Potenza in circuiti in AC

elemento bipolare

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$
$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

potenza istantanea

$$p(t) = v(t)i(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v) I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

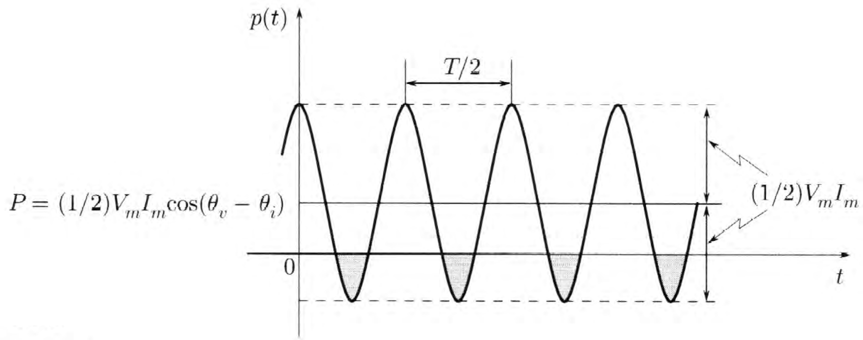
formule di Werner

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)}$$

termine costante:

potenza attiva (W)

$$\boxed{P \doteq \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i)}$$



valor medio di p(t) su T:

$$\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt \;= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + 0 = P$$

La potenza attiva è il valor medio in un periodo della potenza istantanea $p(t)$.

potenza attiva = potenza media

Energia:

$$w = \int_0^{\Delta t} p(t)dt = P\Delta t + \int_0^{\Delta t} \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) dt$$

Resistore

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$v(t) = Ri(t) = RI_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

Dunque

$$\theta_v = \theta_i \Rightarrow \cos(\theta_v - \theta_i) = 1$$

$$V_m = RI_m$$

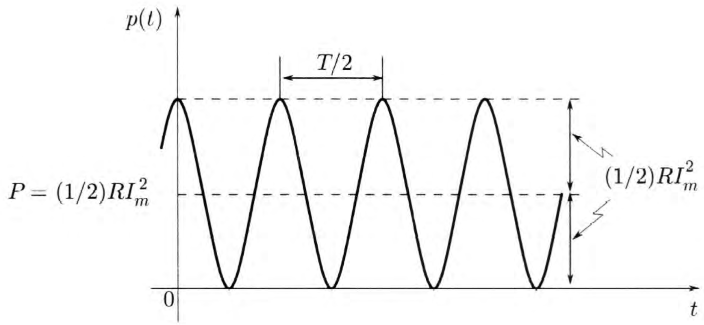
perciò la potenza istantanea

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)$$

diventa

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{2} RI_m^2 + \frac{1}{2} RI_m^2 \cos(2\omega t + 2\theta_i)} \tag{10.6}$$

In questo caso l'ampiezza della componente sinusoidale è pari al valore medio; l'andamento è riportato in Figura 10.4, assumendo $\theta_i = 0$. Si noti che la potenza istantanea *è sempre non negativa* e si annulla con periodo $T/2$. *La potenza di picco è pari al doppio della potenza media.*



La potenza media vale

$$\boxed{P = \frac{1}{2} V_m I_m = \frac{1}{2} RI_m^2 = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R}} \tag{10.7}$$

Induttore

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$v(t) = L di/dt = -\omega L I_m \,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_i) =$$

$$= \omega L I_m \cos(\omega t + \theta_i + 90°)$$

Dunque

$$\theta_v = \theta_i + 90° \Rightarrow \cos(\theta_v - \theta_i) = 0 \tag{10.8a}$$

