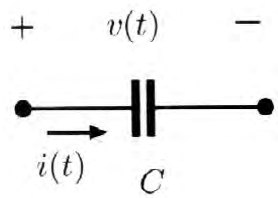
Capacita' - condensatore

- ad ogni coppia di conduttori isolati e' associata una grandezza chiamata **capacita'**
- misura della induzione elettrostatica tra i due conduttori
- ponendo una carica Q su uno dei due si induce una carica uguale e di segno opposto sull'altro e si genera una V tale che: **$Q = C V_C$** (Q proporzionale a V_C, tensione ai capi di C)

- C e' la *capacita' della coppia di conduttori*
- S.I.: Q(C), V_C (V), C(F) Farad: 1F = 1Q / 1V



- condensatore con **armature** piane: $C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{S}{d}$

S = superficie di ciascuna armatura, d=distanza tra le armature

ε_0= 8.854 10^{-12} F/m costante dielettrica del vuoto, ε_r costante dielettrica relativa del mezzo frapposto

Materiale	*Costante dielettrica k*
Aria secca (1 atm)	≈1
Vetro	4-10
Carta	3,5
Mica	5,5
Polistirolo	2,5
Teflon	2,0
Porcellana	6,5

- relazione caratteristica: $\boxed{i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}}$

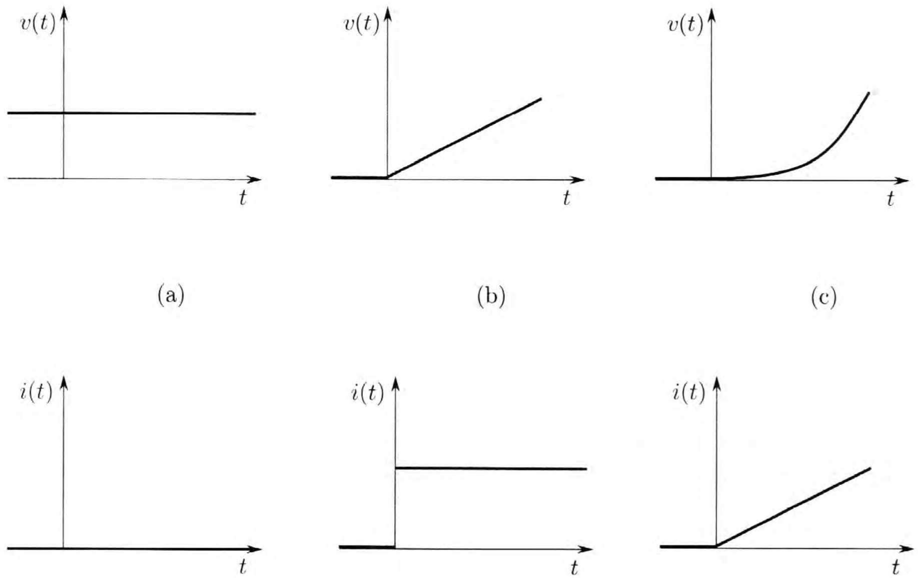
i(t) e' lineare vs $dV_C(t)/dt$ (C)

relazione differenziale: elemento dinamico

- relazione inversa

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(x)dx$$

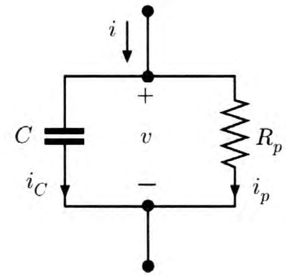
dipende dall'andamento di i(t) tra 0 e t → elemento con memoria



- proprieta' del condensatore:
  - se dVc(t)/dt = 0 → i(t)=0 CA
  - V_C e' una funzione continua del tempo (senno' i(t) → infinito, non fisico)
    $V_C(t_0^+) = V_C(t_0^-)$, no discontinuita' di V_C come conseguenza della relazione caratteristica

- energia immagazzinata: $w = ½ CV_C^2$ (se V_C e' periodica, w media sul periodo e' nulla → elemento passivo

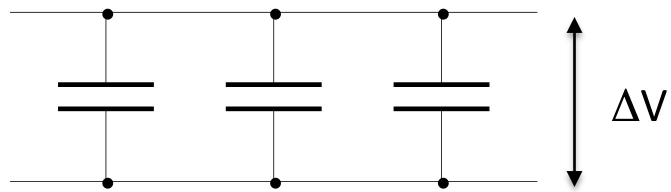
- condensatore reale



Il condensatore ideale è un dispositivo privo di perdite, ma ciò non è vero per un condensatore reale. Infatti nel dielettrico si ha sempre una piccolissima dissipazione. La situazione può essere rappresentata con un modello più realistico che comprende un resistore *in parallelo* al condensatore ideale (Figura 6.12). La caratteristica del condensatore reale si ottiene tenendo conto che i due elementi in Figura 6.12 sono in parallelo, dunque

