

Capitolo 2

Analisi dei circuiti in corrente alternata

2.1 Grandezze alternate

Con il termine *corrente* o *tensione alternata* si indica una corrente o una tensione con una dipendenza sinusoidale dal tempo, del tipo:

$$i = i(t) = I \sin(\omega t \pm \phi_1)$$

$$v = v(t) = V \sin(\omega t \pm \phi_2)$$

dove I e V indicano l'ampiezza delle corrispondenti grandezze alternate, ω é la pulsazione, legata alla frequenza ν della sinusoide dalla relazione: $\omega = 2\pi\nu$, ϕ_1 e ϕ_2 sono le fasi iniziali ed il segno \pm indica lo sfasamento dell'onda: il segno + indica, nel caso della tensione per esempio, che l'onda é in anticipo di ϕ_1 rispetto a $V \sin \omega t$ mentre il segno meno indica che l'onda é in ritardo di ϕ_2 rispetto a $V \sin \omega t$. Graficamente, un anticipo di fase corrisponde ad una traslazione dell'onda lungo l'asse dei tempi verso sinistra di una quantità pari all'angolo ϕ , un ritardo di fase ad una traslazione verso destra, come indicato in figura 2.1 nel secondo e terzo riquadro.

La differenza $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$ indica la differenza di fase tra la corrente e la tensione, per esempio.

Il valor medio di una grandezza alternata é nullo:

$$\bar{v} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V \sin \theta d\theta = 0 \quad \theta = \omega t + \phi$$

Si definisce *valore efficace* di una grandezza alternata la radice quadrata del

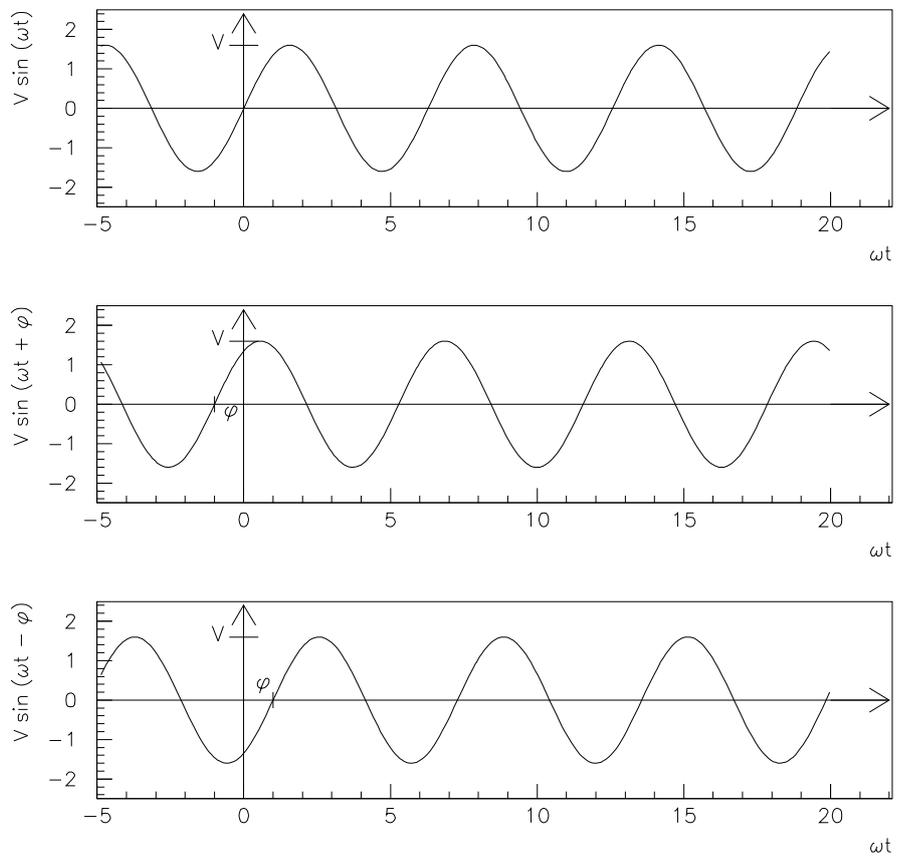


Figura 2.1:

valore medio del quadrato:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V^2 \sin^2 \theta \, d\theta} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

$$I_{eff} = \frac{I}{\sqrt{2}}$$

Una grandezza alternata, ad esempio $v(t)$, é rappresentata, istante per istante, da un punto P su un cerchio di raggio V, come indicato in figura 6.2. Tale punto si muove sul cerchio con velocità angolare ω in senso antiorario;