$$V_m = \omega L I_m \tag{10.8b}$$

perciò

$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] =$$

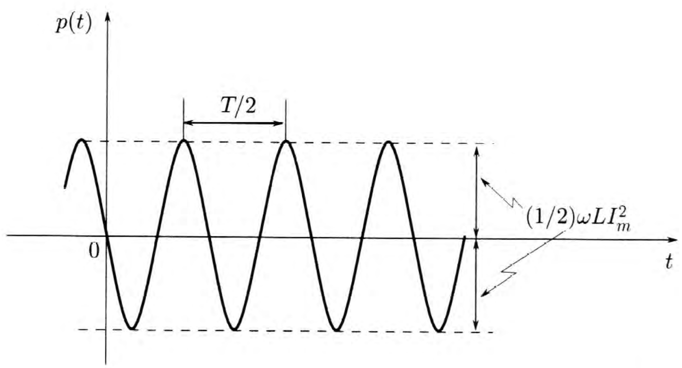
$$= 0 + \frac{1}{2} \omega L I_m^2 \cos(2\omega t + 2\theta_i + 90°)$$

ovvero

$$\boxed{p(t) = -\frac{1}{2} \omega L I_m^2 \,\mathrm{sen}(2\omega t + 2\theta_i)} \tag{10.9}$$

Si noti che *la potenza media è nulla*:

$$\boxed{P = 0}$$



andamento di $p(t)$ nell'ipotesi $\theta_i = 0$. Dalla figura è evidente che l'induttore (ideale) assorbe energia in un intervallo di tempo pari a $T/4$ ($p(t) > 0$) e la restituisce al resto del circuito nel quarto di periodo successivo ($p(t) < 0$).

Condensatore

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta_v)$$

$$i(t) = C dv/dt = -\omega C V_m \operatorname{sen}(\omega t + \theta_v) =$$

$$= \omega C V_m \cos(\omega t + \theta_v + 90°)$$

Dunque

$$\theta_i = \theta_v + 90° \Rightarrow \cos(\theta_v - \theta_i) = 0 \tag{10.10a}$$

$$I_m = \omega C V_m \tag{10.10b}$$

perciò

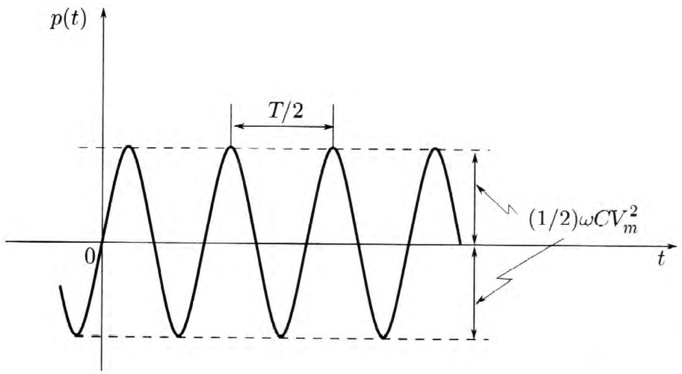
$$p(t) = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta_v - \theta_i) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i)] =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \omega C V_m^2 \cos(2\omega t + 2\theta_i - 90°)$$

ovvero

$$\boxed{p(t) = \frac{1}{2} \omega C V_m^2 \operatorname{sen}(2\omega t + 2\theta_i)} \tag{10.11}$$

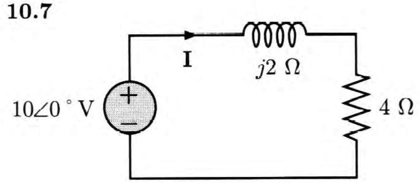
Anche nel caso del condensatore *la potenza media è nulla*. L'andamento è mostrato in Figura 10.6, nel caso $\theta_i = 0$.



Esempio 10.1

Calcolare la potenza media e la potenza di picco assorbite dal resistore in Figura 10.7.

Figura 10.7



Soluzione

La corrente è

$$\mathbf{I} = \frac{10}{4 + j2}$$

Il modulo è

$$|\mathbf{I}| = \frac{10}{\sqrt{20}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\ \text{A}$$

la potenza media assorbita dal resistore è

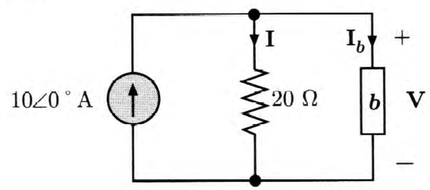
$$P = \frac{1}{2}R|\mathbf{I}|^2 = \frac{1}{2}(4)(5) = 10\ \text{W}$$

Nel resistore, la potenza di picco è il doppio della potenza media, cioè 20 W.