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_p}$$

- condensatori in parallelo



cariche singole $Q_1 = C_1\Delta V, \quad Q_2 = C_2\Delta V, \;..... \; Q_n = C_n\Delta V$

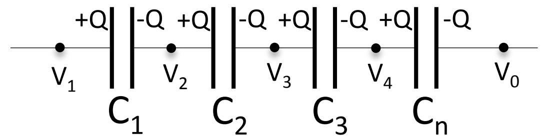
carica totale: $Q = Q_1 + Q_2 + ... + Q_n = (C_1 + C_2 + ... + C_n)\Delta V$

Pertanto la capacitá equivalente, C_{eq} della batteria di condensatori in parallelo risulta:

$$C_{eq} = \frac{Q}{\Delta V} = C_1 + C_2 + ... + C_n$$

La capacitá equivalente di un insieme di condensatori disposti in parallelo é la somma delle capacitá di tutti i condensatori componenti. I raggruppamenti in parallelo vengono usati per realizzare capacitá elevate.

- condensatori in serie



se sull'armatura esterna del primo C e'presente la carica Q, sulle altre armature si hanno successivamente: - Q e +Q (cariche opposte sulla armature di ciascun C)

$$C_1 = \frac{Q}{V_1 - V_2},\ C_2 = \frac{Q}{V_2 - V_3},\ \dots\ ,\ C_n = \frac{Q}{V_n - V_0}$$

e quindi

$$V_1 - V_0 = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) + \dots + (V_n - V_0)$$
$$= Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}\right)$$

I condensatori in serie possono essere considerati equivalenti ad un unico condensatore di capacitá C_{eq}:

$$C_{eq} = \frac{Q}{V_1 - V_0} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_n}}$$

capacita' equivalente

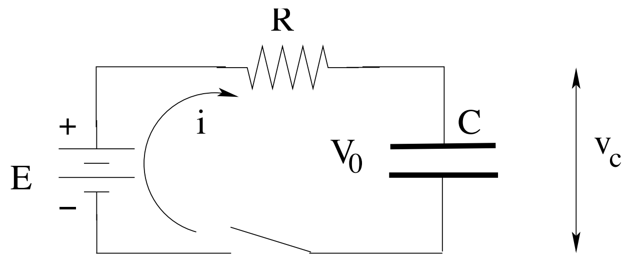
ovvero

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_n}$$

Se piú condensatori sono disposti in serie, il reciproco della capacitá equivalente del sistema risultante é uguale alla somma dei reciproci delle capacitá di tutti i condensatori.

Se tutti i condensatori in serie sono uguali ($C_1 = C_2 = \dots = C_n$ la batteria ha una capacitá equivalente pari a $1/n$ della capacitá di un solo elemento e la tensione alle armature di ogni condensatore é $1/n$ della tensione applicata.

Circuiti del primo ordine – circuito RC, comportamento transitorio



V_0 = tensione iniziale C (Q≠0)

- t<0, interruttore aperto → circuito aperto, i=0
- t=0, chiusura interruttore
- t≥0: periodo transitorio, brusca variazione delle condizioni del circuito seguita da regime di i e V stazionari.
- LTK:

  $E = I\,R + V_C = C\,dV_C/dt\,R + V_C \rightarrow dV_C/dt + 1/(RC)\,V_C = E \rightarrow$ $\mathbf{dV_C/dt + 1/\tau\, V_C = E}$
- equazione differenziale del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti (C, R costanti), non omogenea (termine noto = E≠0)
- τ = costante di tempo del circuito = RC
- soluzione (separazione delle variabili + *continuita' di V_C: $V_C(t=0) = V_0$*):