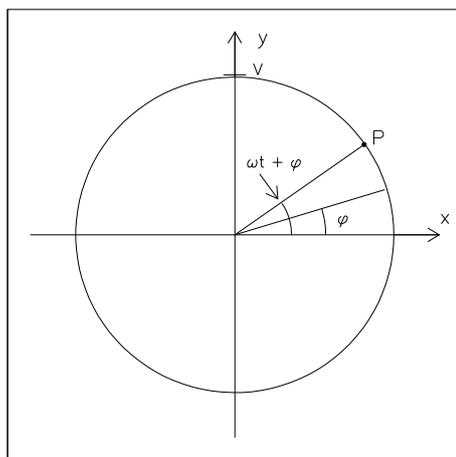


Figura 2.2:

il valore istantaneo di $v(t)$ é la proiezione del punto P sull'asse y . Esso può anche essere considerato come il secondo estremo di un vettore di modulo V, con il primo estremo fisso nell'origine, in rotazione in senso antiorario con velocità angolare ω .

Poiché in un circuito di solito interessano solo le relazioni di ampiezza e fase tra grandezze diverse (i , v) che hanno la stessa frequenza (e perciò la stessa pulsazione), ci si può limitare a considerare le posizioni fisse assunte dai punti rappresentativi (o vettori rappresentativi) ad un tempo scelto, per esempio a $t=0$.

Il punto (o vettore) corrispondente ad una grandezza sinusoidale $v = V \sin \omega t$ può essere rappresentato dalle sue proiezioni (o componenti) in un sistema di riferimento ad assi ortogonali (x, y) , a e b , come mostrato in figura 6.3.

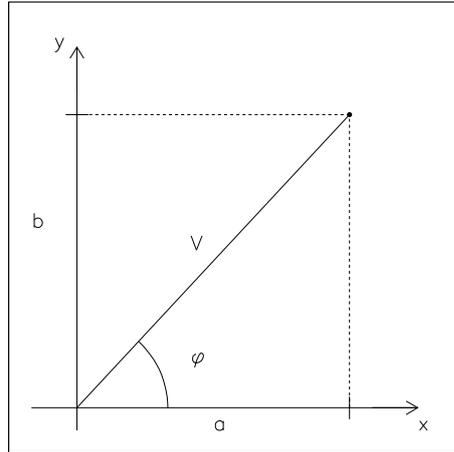


Figura 2.3:

Il modo più semplice per distinguere la componente y dalla componente x è quello di moltiplicare il numero b per una funzione j che faccia ruotare un vettore di modulo b di $\pi/2$ in senso antiorario; j^2 provocherà una rotazione di π (verso negativo dell'asse x), cioè cambierà a in $-a$; $j^3 = jj^2$ ruoterà di $3/2\pi$. Questo indica che è possibile identificare l'operatore j con il numero immaginario $j = \sqrt{-1}$ ed esprimere in forma algebrica il vettore v come somma delle sue componenti nel piano complesso:

$$v = a + jb = V \cos \phi + j V \sin \phi = V e^{j\phi}$$

Le operazioni che coinvolgono grandezze alternate si possono in tal modo ricondurre alla algebra dei numeri complessi.

Anche in questa rappresentazione non compare esplicitamente la velocità di rotazione ω ; in realtà, poiché la fase all'istante t vale $\omega t + \phi$, si può tenerne conto in forma più generale esprimendo:

$$v = V e^{j(\omega t + \phi)} = V e^{j\phi} e^{j\omega t}$$

dove il fattore moltiplicativo $e^{j\omega t}$, che tiene conto della componente temporale della fase, è un numero complesso di modulo 1 e viene abitualmente sottinteso nei calcoli.

2.1.1 Richiami sui numeri complessi

Rappresentazione di un numero complesso z

– mediante la *parte reale* (a) e la *parte immaginaria* (b):

$$z = a + jb$$

– mediante il *modulo* (Z) e la *fase* (ϕ):

$$z = Ze^{j\phi}$$

modulo e parti reale ed immaginaria sono legati dalla relazione $Z^2 = a^2 + b^2$ e dalla *formula di Eulero*:

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi$$

si ha che $\operatorname{tg} \phi = b/a$.

