Teoremi delle reti lineari

- circuito o rete lineare se contiene solo elementi lineari e generatori indipendenti
- elemento elettrico lineare se il rapporto eccitazione-risposta e' lineare
- generatore indipendente se produce tensioni/correnti in modo indipendente da altre tensioni/correnti presenti nel circuito
- circuito equivalente: due circuiti A e B si dicono equivalenti rispetto a due punti a e b se e' possibile sostituire l'uno con l'altro in modo che correnti e tensioni nel resto del circuito restino invariate

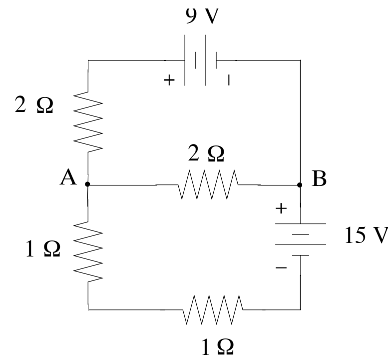
- **Teorema della sovrapposizione**

se in una rete sono presenti piu' generatori ideali di tensione, la corrente in un ramo e' la somma algebrica delle correnti dovute ai singoli generatori considerati attivi uno alla volta.

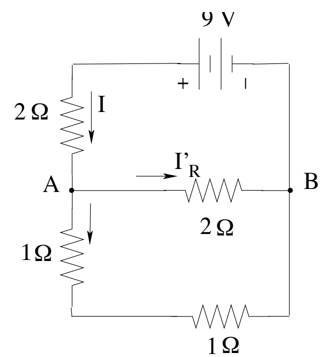
Ogni generatore inattivo deve essere sostituito da un corto circuito; ogni generatore reale deve essere sostituito dalla sua resistenza interna.

Esercizio 7a – Teorema della Sovrapposizione

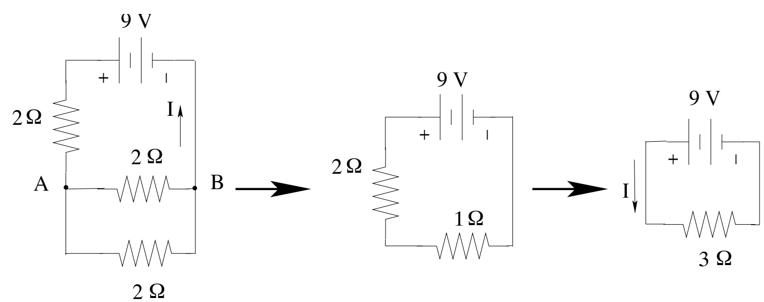
Calcolare la differenza di potenziale tra i punti A e B nel circuito in figura.



La corrente dovuta al generatore da 9 V si trova considerando il circuito

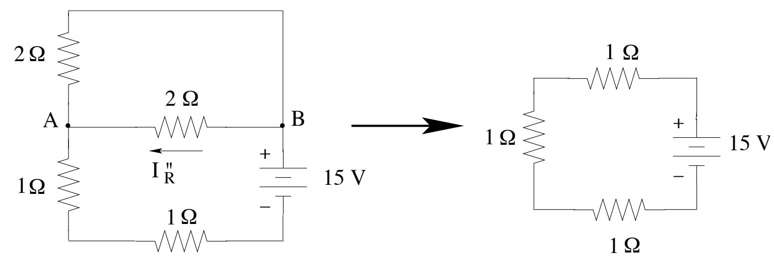


equivalente ai seguenti:



dove I=3 A. La corrente I si suddivide nel punto A in due parti uguali. Quindi: $I_R^{'} = 1.5$ A da A verso B.

La corrente dovuta all'altro generatore è, in modo analogo:



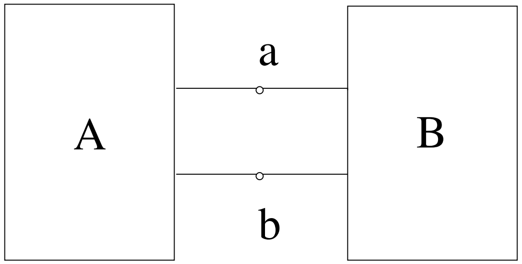
I = 5 A e $I_R^{''} = 2.5$ A da B verso A.
Infine:

$$I = I_R^{'} + I_R^{''} = 1\ A \quad \text{da B verso A}$$

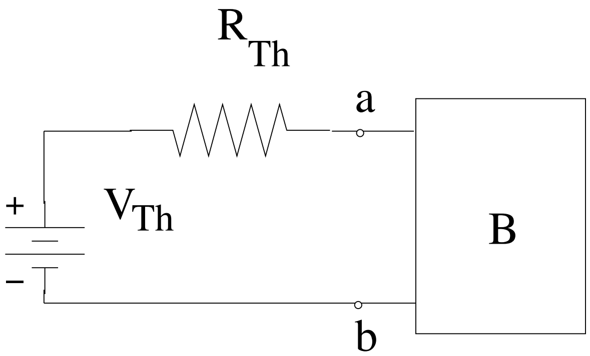
e perciò

$$V_A - V_B = 2\Omega \cdot I_R = -2V$$

- **Teorema di Thevenin**



(a)



(b)

A e B sono due circuiti qualsiasi, collegati nei punti a e b. Il circuito A e' equivalente, rispetto al circuito B, ad un generatore di tensione V_{th} con una resistenza R_{th} in serie.

V_{th} e' la tensione tra i punti a e b a circuito aperto (sconnesso da B); R_{th} e' la resistenza totale del circuito A nel quale i generatori di tensione sono sostituiti dalle loro resistenze interne, cosi' come vista dai punti a e b.