Esempio 10.2

Calcolare la potenza media assorbita dal bipolo $\boldsymbol{b}$ in Figura 10.8, sapendo che $\mathbf{I} = 5\angle 30°$ A.

Figura 10.8



Soluzione

Per ricavare la potenza media assorbita dal bipolo dobbiamo conoscere i fasori della tensione $\mathbf{V}$ e della corrente $\mathbf{I}_b$. La tensione è

$$\mathbf{V} = 20\mathbf{I} = 100\angle 30° = V_m\angle\theta_v$$

La corrente nel bipolo $\boldsymbol{b}$ si ricava dalla LKC:

$$\mathbf{I}_b = 10\angle 0° - \mathbf{I} = 10 - 5[\cos(30°) + j\,\text{sen}(30°)] =$$

$$= 10 - 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) =$$

$$= (10 - 2{,}5\sqrt{3}) - j2{,}5 = 6{,}19\angle -23{,}8° = I_m\angle\theta_i$$

Dunque

$$P = \frac{1}{2}(100)(6{,}19)\cos(30° + 23{,}8°) = 182{,}8\ \text{W}$$

Potenza complessa

la **potenza complessa** assorbita da un bipolo

$$\boxed{\mathbf{S} \doteq \frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}^*} \qquad (10.20)$$

dove i versi di **V** ed **I** si assumono coordinati.
Siano $\mathbf{V} = V_m e^{j\theta_v}$ ed $\mathbf{I} = I_m e^{j\theta_i}$, allora si può scrivere

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} V_m e^{j\theta_v} I_m e^{-j\theta_i} =$$
$$= \frac{1}{2} V_m I_m e^{j(\theta_v - \theta_i)}$$

Il modulo della potenza complessa è detto **potenza apparente**:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} V_m I_m = V_{eff} I_{eff}} \qquad (10.21)$$

La potenza apparente è così chiamata poiché è la potenza che assorbirebbe il bipolo qualora la tensione e la corrente fossero costanti e coincidenti con i valori efficaci. La potenza apparente si misura in *volt-ampere* (VA), come la potenza complessa.

L'argomento della potenza complessa è la differenza di fase tra la tensione e la corrente:

$$\boxed{\arg \mathbf{S} = \theta_v - \theta_i \doteq \varphi} \qquad (10.22)$$

Il coseno dell'angolo φ è chiamato **fattore di potenza**.

Pertanto, la potenza complessa può essere riscritta come segue

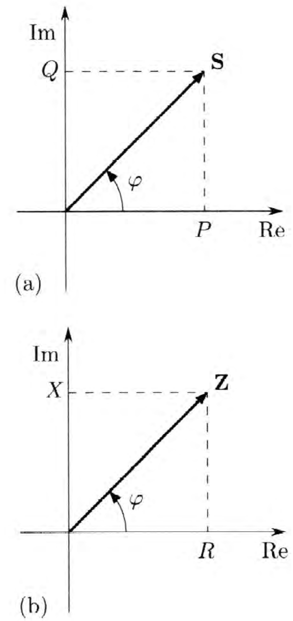
$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi + j\frac{1}{2} V_m I_m \operatorname{sen}\varphi = P + jQ \qquad (10.23)$$

dove

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos\varphi = \operatorname{Re}[\mathbf{S}] \qquad (10.24)$$
$$Q = \frac{1}{2} V_m I_m \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{Im}[\mathbf{S}] \qquad (10.25)$$

La potenza media è la parte reale della potenza complessa.

La parte immaginaria della potenza complessa si indica con la lettera Q e prende il nome di **potenza reattiva**.