$$V_C(t) = E - (E - V_0)e^{-t/\tau}$$

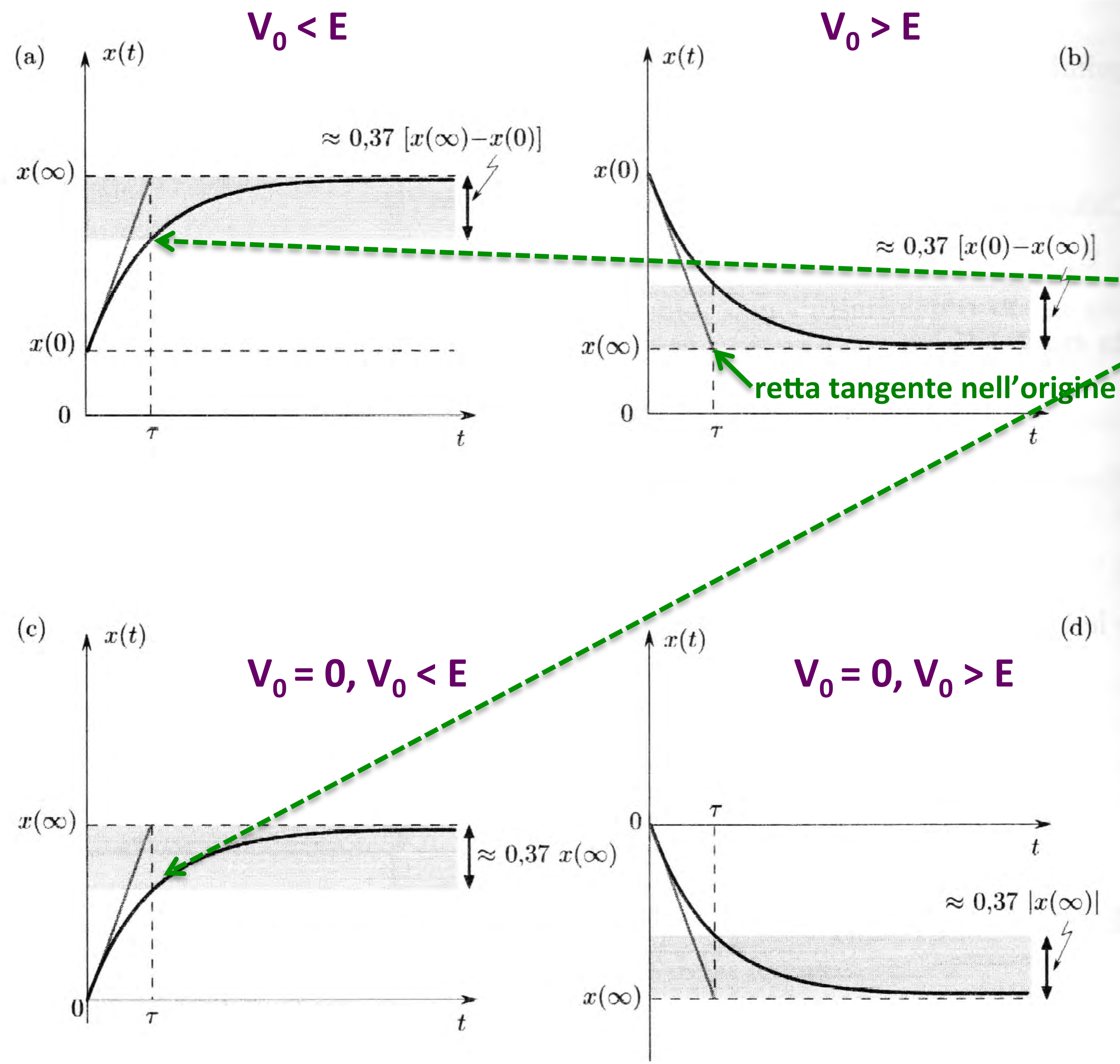
o, se $V_0 = 0$:

$$V_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

$$I_C = C\frac{dV_C}{dt} = \frac{E - V_0}{R}e^{-t/\tau}$$

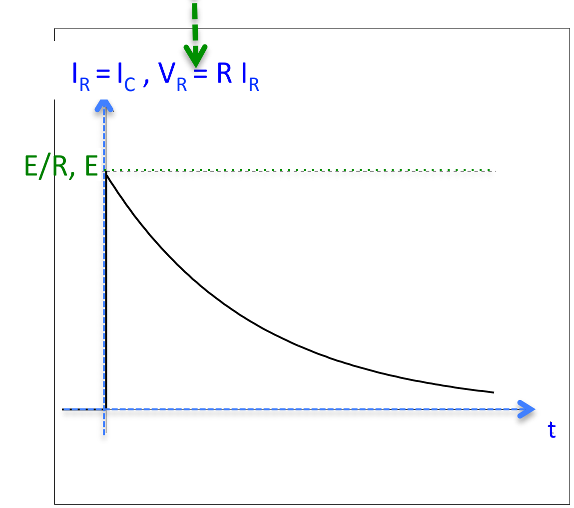
$$I_C = E/R\ e^{-t/\tau}\ \text{per}\ V_0 = 0$$