Se, in particolare, il circuito esterno B é costituito da una semplice resistenza R, il teorema puó essere espresso come:

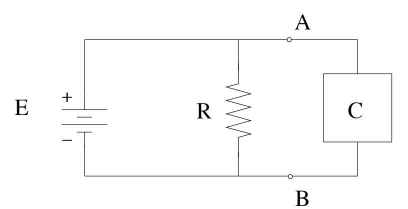
$$I_R = V_{eq} / (R + R_{eq})$$

dove I_R é la corrente che fluisce nella resistenza esterna R.

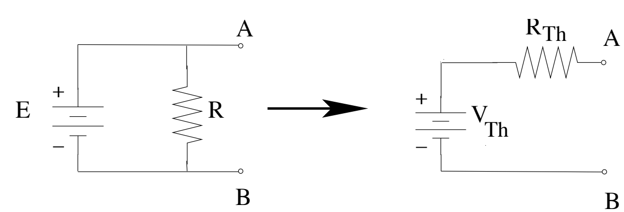
Il teorema é particolarmente utiel quando un'opportuna scelta dei punti a e b rende agevole in un circuito il calcolo della tensione e resistenza equivalente. Si vedano gli esercizi 8a, 8b e 8c al fondo del capitolo.

Di particolare importanza é il seguente esempio di applicazione del teorema.

Esercizio Trovare l'equivalente del circuito a sinistra dei punti A e B. dove C è un circuito qualsiasi.



Per il teorema di Thevenin si ha la seguente equivalenza:



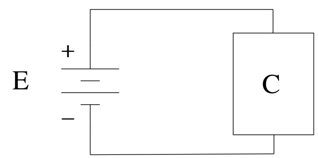
con

$$V_{Th} = V_{AB} = E$$

$$R_{Th} = 0$$

supponendo nulla la resistenza interna del generatore. Il circuito diviene semplicemente:

Questo significa che una resistenza in parallelo rispetto ad un generatore ideale non influisce per nulla sul resto del circuito. Per quello che



riguarda il circuito esterno C, R puó essere a priori trascurata. Indipendentemente dal suo valore, il generatore mantiene una tensione fissa $V_{AB} = E$ ai suoi terminali. Il valore di R influisce ovviamente sulla corrente erogata dal generatore

$$I = I_C + I_R$$

dove I_C, la corrente che va nel circuito C, non dipende da R e $I_R = E/R$ non risente di quanto succede nel circuito C.

- **Teorema del massimo trasferimento di potenza**

Un carico resistivo riceve la massima potenza da un circuito lineare in corrente continua quando la resistenza del carico é uguale alla resistenza di Thevenin del circuito cos'i come é vista dal carico stesso.

Quando la resistenza del carico é resa uguale a quella di Thevenin si dice che si fa l'*adattamento* delle resistenze.

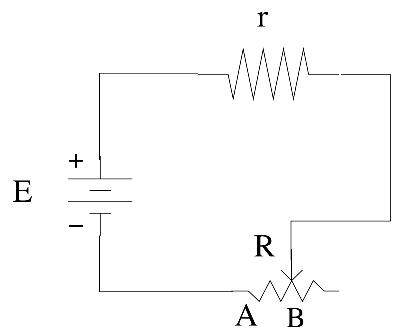


Figura 1.15:

Come semplice esempio, consideriamo un generatore con f.e.m. costante E e resistenza interna r, chiuso su una resistenza esterna variabile R (vedi figura 1.15), e calcoliamo il valore di R in corrispondenza al quale la potenza sviluppata in R é massima. Ai capi delle due resistenze r e

R disposte in serie si ha una tensione E e perció l'intensitá della corrente erogata dal generatore é $i = E/(r + R)$, mentre la d.d.p. tra gli estremi A e B di R é $\Delta V = iR = ER/(r + R)$. La potenza sviluppata nella resistenza esterna é:

$$P = i\,\Delta V = i^2 R = \frac{E^2 R}{(r + R)^2}$$

Il valore di R che rende massima P si ottiene ponendo uguale a zero la derivata di P rispetto a R e risulta R $= r$. É facile verificare che il valore r corrisponde proprio alla resistenza equivalente di Thevenin del generatore, cosí come vista dal carico resistivo esterno: $r = R_{Th}$. La potenza massima corrispondente é $P_{max} = E^2 / 4r$ e in tal caso si dice che il generatore é **adattato per il massimo trasferimento di potenza**.

La potenza totale sviluppata nell'intero circuito é:

$$P_{tot} = i\,E = \frac{E^2}{(r + R)}$$

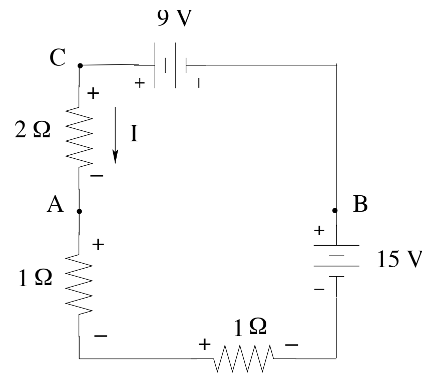
e in corrispondenza al valore R=r si ha $P_{tot} = E^2/2r$, cioé metá potenza viene sviluppata nella resistenza esterna mentre l'altra metá é dissipata nell'interno del generatore. Se R$\neq r$ la maggior parte della potenza viene dissipata sulla resistenza interna del generatore, che dovrá pertanto essere munito di un opportuno sistema di raffreddamento.

Esercizio 8a – Teorema di Thevenin

Calcolare, nel circuito dell'esercizio 7a, il valore di $V_A - V_B$.

Facciamo riferimento alla prima figura dell'esercizio 7a.

Conviene far corrispondere al circuito B della figura 1.14 la resistenza tra i punti A e B e al circuito A della figura 1.14 il resto del circuito di partenza, come indicato nella figura seguente:



La tensione equivalente di Thevenin, V_{Th}, è la tensione $V_A - V_B$ della figura precedente.