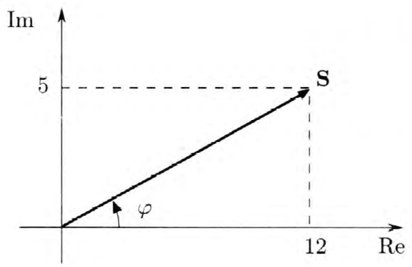


	θi	**f**	**Re S=P**	**Im S=Q**
R	θv	0	$\frac{1}{2} V_m I_m$	0
L	$\theta v - \pi/2$	$+\pi/2$	0	$\frac{1}{2} V_m I_m =$ $\frac{1}{2} \omega L I_m^2$
C	$\theta v + \pi/2$	$-\pi/2$	0	$-\frac{1}{2} V_m I_m =$ $-\frac{1}{2} I_m^2/(\omega C)$

Esempio 10.6

Un bipolo assorbe una potenza media di 12 W e una potenza reattiva di 5 VAR Ricavare la differenza di fase tra la tensione e la corrente. Ricavare il valore massimo e il valore minimo della potenza istantanea.

Figura 10.13



Soluzione

Il diagramma delle potenze è mostrato in Figura 10.13.

La differenza di fase si può ricavare con la relazione:

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{Q}{P} = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = 22{,}6^\circ$$

I valori massimo e minimo della potenza istantanea sono, rispettivamente,

$$p_{\max} = P + \frac{1}{2}V_m I_m = P + S$$
$$p_{\min} = P - \frac{1}{2}V_m I_m = P - S$$

La potenza apparente vale

$$S = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{ VA}$$

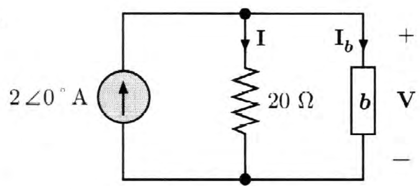
Dunque,

$$p_{\max} = 12+13 = 25 \text{ W}, \ p_{\min} = 12-13 = -1 \text{ W}$$

Esempio 10.7

Nel circuito in Figura 10.14 ricavare la potenza attiva e la potenza reattiva assorbite dal bipolo ***b*** sapendo che $\mathbf{V} = 10 - j10$ V.

Figura 10.14



Soluzione

La corrente **I** vale:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{20} = \frac{1-j}{2} \text{ A}$$

La corrente nel bipolo ***b*** si ricava dalla LKC:

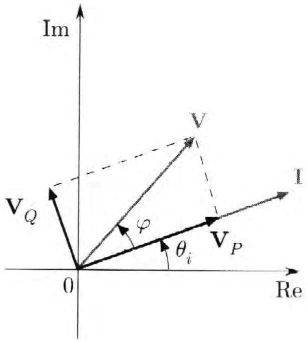
$$\mathbf{I}_b = 2\angle 0^\circ - \mathbf{I} = 2 - \frac{1-j}{2} = \frac{3+j}{2}$$

La potenza complessa vale

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{V}\mathbf{I}_b^* = \frac{1}{2}(10-10j)\frac{3-j}{2} = 5(1-2j)$$

Dunque

$$P = 5 \text{ W}$$
$$Q = -10 \text{ VAR}$$



$$v_P(t) = V_m \cos\varphi \cos(\omega t + \theta_i)$$

$$v_Q(t) = V_m \,\mathrm{sen}\,\varphi \cos(\omega t + \theta_i + 90^\circ)$$

$$\boxed{p(t) = \boxed{P[1 + \cos(2\omega t + 2\theta_i)]} - \boxed{Q\,\mathrm{sen}(2\omega t + 2\theta_i)}} \qquad (10.33)$$

- Il primo termine nella (10.33) è dovuto alla componente di $v(t)$ **in fase** con la corrente; esso ha sempre lo stesso segno, in particolare è sempre ≥ 0 se $P > 0$ (Figura 10.17c).
- Il secondo termine è dovuto alla componente di $v(t)$ **in quadratura** con la corrente; esso è sinusoidale, dunque alternativamente positivo e negativo. L'ampiezza è $|Q|$ (Figura 10.17f).