$$V_R = IR = (E - V_0)e^{-t/\tau}\ \ \text{ovvero}\ \ V_R = Ee^{-t/\tau}$$



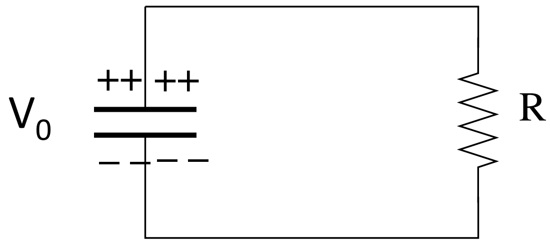
V_C: tre parametri

- $V_0 = V(t=0)$
- $V_\infty = V(t \rightarrow \infty) = E$
- τ rapidita' di variazione di V_C
- $V_C(\tau) \sim E - (E-V_0)/3$
- $V_C(\tau) \sim E\ 2/3 \quad V_0=0$
- dopo 4-5 τ $V_C = V_\infty$
- $I_R = I_C$ picco >0 se $V_0 < E$
  picco <0 se $V_0 > E$



condensatore a t=0: CC
a t → ∞ : CA

Scarica del condensatore



chiusura dell'interruttore a t=0: LTK

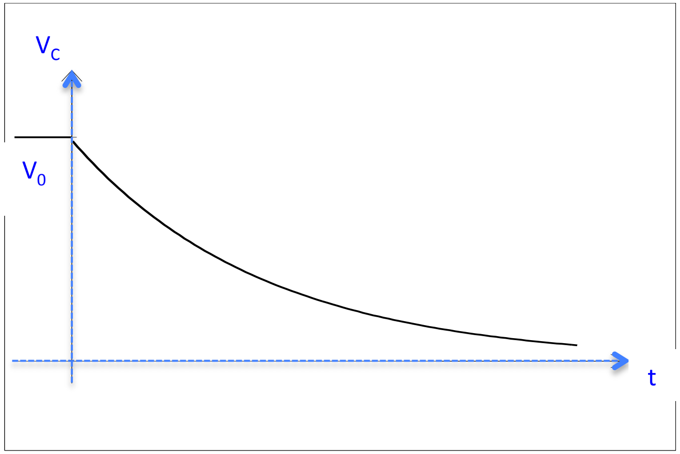
$$V_C \;+\; RI = 0$$

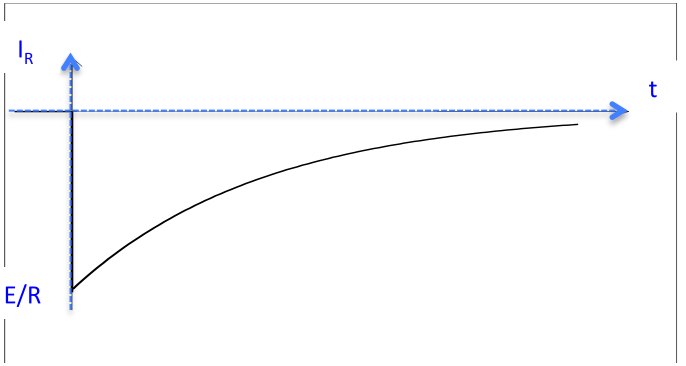
con $I = C dV_C/dt$

$$V_C \;+ RC\,\frac{dV_C}{dt} = 0$$

$$\frac{dV_C}{V_C} = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\boxed{V_C = V_0 e^{-t/\tau} \qquad I = C\frac{dV_C}{dt} = -\frac{V_0}{R}e^{-t/\tau}}$$

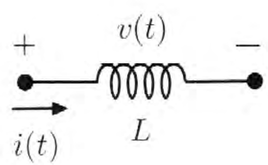




verso della corrente opposto a quello della fase di carica del C

Induttanza – induttore (avvolgimento)

- ad ogni segmento di un circuito chiuso e' associata una grandezza chiamata **induttanza**
- misura della efficacia del circuito a concatenare un B alla corrente che lo percorre (*induzione elettromagnetica*)
- efficacia descritta da: $\mathbf{\Phi = L\, I_L}$ (Φ proporzionale a I_L, flusso concatenato al circuito)
- L e' l' *induttanza del circuito* (dipende dalla geometria)
- S.I.: Φ(Wb), I_L (A), L(H) Henry: 1H = 1Wb / 1A = 1V s / 1A



- solenoide con N spire: $$L = \mu \frac{N^2 A}{l}$$

A = superficie della spira, l=lunghezza del solenoide, N= numero di spire

$\mu = \mu_0 \mu_r$ permeabilita' magnetica del nucleo, μ_0 = 1.26 10^{-6} H/m costante dielettrica del vuoto, μ_r permeabilita' magnetica relativa del nucleo