Somma di due numeri complessi z_1 e z_2

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$$

quindi, se $z = a + jb$:

$$a = a_1 + a_2 \quad b = b_1 + b_2$$

Prodotto di due numeri complessi: $x = Xe^{j\delta}$ e $y = Ye^{j\theta}$

$$z = xy = XYe^{j(\delta+\theta)}$$

quindi, se $z = Ze^{j\phi}$:

$$Z = XY \quad \phi = \delta + \theta$$

Quest'ultima relazione indica che la moltiplicazione di due numeri complessi modifica la *fase*: infatti la fase del prodotto z è diversa dalla fase di ciascuno dei fattori ed è pari alla *somma delle due fasi*. Se uno dei fattori è reale, per esempio x , $\delta = 0$ e la fase di z resta uguale a quella dell'altro fattore, y : quindi moltiplicare un numero complesso per un numero reale non modifica la fase.

Rapporto tra due numeri complessi: $x = Xe^{j\delta}$ e $y = Ye^{j\theta}$

$$z = x/y = X/Ye^{j(\delta-\theta)}$$

quindi, se $z = Ze^{j\phi}$:

$$Z = X/Y \quad \phi = \delta - \theta$$

Quest'ultima relazione indica che la divisione di due numeri complessi modifica la *fase*: infatti la fase del rapporto z é diversa dalla fase di ciascuno dei fattori ed é pari alla *differenza delle due fasi*. Se il denominatore é reale (cioé $\theta=0$), la fase di z resta uguale a quella del numeratore ($\phi = \delta$): quindi dividere per un numero reale non modifica la fase. Se invece il numeratore é reale (cioé $\delta=0$), la fase di z é uguale a quella del denominatore cambiata di segno: quindi dividere un numero reale per un numero complesso significa cambiare il segno della fase di quest'ultimo ($\phi = -\theta$).

2.2 Componenti di circuito in regime sinusoidale

Resistenza

Istante per istante la corrente che percorre una resistenza R e la tensione ai suoi capi sono legate dalla legge di Ohm:

$$v = Ri$$

Se

$$v = V \sin (\omega t + \phi)$$

sarà

$$i = I \sin (\omega t + \phi)$$

con $I = V/R$.

Corrente e tensione nella resistenza sono in fase ($\Delta\phi=0$) come mostrato nella figura 2.4

Capacità

La quantità di carica q sulle armature di un condensatore di capacità C é proporzionale alla differenza di potenziale tra le armature stesse, V_C :

$$q = CV_C$$

Una variazione della tensione corrisponderá ad una corrente (derivando):

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt}$$

dove si é assunto che C non dipenda dal tempo, come avviene normalmente. Pertanto se:

$$v_C = V \sin \omega t$$

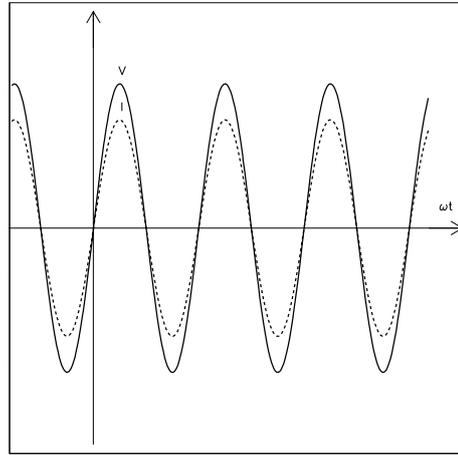


Figura 2.4:

dove si considera nulla la fase iniziale della tensione in quanto si é interessati a valutare sfasamenti rispetto ad essa (essa viene cioè considerata come *fase di riferimento*), sarà:

$$i_C = \omega C V \cos \omega t = I \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

L'ampiezza della corrente é ωC volte quella della tensione; **la corrente risulta in anticipo di fase di un quarto di ciclo rispetto alla tensione:** i ha il massimo, positivo o negativo, negli istanti in cui la tensione é nulla e viceversa, come indicato in figura 2.5.