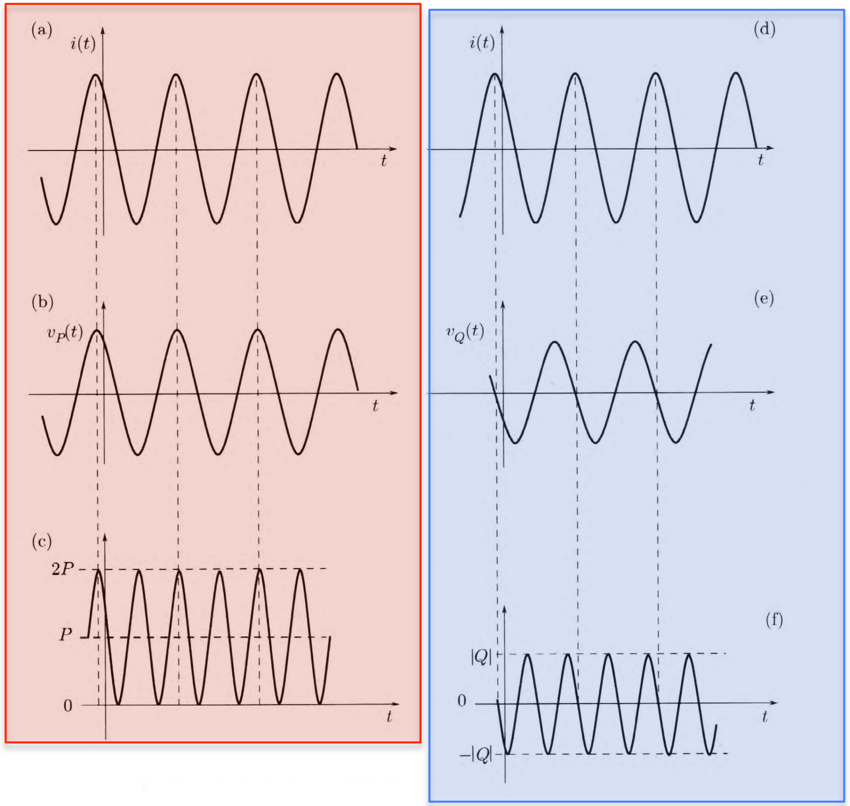


Figura 10.17 Il prodotto della corrente $i(t)$ (a) per la componente della tensione in fase con la corrente (b), fornisce il primo termine della potenza istantanea, $P[1 + \cos(2\omega t + 2\theta_i)]$, mostrato in (c). Il prodotto della corrente $i(t)$ (d) per la componente della tensione in quadratura (e), fornisce il secondo termine della potenza istantanea, $-Q\,\mathrm{sen}(2\omega t + 2\theta_i)]$ mostrato in (f).

Se la potenza reattiva Q è diversa da zero, la potenza istantanea assume ciclicamente valori negativi, indicando un flusso di energia bidirezionale tra il bipolo e il resto del circuito. Tale flusso di energia è dovuto alla presenza nel bipolo di elementi immagazzinatori di energia, cioè i condensatori e gli induttori che in alcuni intervalli di tempo assorbono energia mentre in altri la restituiscono all'esterno. Infatti, nei **bipoli resistivi** ($Q = 0$), il flusso di energia è unidirezionale e la potenza istantanea si riduce al solo primo termine della (10.33). Nel caso di **bipoli reattivi** ($P = 0$) non c'è dissipazione di energia e la potenza istantanea coincide con il secondo termine della (10.33).

Teorema del massimo trasferimento di potenza

Un generatore di impedenza interna $\mathbf{Z}_s$ trasferisce al carico la massima potenza media se l'impedenza del carico $\mathbf{Z}_L$ è uguale a $\mathbf{Z}_s^*$.