- relazione caratteristica: $$\boxed{v(t) = L\frac{di(t)}{dt}}$$

v(t) e' lineare vs $di_L(t)/dt$: elemento lineare

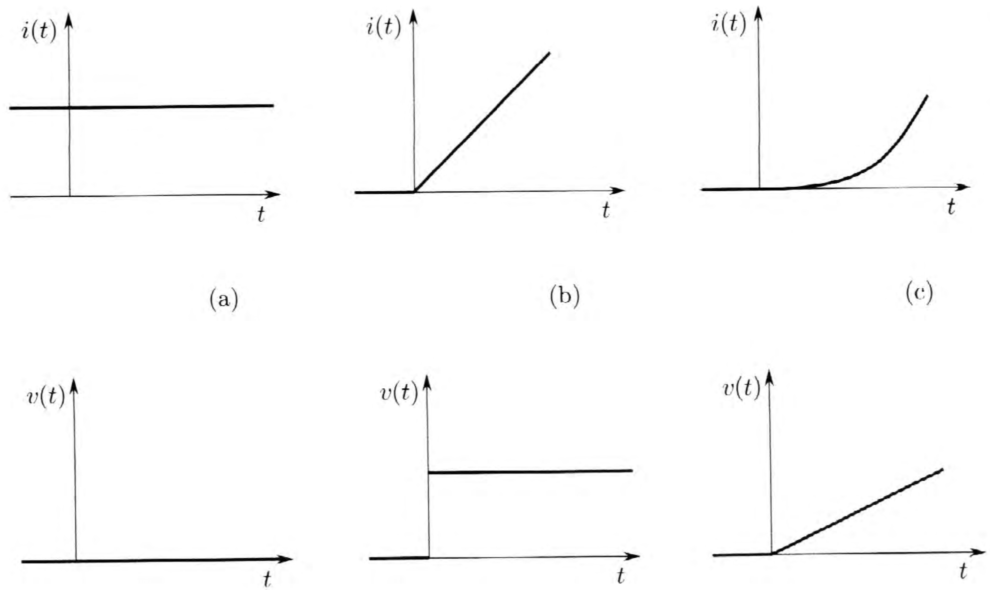
relazione differenziale: elemento dinamico

$$v(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

legge di Faraday

- relazione inversa $$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(x)dx$$

dipende dall'andamento di v(t) tra 0 e t → elemento con memoria



- proprieta' dell'induttore (duale del condensatore):
  - se $di_L(t)/dt = 0$ → $v(t)=0$ CC
  - i_L e' una funzione continua del tempo (senno' v(t) → infinito, non fisico)
    $i_L(t_0^+) = i_L(t_0^-)$, no discontinuita' di i_L come conseguenza della relazione caratteristica

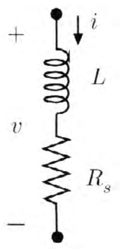
- energia immagazzinata: $w = ½ Li_L^2$ (se i_L e' periodica, w media sul periodo e' nulla → elemento passivo

- induttore reale

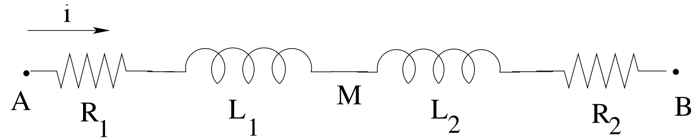
L'induttore ideale è un dispositivo privo di perdite; ma ciò non è esatto per un induttore reale. Infatti il filo metallico che costituisce l'avvolgimento ha una resistenza non nulla che provoca una dissipazione di potenza, proporzionale al quadrato della corrente. La situazione può essere rappresentata con un modello più realistico che comprende un resistore *in serie* all'induttore ideale (Figura 6.23). La resistenza R_s è normalmente molto piccola (da qualche mΩ a qualche ohm). Poiché i due elementi sono in serie, la caratteristica dell'induttore reale è,

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} + R_s i(t)$$

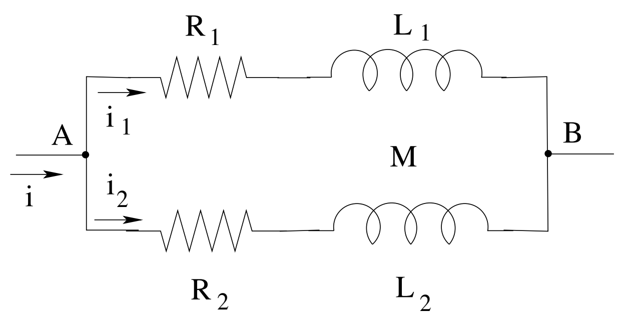
dove $R_s i(t)$ è la tensione dovuta alla resistenza dell'avvolgimento (legge di Ohm). Poiché combinando due elementi ideali otteniamo il modello dell'induttore reale, in seguito continueremo a parlare di induttore facendo riferimento alla caratteristica ideale $v = L(di/dt)$.