In forma complessa si avrà:

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} = \omega C v_C e^{j\pi/2} = j \omega C v_C$$

da cui si può ricavare:

$$v_C = \frac{-j}{C\omega} i_C = \frac{i_C}{C\omega} e^{-j\pi/2}$$

É sottointeso per entrambe un fattore di fase $e^{i\omega t}$. Introducendo la **impedenza capacitiva** z_C :

$$z_C = \frac{-j}{C\omega} = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\pi/2}$$

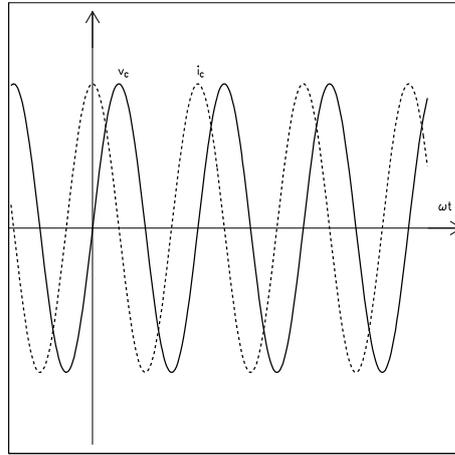


Figura 2.5:

dove la grandezza:

$$X_C = \frac{1}{C\omega}$$

prende il nome di **reattanza capacitiva**, si può esprimere la relazione tra tensione e corrente per un condensatore nella forma complessa:

$$v_C = z_C i_C$$

che rappresenta una **generalizzazione della legge di Ohm per la capacità**.

Induttanza

Una variazione della corrente che percorre una bobina di induttanza L provoca, tra i terminali della bobina, una *forza contro elettromotrice* proporzionale alla variazione per unità di tempo della corrente:

$$E_L = -L \frac{di}{dt}$$

dove il segno negativo esprime il fatto che E_L tende ad opporsi alla causa della variazione di corrente. Se la causa è, ad esempio, un generatore di tensione alternata che produce ai capi dell'induttanza una d.d.p.

$$v_L = V \sin \omega t$$

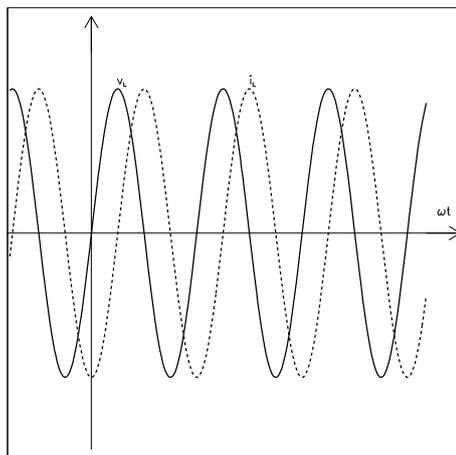


Figura 2.6:

tale tensione sarà legata ad ogni istante t alla corrente che percorre l'induttanza dalla relazione:

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

Questo valore rappresenta una **caduta di tensione** su una induttanza L percorsa dalla corrente i_L . Integrando si ottiene:

$$i_L = \frac{1}{L} \int_0^t v_L dt = \frac{-V}{\omega L} \cos \omega t = I \sin (\omega t - \pi/2)$$

l'ampiezza della corrente è $1/\omega L$ volte quella della tensione; **la corrente risulta in ritardo di fase di un quarto di ciclo rispetto alla tensione**: i ha il massimo, positivo o negativo, negli istanti in cui la tensione è nulla e viceversa, come indicato in figura 2.6. In forma complessa si avrà:

$$i_L = \frac{v_L}{z_L} = \frac{v_L}{L\omega} e^{-j\pi/2} = \frac{-jv_L}{L\omega}$$

da cui si può ricavare:

$$v_L = i_L L\omega e^{j\pi/2} = jL\omega i_L$$

É sottointeso per entrambe un fattore di fase $e^{i\omega t}$. Introducendo la **impedenza induttiva** z_L :

$$z_L = jL\omega = L\omega e^{j\pi/2}$$

dove la grandezza:

$$X_L = L\omega$$

prende il nome di **reattanza induttiva**, si può esprimere la relazione tra tensione e corrente per un induttore nella forma complessa:

$$v_L = z_L i_L$$

che rappresenta una **generalizzazione della legge di Ohm per l'induttore**.

Principi di Kirchhoff generalizzati

Avendo definito tensioni, correnti ed impedenze complesse ed avendo esteso la legge di Ohm, si possono usare le stesse leggi e teoremi dei circuiti lineari in corrente continua avendo solo cura di sostituire ai componenti le corrispondenti impedenze complesse. In generale conviene calcolare l'*impedenza equivalente*

$$z_{eq} = Z e^{j\phi_{eq}}$$

del circuito applicando alle impedenze le stesse regole di composizione delle resistenze usate nell'analisi dei circuiti in corrente continua, per cui se il potenziale di ingresso é:

$$v_{in} = V e^{j\omega t}$$

la corrente i vale, per la legge di Ohm generalizzata:

$$i = \frac{v_{in}}{z_{eq}} = \frac{V}{Z} e^{j(\omega t - \phi_{eq})} = I e^{j(\omega t - \phi_{eq})} \rightarrow I e^{-j\phi_{eq}}$$

Riportiamo alcuni esempi di calcolo di impedenze complesse equivalenti.