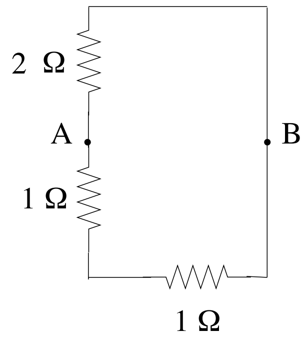
La corrente I si ricava (Kirchhoff) da:

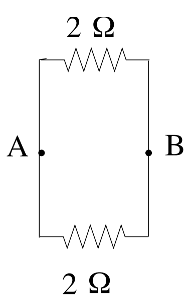
$$15 + 9 - 2I - I - I = 0$$

e risulta I=6 A. Allora $V_C - V_A$=12 V e

$$V_{Th} = V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_B) = -12 + 9 = -3V$$

La resistenza equivalente di Thevenin, R_{Th}, è la resistenza totale del circuito della figura precedente, con i generatori in corto circuito: Infine si ha:

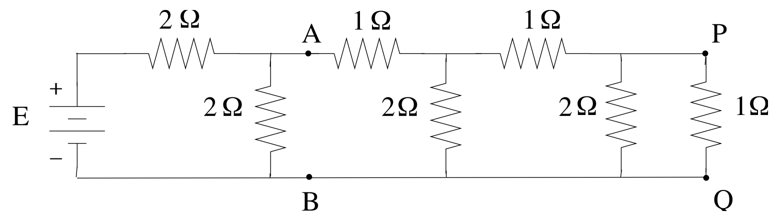




$$I_R = V_{Th}/(R + R_{Th}) = -3/3 = -1\ A$$
$$V_A - V_B = -2\ V$$

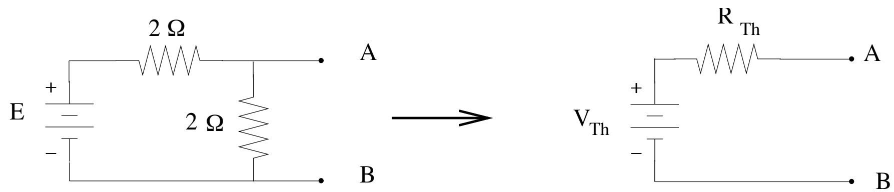
Esercizio 8b – Teorema di Thevenin

Calcolare la corrente che fluisce nell'ultima resistenza a destra del circuito in figura.



Conviene applicare ripetutamente il teorema di Thevenin.

Il circuito a sinistra dei punti A e B è equivalente al seguente:

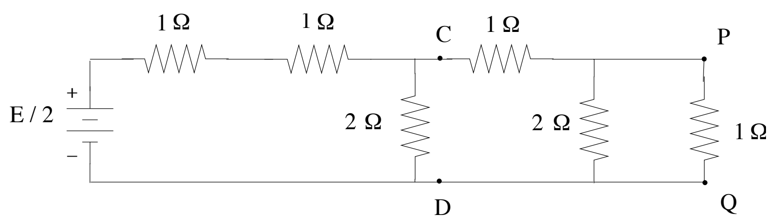


con

$$V_{Th} = V_{AB} = I \cdot 2 = E/(2+2) \cdot 2 = E/2$$

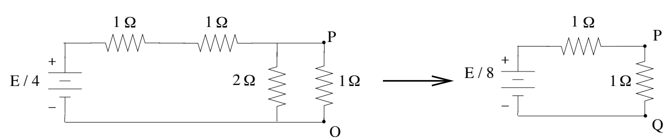
$$R_{Th} = (2 \cdot 2)/(2+2) = 1\Omega$$

Il circuito diventa:



Il circuito a sinistra di CD è identico a quello a sinistra di AB, con generatore di tensione dimezzato. Quindi: $V_{Th} = E/4 \quad R_{Th} = 1\Omega$

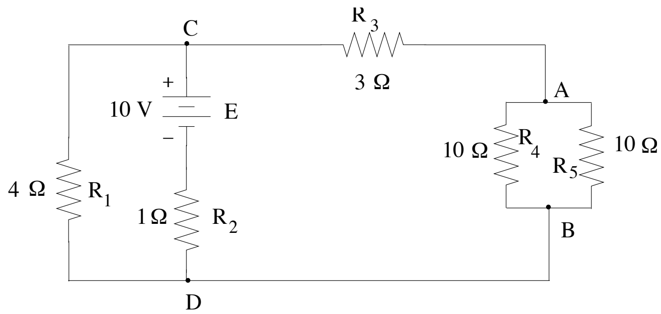
Il circuito diventa, in sequenza:



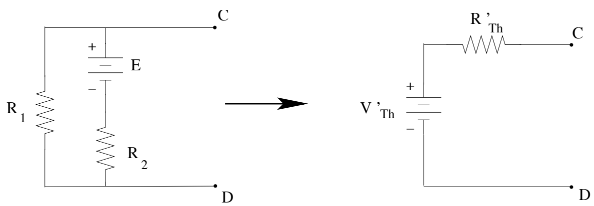
La corrente cercata vale: $(E/8) \cdot (1/2) = E/16 \ A$

Esercizio 8c – Teorema di Thevenin

Calcolare la caduta di tensione ai terminali della resistenza R_4 nel circuito



La parte di circuito a sinistra di CD equivale a:

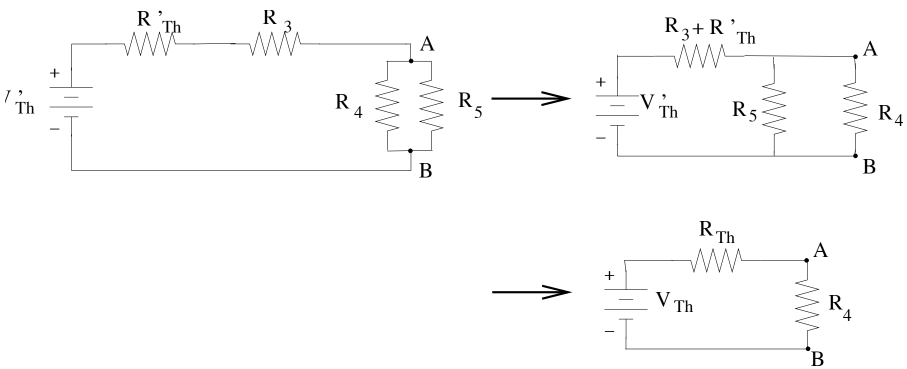


con:

$$R^{'}_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0.8\Omega$$

$$V^{'}_{Th} = E - R_2 \frac{E}{R_1 + R_2} = 8V$$

Applicando di nuovo il teorema di Thevenin al circuito così ottenuto



con

$$V_{Th} = V_{AB} = R_5 \frac{V^{'}_{Th}}{R_3 + R^{'}_{eq} + R_5} = 5.8V$$

$$R_{Th} = \frac{R_5(R_3 + R^{'}_{eq})}{R_3 + R^{'}_{eq} + R_5} = 2.75\Omega$$

da cui

$$V_4 = I_4 R_4 = R_4 \frac{V_{Th}}{R_4 + R_{Th}} = 4.55V$$

- **Teorema di Norton (duale di Thevenin – trasformazione dei generatori)**

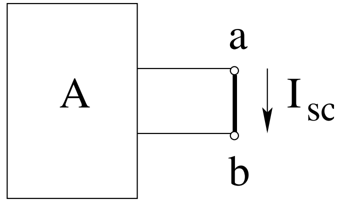
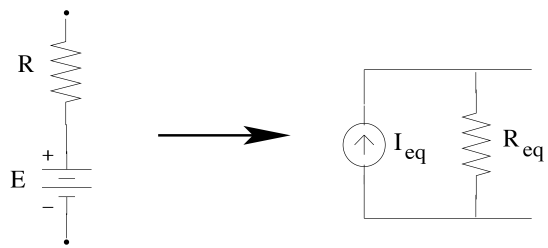


Figura 1.16:



un circuito A contenente sorgenti di tensione e' equivalente se visto da due terminali a e b ad un generatore di corrente ideale I_{eq} con in parallelo una resistenza equivalente R_{eq}.

I_{eq} e' la corrente di corto circuito; R_{eq} e' la restistenza totale del circuito A nel quale i generatori di tensione sono sostituiti dalle loro resistenze interne, cosi' come vista dai punti a e b, cioe' e' la R_{th}.

Il teorema si puó anche esprimere analiticamente:

$$V_{a\ b} \;=\; I_{eq}\ R_{eq}$$

Di fondamentale importanza é la applicazione del teorema al caso di un circuito costituito da un solo generatore di tensione con una resistenza in serie, vedi figura 1.17.

Cortocircuitando A e B, il generatore E eroga una corrente di valore E/R; la resistenza tra A e B con E cortocircuitato, vale R. Quindi:

$$I_{eq} \;=\; E/R \qquad R_{eq} \;=\; R$$

Viceversa, dato un circuito costituito da un generatore di corrente, I, e un resistore, R, composti in parallelo, applicando il teorema di Thevenin rispetto ai due capi del parallelo, si ricava facilmente che il circuito equivalente é costituito da un generatore di tensione $V_{Th} = I \cdot r$ con un resistore in serie $R_{Th} = R$. Concludendo

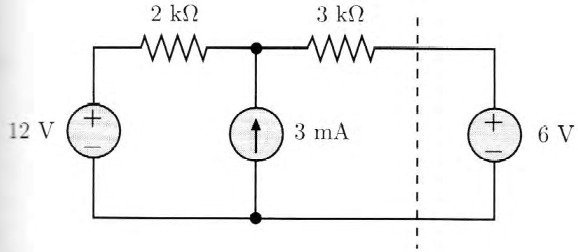
in un circuito generatori di tensione e corrente sono intercambiabili, con l'avvertenza che una resistenza in serie rispetto al generatore di tensione (per esempio la sua resistenza interna) diventa in parallelo rispetto al generatore di corrente.

Questo teorema é utile per sostituire eventuali generatori di corrente con generatori di tensione prima di applicare l'analisi di maglia, si veda l'applicazione 6 al fondo del capitolo, seconda parte.

L'operazione equivalente al cortocircuito del generatore di tensione é la sostituzione del generatore di corrente con un circuito aperto.

Ricavare i circuiti equivalenti di Thevenin e Norton, per il bipolo a sinistra della linea tratteggiata, in Figura 5.30.

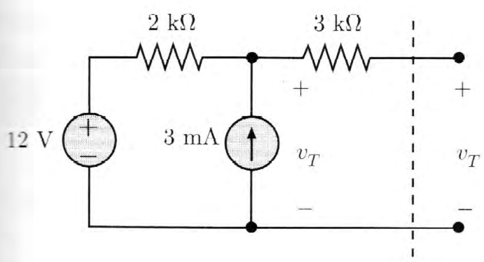
Figura 5.30



Soluzione

Il bipolo da considerare si ottiene eliminando la parte di circuito a destra della linea tratteggiata (Figura 5.31). Ricaviamo prima il circuito equivalente di Thevenin.

Figura 5.31 Calcolo della tensione a vuoto.