- induttanze in serie



- induttanze in parallelo

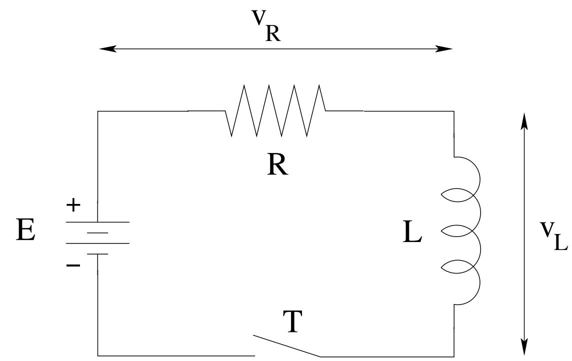


trascurando le mutue induttanze tra gli elementi (M)

induttanza equivalente

	Resistori	*Induttori*	*Condensatori*
SERIE	$R_s = \sum_{k=1}^{N} R_k$	$L_s = \sum_{k=1}^{N} L_k$	$\frac{1}{C_s} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k}$
PARALLELO	$\frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{R_k}$	$\frac{1}{L_p} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k}$	$C_p = \sum_{k=1}^{N} C_k$

Circuiti del primo ordine – circuito RL, comportamento transitorio



V_0 = tensione iniziale C (Q≠0)

- t<0, interruttore aperto → circuito aperto, i=0
- t=0, chiusura interruttore, E tende a far circolare una corrente attraverso R e L
- t≥0: periodo transitorio, brusca variazione delle condizioni del circuito seguita da regime di i e V stazionari.
- LTK:

  $E = V_R + V_L = RI + L\, dI_L/dt \rightarrow di_L/dt + R/L\, i_L = E/L \rightarrow$ **$di_L/dt + 1/\tau\, i_L = E/L = E/R\, 1/\tau$**
- equazione differenziale del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti (L, R costanti), non omogenea (termine noto = E≠0)
- τ = costante di tempo del circuito = L/R
- soluzione (separazione delle variabili + *continuita' di i_L: $i_L(t=0) = 0$*):

