfrac{v_1 - v_2}{2} + 3 = 0$

nodo ② $\quad \dfrac{v_2}{2} + i_5 + \dfrac{v_2 - v_1}{2} = 0$

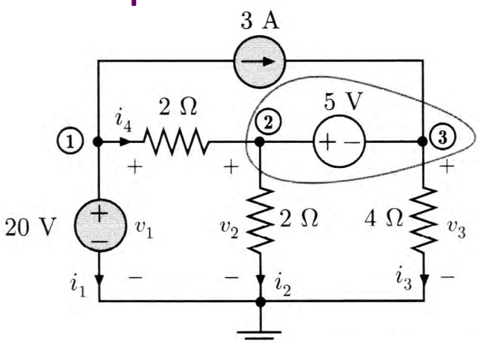
nodo ③ $\quad \dfrac{v_3}{4} - i_5 - 3 = 0$

$$\boxed{v_1 = 20\ \text{V} \qquad v_2 - v_3 = 5\ \text{V}}$$

5 equazioni in 5 incognite sistema ridondante

---

riduzione del numero di equazioni



$$i_2 + i_3 - i_4 - 3 = 0$$

$$\frac{v_2}{2} + \frac{v_3}{4} + \frac{v_2 - v_1}{2} - 3 = 0$$

$$v_1 = 20\ \text{V} \qquad v_2 - v_3 = 5\ \text{V}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v_2 + \dfrac{v_3}{4} = 13 \\ v_2 - v_3 = 5 \end{array}}$$

La linea chiusa che racchiude un generatore di tensione e i due nodi a cui è connesso è chiamata super-nodo.

Riassumendo:

- se un generatore di tensione *non è connesso al riferimento*, si scrive la LKC per il super-nodo corrispondente;
- se un generatore di tensione *è connesso al riferimento*, si ignora l'altro nodo connesso al generatore (*la sua tensione è nota*).

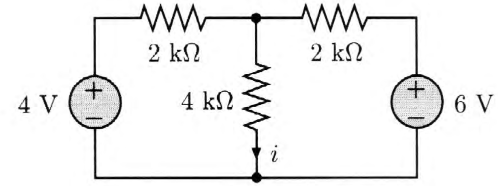
Possiamo dunque generalizzare il procedimento seguito nel modo seguente:

ANALISI NODALE: Algoritmo 2

generatori di tensione di corrente

1. Scegliere un nodo di riferimento.
2. Evidenziare eventuali *super-nodi*, relativi ai generatori di tensione *non connessi al riferimento*. Ogni super-nodo ingloba anche i due nodi ai quali è connesso il generatore.
3. Applicare la LKC a tutti i super-nodi e a tutti i nodi rimanenti, escludendo quello di riferimento, e quelli *connessi al riferimento tramite un generatore di tensione*.
4. Esprimere tutte le correnti nei resistori in funzione delle tensioni di nodo. Aggiungere i vincoli imposti dai generatori di tensione.

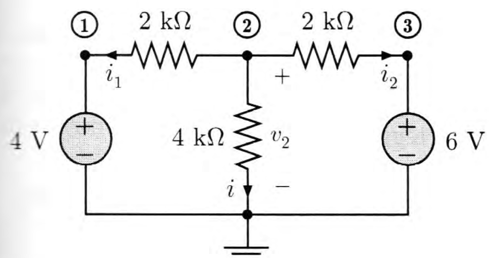
Nel circuito in Figura 3.11 ricavare la corrente i.



Soluzione

I due generatori di tensione hanno un nodo in comune. Scegliendo questo come nodo di riferimento, non si hanno super-nodi. L'unico nodo da considerare è il numero 2 in Figura 3.12.

Figura 3.12 Scegliendo come riferimento il nodo comune ai due generatori, si ha una semplificazione poiché le tensioni di nodo relative ai nodi 1 e 3 sono note (4 V e 6 V).



La LKC al nodo 2 è

$$i_1 + i_2 + i = 0$$

Utilizzando la legge di Ohm si ha

$$\frac{v_2 - v_1}{2} + \frac{v_2 - v_3}{2} + \frac{v_2}{4} = 0 \qquad (3.15)$$

Scriviamo i vincoli imposti dai generatori di tensione:

$$v_1 = 4 \text{ V} \qquad v_3 = 6 \text{ V}$$

Sostituendo nella (3.15) e semplificando si ottiene

$$v_2 = 4 \text{ V}$$

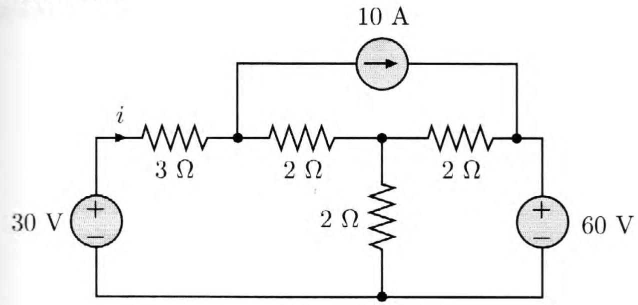
La corrente cercata vale

$$i = \frac{4}{4000} = 1 \text{ mA}$$

Come si vede da questo esempio, se esiste un nodo comune a più generatori di tensione, conviene sceglierlo come riferimento. In tal modo, per l'applicazione della LKC, si possono ignorare gli altri nodi connessi ai generatori.

Nel circuito in Figura 3.13 calcolare la corrente i.

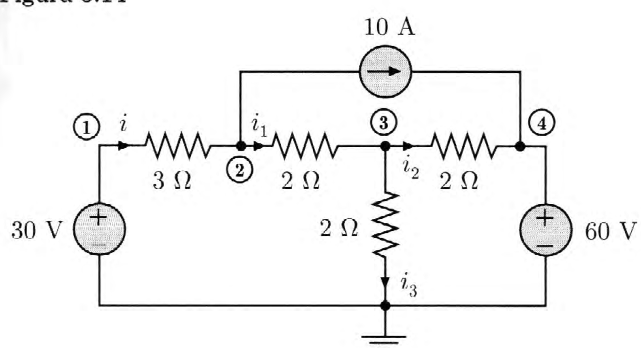
Figura 3.13



Soluzione

Notiamo che ci sono due generatori di tensione connessi allo stesso nodo, che scegliamo quindi come riferimento. Rimangono da considerare due nodi (② e ③ in Figura 3.14).

Figura 3.14



Applichiamo la LKC ai nodi ② e ③:

$$\text{nodo ②} \qquad -i + i_1 + 10 = 0$$

$$\text{nodo ③} \qquad -i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

ovvero, con la legge di Ohm,

$$\text{nodo ②} \qquad -\frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_2 - v_3}{2} + 10 = 0$$

$$\text{nodo ③} \qquad -\frac{v_2 - v_3}{2} + \frac{v_3 - v_4}{2} + \frac{v_3}{2} = 0$$

I vincoli dei generatori di tensione sono:

$$v_1 = 30 \text{ V} \qquad v_4 = 60 \text{ V}$$

Risolvendo per sostituzione si ha: $v_2 = 15$ V, $v_3 = 25$ V. Queste sono le variabili principali. La vera incognita è però la corrente i, che vale

$$i = \frac{v_1 - v_2}{3} = 5 \text{ A}$$

Tecniche di analisi sistematiche (minimo numero di equazioni indipendenti)

- analisi dei nodi: metodo piu' generale
- analisi delle maglie: duale dell'analisi dei nodi, circuiti planari (i fili si intersecano soli nei nodi)