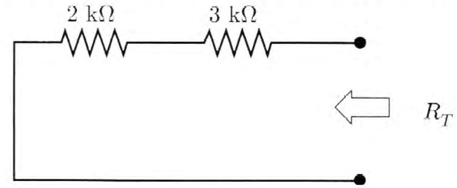


v_T. La resistenza da 3 kΩ non è percorsa da corrente e quindi non ha effetto sulla tensione a vuoto, che coincide con la tensione ai capi del generatore di corrente. La corrente di 3 mA scorre nel resistore di 2 kΩ, quindi applicando la LKT alla maglia, si ricava la tensione v_T

$$v_T = 3 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^3 + 12 = 18 \text{ V}$$

R_T. La resistenza equivalente si ottiene spegnendo i generatori (Figura 5.32).

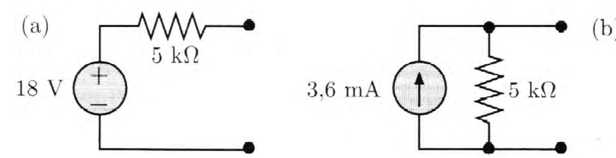
Figura 5.32 Calcolo della resistenza equivalente.



La resistenza equivalente vale 5 kΩ. Il circuito equivalente è mostrato in Figura 5.33a.
Il circuito equivalente di Norton si può ricavare trasformando quello di Thevenin (Figura 5.33b):

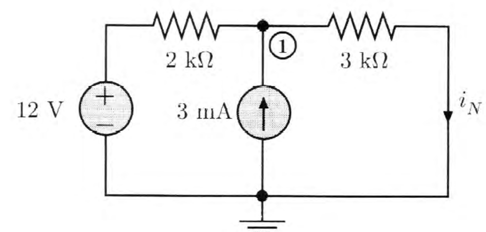
$$R_N = 5 \text{ k}\Omega \qquad i_N = 18/5000 = 3{,}6 \text{ mA}$$

Figura 5.33 Circuito equivalente di Thevenin. (b) Circuito equivalente di Norton.



Come verifica ricaviamo la corrente di Norton direttamente dal circuito in Figura 5.34.

Figura 5.34 Determinazione diretta della corrente di corto circuito.



Prendiamo come riferimento il nodo in basso e scriviamo la LKC per il nodo ①:

$$\frac{v_1 - 12}{2000} + \frac{v_1}{3000} - \frac{3}{1000} = 0$$

da cui $v_1 = 10{,}8$ V e $i_N = v_1/3000 = 3{,}6$ mA.

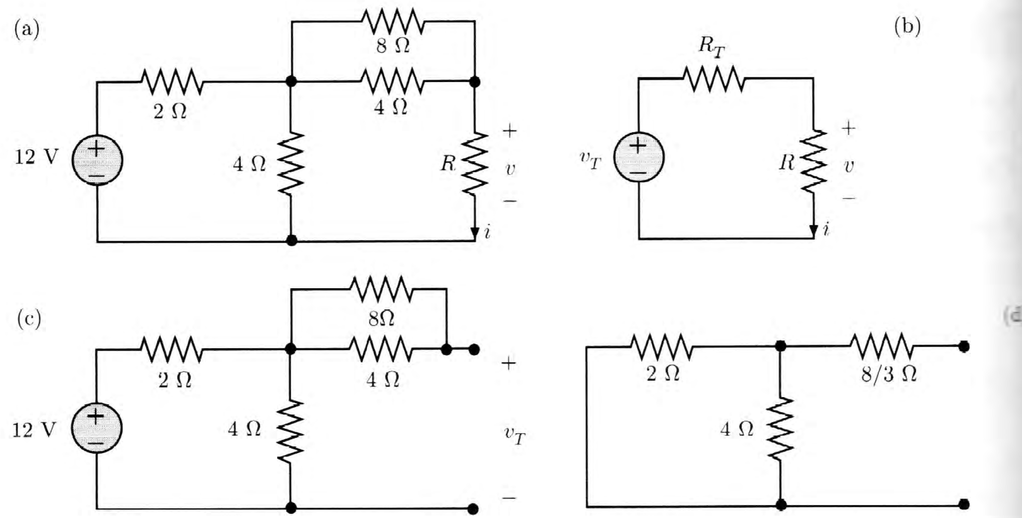
Nel circuito in Figura 5.35a, determinare R affinché:

(1) la corrente i sia pari ad 1 A;
(2) la tensione v sia pari ad 1 V.

Soluzione

Dobbiamo ricavare il valore di un elemento (nella fattispecie una resistenza) affinché la corrente o la tensione corrispondenti abbiano il valore desiderato.

Figura 5.35



La soluzione di questo tipo di problemi risulta notevolmente facilitata utilizzando il teorema di Thevenin.
In pratica si sostituisce il circuito, in cui è inserito il resistore, con il suo equivalente di Thevenin (Figura 5.35b). La corrente i e la tensione v sono le stesse del circuito originale. Quindi possiamo scrivere,

$$i = \frac{v_T}{R + R_T} \qquad (5.13a)$$

$$v = v_T \frac{R}{R + R_T} \qquad (5.13b)$$

Una volta note v_T ed R_T, dalle formule (5.13) si possono ricavare facilmente i valori richiesti di R.
Il bipolo a cui si applica il teorema di Thevenin è mostrato in Figura 5.35c. I due resistori in parallelo sono equivalenti ad un resistore di $32/12 = 8/3\ \Omega$.