$$\boxed{I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

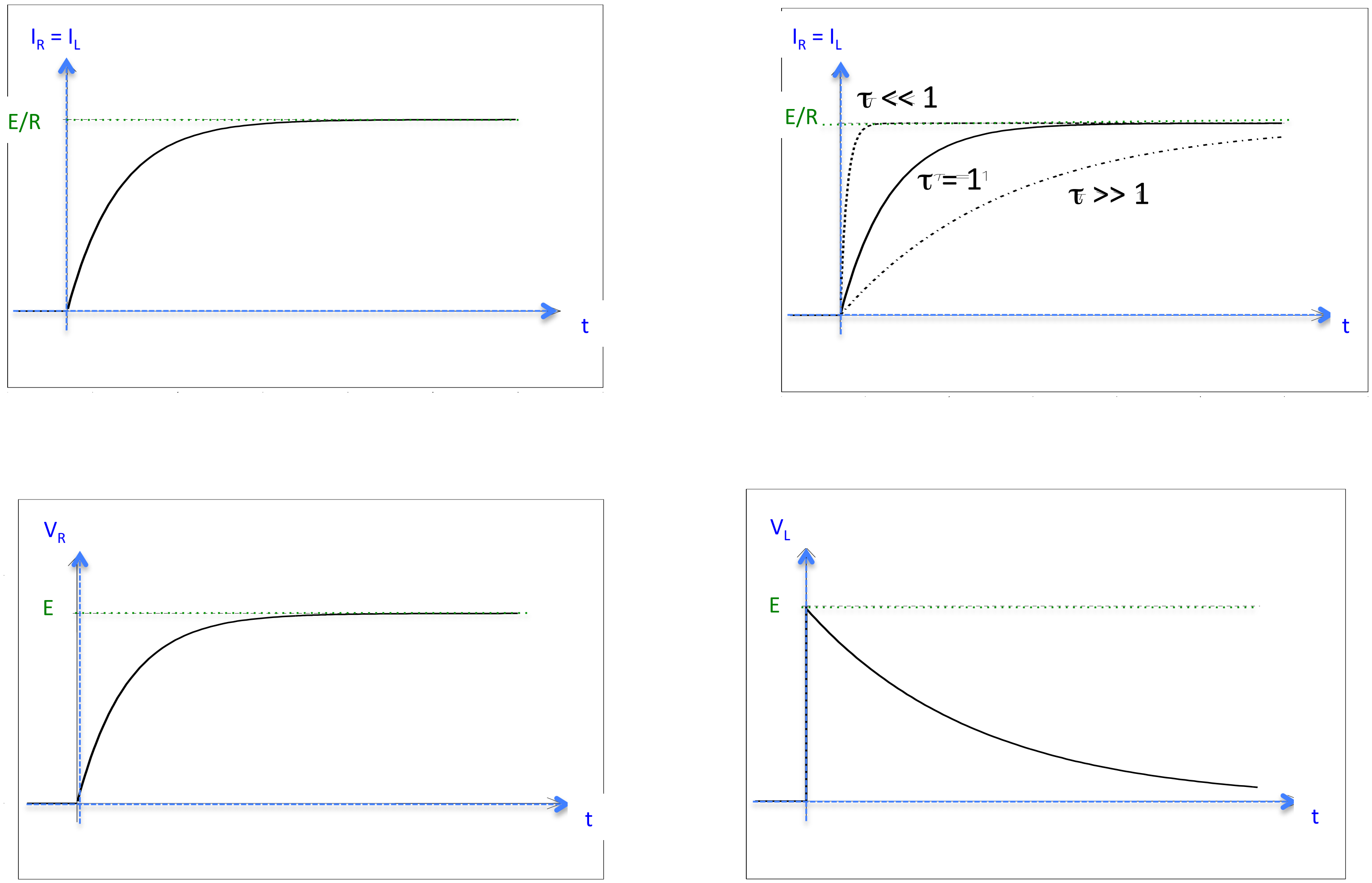
vedi V_C in RC

vedi V_R,I_R in RC

$$\boxed{\begin{aligned} V_L &= E - V_R = Ee^{-t/\tau} \\ V_L &= LdI/dt. \end{aligned}}$$

vedi V_C in RC

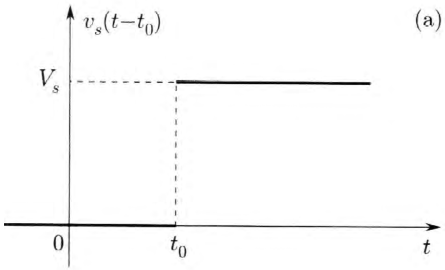
$$\boxed{V_R = RI = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

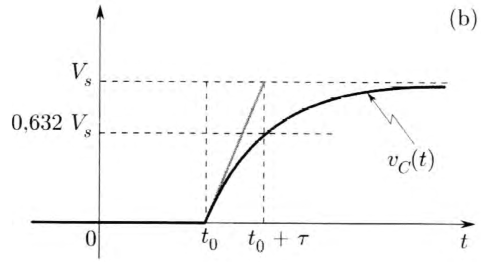


induttore a t=0: CA
a t $\rightarrow \infty$: CC

Circuiti del primo ordine – transitori a scalino, ripetuti, onda quadra

RC

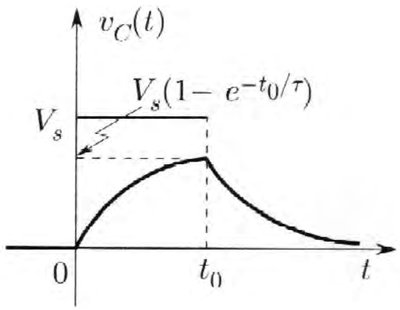


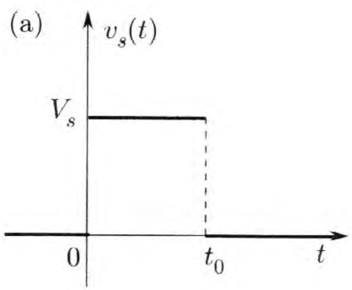


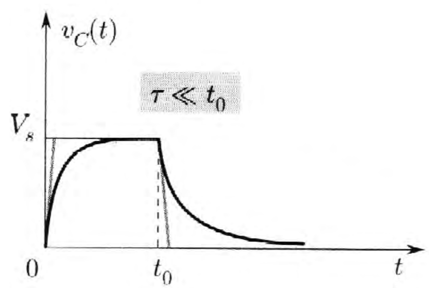
$$V_C(t) = E - (E - V_0)e^{-t/\tau}$$

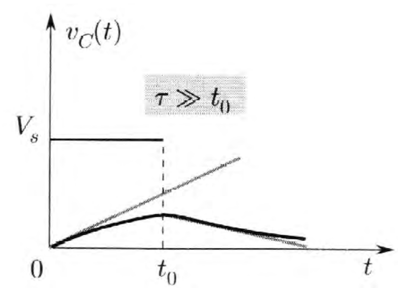
transitorio a onda quadra: chiusura e riapertura dopo t_0: V_C