Tale resistore non è percorso da corrente quando i morsetti sono aperti. Dunque la tensione a vuoto è la tensione ai capi del resistore di 4 Ω, che vale

$$v_T = 12\frac{4}{6} = 8\ \text{V}$$

Per calcolare R_T si spegne il generatore (Figura 5.35d). La resistenza equivalente si ottiene facilmente:

$$R_T = \frac{8}{3} + \frac{4 \times 2}{4 + 2} = \frac{12}{3} = 4\ \Omega$$

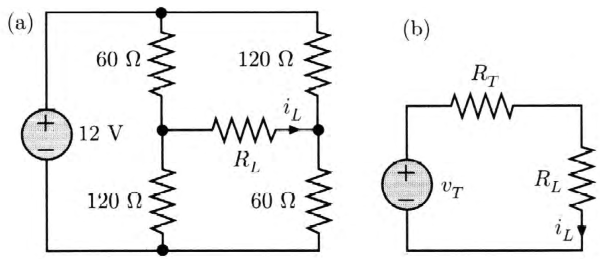
Dunque, con le formule (5.13), si ha:

$$(1) \quad 1 = \frac{8}{R + 4} \quad \Longrightarrow \quad R = 4\ \Omega$$

$$(2) \quad 1 = 8\frac{R}{R + 4} \quad \Longrightarrow \quad R = 4/7\ \Omega$$

Nel circuito in Figura 5.36a, ricavare la corrente i_L in funzione della resistenza R_L.

Figura 5.36



Soluzione

Anche questo tipo di problema si semplifica notevolmente, applicando i teoremi di Thevenin o Norton. Per esempio possiamo sostituire il circuito in cui è inserito R_L con il suo equivalente di Thevenin, ottenendo lo schema in Figura 5.36b.

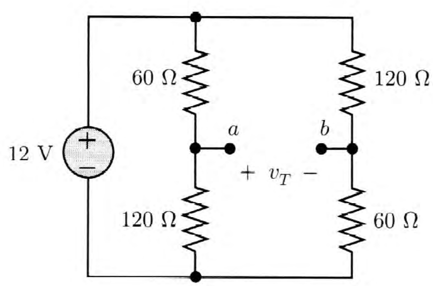
Dallo schema semplificato si ricava

$$i_L = \frac{v_T}{R_T + R_L} \tag{5.14}$$

Una volta note v_T ed R_T, la (5.14) rappresenta la funzione cercata.

Il circuito da considerare per il teorema di Thevenin, è il bipolo mostrato in Figura 5.37, con i terminali a e b.

Figura 5.37 Calcolo di v_T.



La tensione v_T si calcola con la tecnica del *doppio partitore* che abbiamo visto nel *capitolo 2*:

$$v_T = 12\left(\frac{120}{180} - \frac{60}{180}\right) = 4 \text{ V}$$

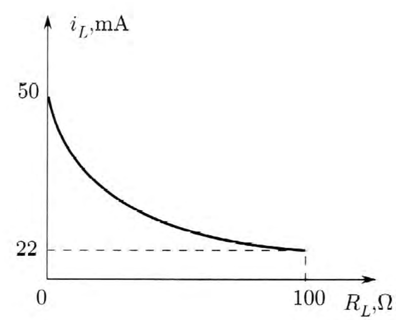
La resistenza R_T è la resistenza equivalente tra a e b con il generatore in corto circuito. Questa è

e vale $R_T = 80\ \Omega$. Tornando alla formula (5.14) si ha la funzione:

$$i_L = \frac{4}{80 + R_L}$$

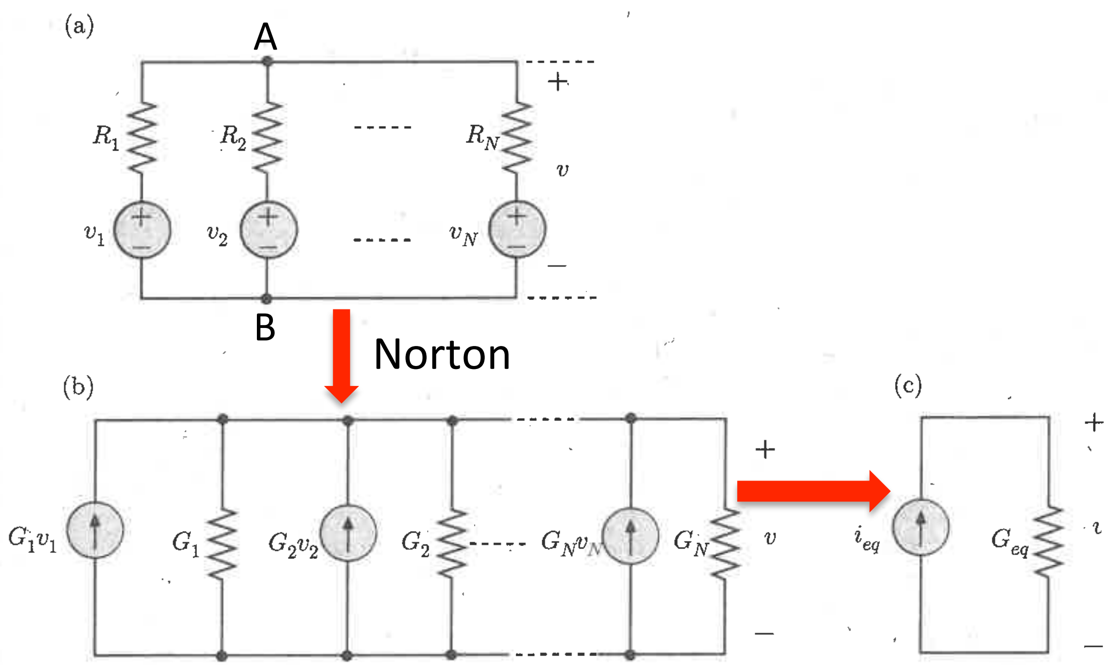
che è mostrata in Figura 5.38.

Figura 5.38 Grafico di i_L *vs.* R_L.



- **Teorema di Millman (applicazione di Norton)**

circuito composto da N bipoli in parallelo, formati ciascuno dalla serie di un generatore e di un resistore.



combinazione di generatori e conduttanze

$$G_{eq} = \sum_{k=1}^{N} G_k \qquad i_{eq} = \sum_{k=1}^{N} G_k v_k$$

$$\boxed{v = \frac{\sum_{k=1}^{N} G_k v_k}{\sum_{k=1}^{N} G_k}}$$

= v_{AB}, tensione ai capi di ciascun ramo in parallelo

Applicare il teorema di Millman al circuito in Figura 2.72.

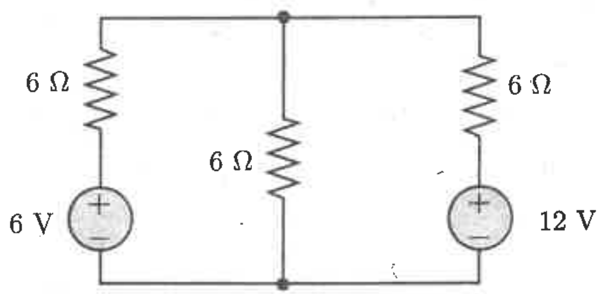


Figura 2.72

Soluzione

introducendo un generatore fittizio di 0 V nel ramo centrale (Figura 2.73).

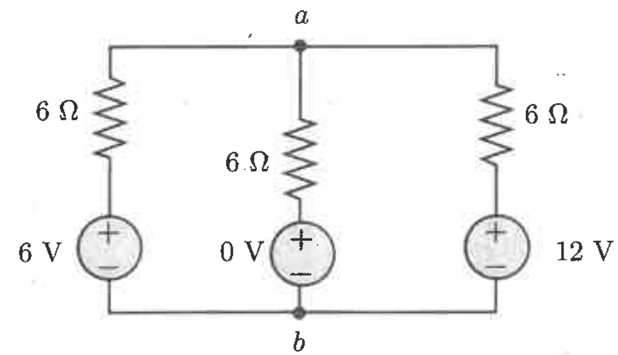


Figura 2.73

Applicando la formula (2.28) si ottiene:

$$v = \frac{\frac{1}{6}6 + \frac{1}{6}0 + \frac{1}{6}12}{\frac{1}{6} \times 3} = 6 \text{ V}$$

$= v_{ab}$

1.8 Circuiti a ponte

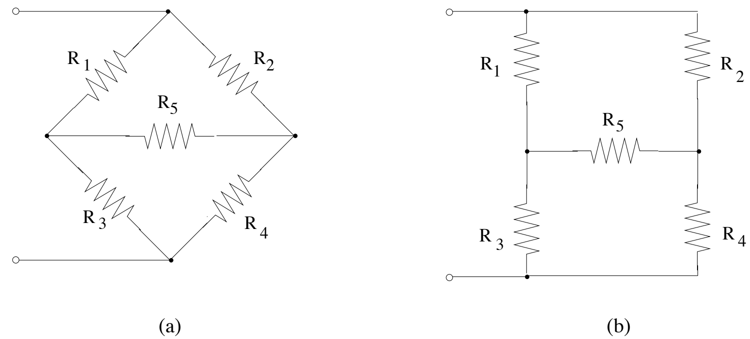


Figura 1.18:

Un circuito di resistori a ponte é costituito da due triangoli con un ramo in comune, come rappresentato in figura 1.18 a sinistra. Anche se il

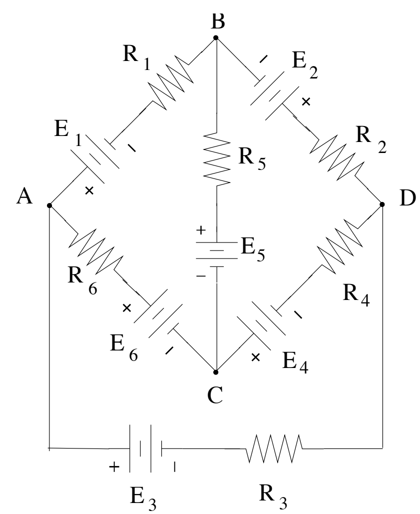


Figura 1.19:

circuito si presenta di solito in questa forma, anche quella della parte destra é abbastanza comune. Se si pensa di chiudere gli estremi del circuito con un ramo contenente un generatore di tensione (ed una resistenza) si ottiene un circuito a tre maglie, come in figura 1.19, che puó essere facilmente risolto con il metodo della analisi di maglia, I circuiti a ponte possono essere agevolmente risolti anche applicando il teorema di Thevenin. Si calcoli, ad esempio, la corrente nella resistenza R_g del circuito mostrato in figura 1.20.

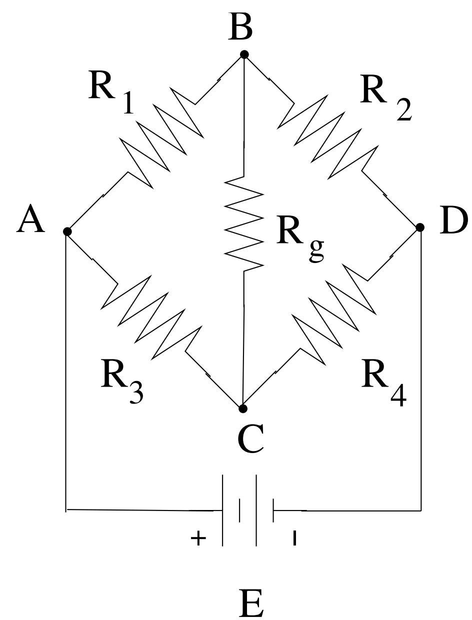


Figura 1.20:

La d.d.p. tra B e C quando la resistenza R_g viene tolta é:

$$V_{BC} = V_B - V_C = \left(E - R_1 \frac{E}{R_1 + R_2}\right) - \left(E - R_3 \frac{E}{R_3 + R_4}\right) =$$

$$\left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) E$$

La resistenza tra B e C, con R_g tolta e il circuito reso passivo é:

$$R_{BC} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

quindi la corrente che percorre la resistenza R_g ha intensitá:

$$i_g = \frac{V_{BC}}{R_{BC} + R_g}$$

Un circuito ponte serve anche per la misura di precisione delle resistenze; il *ponte di Wheatstone*, figura 1.21, ha il ramo centrale costituito da un sensibile indicatore di corrente, quale puó essere un galvanometro.