$V_C(t) = E - (E - V_0)e^{-t/\tau}$	carica del C fino a t_0
$V_C = V_0 e^{-t/\tau}$	scarica del C da t_0 a partire da $V_C(t_0)$



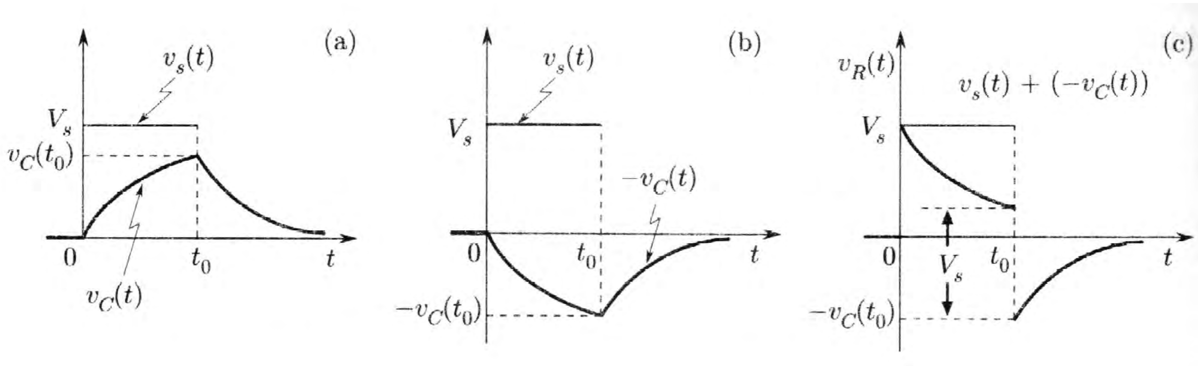




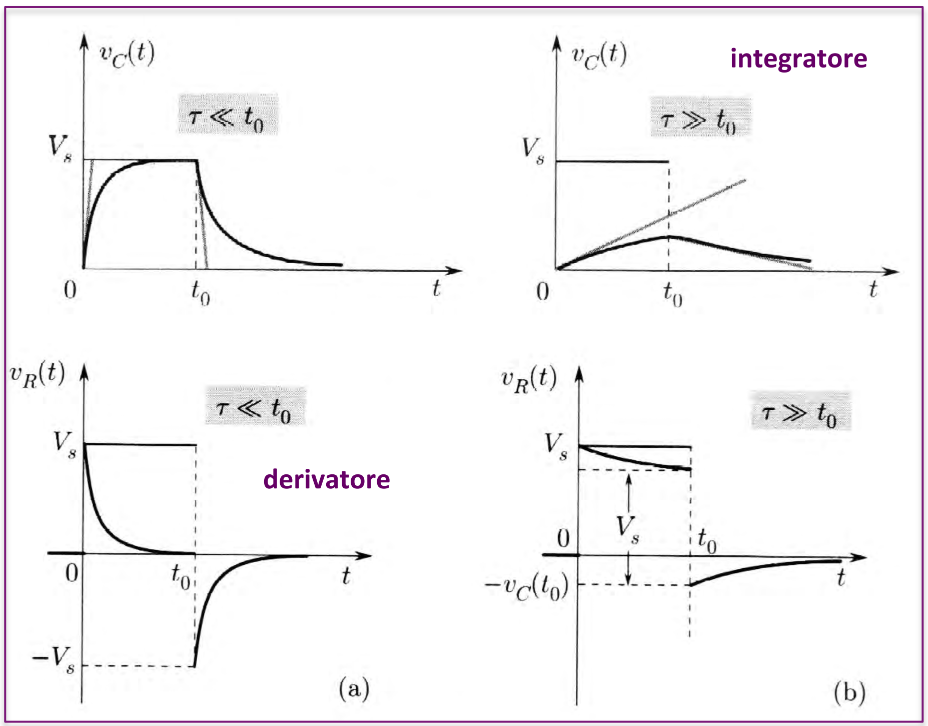


RC
transitorio a onda quadra: chiusura e riapertura dopo t_0: V_R (I_R)

LTK: $V_R = V_S - V_C$



V_C $\qquad$ $-V_C$ $\qquad$ V_R



RC: V_C → RL: V_R (i_L=i_R)

V_C continua $\qquad$ i_L continua (V_R)

RC: V_R → RL: V_L

V_C continua $\qquad$ i_L continua (i_R,V_R)

i_C (i_R, V_R) discontinua $\qquad$ V_L discontinua