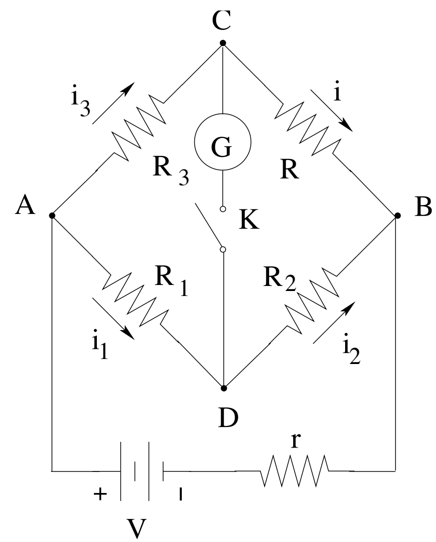


Figura 1.21:

Degli altri rami, tre sono resistori di precisione, uno dei quali variabile, ad esempio R_2; il quarto ramo é il resistore di cui si vuole misurare la resistenza incognita R. La misura si effettua regolando la resistenza R_2 del resistore variabile finché, quando l'interruttore sul ramo centrale K viene chiuso, l'indice del galvanometro non subisce deflessione. Questa mancanza di deflessione vuol dire che ai capi del galvanometro la tensione é zero e che anche a interruttore aperto la tensione su R_1 é uguale a quella su R_3 e la tensione su R é uguale a quella su R_2. In queste condizioni si dice che il ponte é *bilanciato* e con la partizione di tensione si ha:

$$\frac{R_1\ V}{R_1\ +\ R_2} = \frac{R_3\ V}{R_3\ +\ R} \quad \text{e} \quad \frac{R\ V}{R_3\ +\ R} = \frac{R_2\ V}{R_1\ +\ R_2}$$

Il rapporto delle due equazioni ci da l'*equazione di bilanciamento del ponte*:

$$R = \frac{R_2\ R_3}{R_1}$$

Per ricordare l'equazione di bilanciamento del ponte basta uguagliare i prodotti delle resistenze dei rami opposti: $R_1 \; R_2 \; = \; R_3 \; R$. Per calcolare R si puó anche usare una resistenza fissa e conosciuta R_3 e per le resistenze R_1 e R_2 un unico filo metallico di sezione costante e lunghezza totale nota, il cui punto D di collegamento col galvanometro possa essere variato lungo il filo mediante un contatto mobile (figura 1.22): le resistenze R_1 e R_2 sono proporzionali alle lunghezze l_1 e l_2 dei due tratti di filo individuati dal contatto

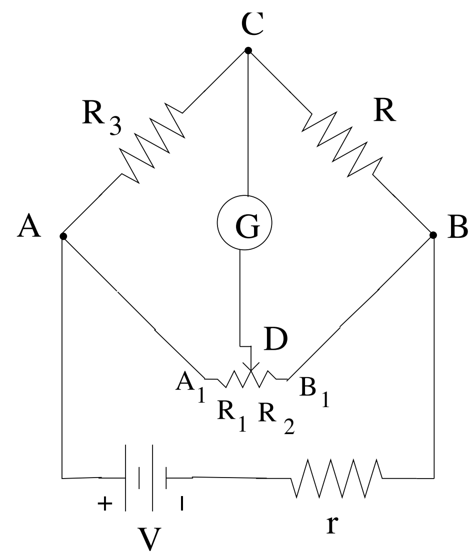


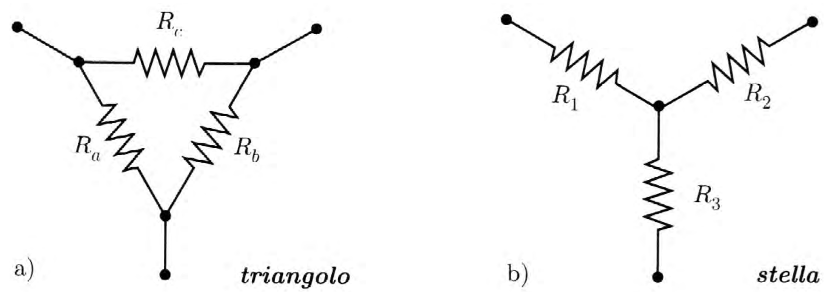
Figura 1.22:

mobile. Quando il ponte é bilanciato:

$$R \; = \; \frac{l_2 \; R_3}{l_1}$$

• Trasformazioni triangolo-stella

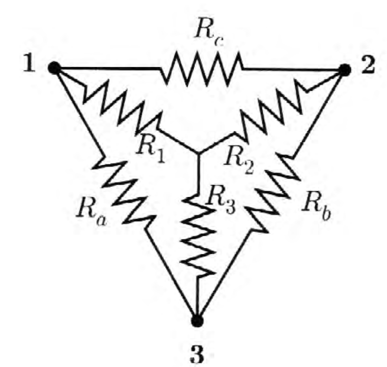
Tripoli resistivi: circuiti con tre terminali



essi sono equivalenti se valgono le seguenti relazioni

$$\boxed{\begin{array}{ll} R_1 = \dfrac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} & G_a = \dfrac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\[2ex] R_2 = \dfrac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} & G_b = \dfrac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \\[2ex] R_3 = \dfrac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} & G_c = \dfrac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} \end{array}}$$

$\Delta \Rightarrow \mathsf{Y}$ $\qquad\qquad$ $\mathsf{Y} \Rightarrow \Delta$



ottenute usando le LTK e LCK; se le tre resistenze sono uguali:

$$\boxed{R_{\mathsf{Y}} = \frac{R_\Delta}{3}}$$