Circuito RC (figura 2.7)

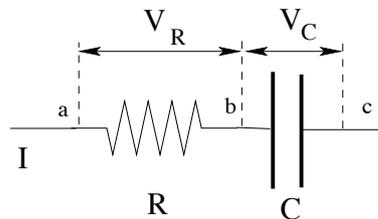


Figura 2.7:

L'impedenza equivalente é:

$$z_{eq} = R + z_C = R - \frac{j}{\omega C}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \text{tg } \phi_{eq} = \frac{X_C}{R} = \frac{-1}{\omega RC}$$

La corrente risulta:

$$i = \frac{v_{in}}{z_{eq}} = \frac{V}{Z} e^{-j \phi_{eq}}$$

$$I = \frac{V}{Z}, \quad \phi_i = -\phi_{eq}$$

la tensione ai capi della resistenza é:

$$v_R = iR = v_{in} \frac{R}{z_{eq}} = V \frac{R}{Z} e^{-j \phi_{eq}}$$

$$V_R = IR = V \frac{R}{Z} \quad \phi_R = -\phi_{eq}$$

la tensione ai capi della capacità é:

$$v_C = iz_C = v \frac{z_C}{z_{eq}} = V \frac{1}{\omega C Z} e^{-j(\phi_{eq} + \pi/2)}$$

$$V_C = V \frac{1}{\omega C Z} \quad \phi_C = -\phi_{eq} - \pi/2$$

Circuito RL (figura 2.8)

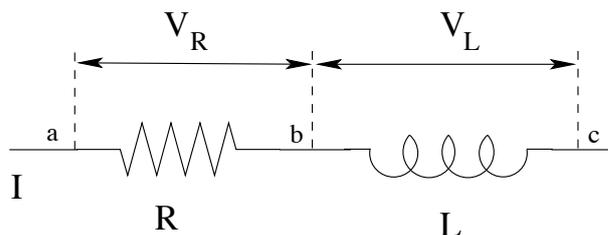


Figura 2.8:

L'impedenza equivalente é:

$$z_{eq} = R + z_L = R + j\omega L$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \text{tg } \phi_{eq} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R}$$

La corrente risulta:

$$i = \frac{v_{in}}{z_{eq}} = \frac{V}{Z} e^{-j \phi_{eq}}$$

$$I = \frac{V}{Z}, \quad \phi_i = -\phi_{eq}$$

la tensione ai capi della resistenza é:

$$v_R = iR = v_{in} \frac{R}{z_L} = V \frac{R}{Z} e^{-j \phi_{eq}}$$

$$V_R = IR = V \frac{R}{Z} \quad \phi_R = -\phi_{eq}$$

la tensione ai capi dell'induttanza é:

$$v_L = iz_L = v \frac{z_L}{z_{eq}} = V \frac{\omega L}{Z} e^{-j(\phi_{eq} - \pi/2)}$$

$$V_L = V \frac{\omega L}{Z} \quad \phi_L = -\phi_{eq} + \pi/2$$

Circuito RLC in serie (figura 2.9)

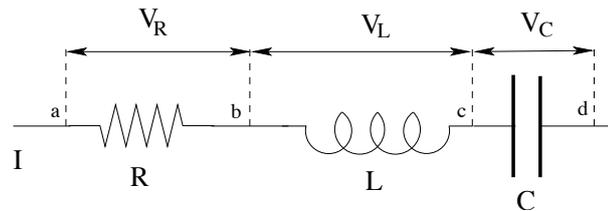


Figura 2.9:

L'impedenza equivalente é:

$$z_{eq} = R + z_L + z_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \text{tg } \phi_{eq} = \frac{X_L + X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

La corrente risulta:

$$i = \frac{v_{in}}{z_{eq}} = \frac{V}{Z} e^{-j \phi_{eq}}$$

$$I = \frac{V}{Z}, \quad \phi_i = -\phi_{eq}$$

la tensione ai capi della resistenza é:

$$v_R = iR = v_{in} \frac{R}{z_{eq}} = V \frac{R}{Z} e^{-j \phi_{eq}}$$

$$V_R = IR = V \frac{R}{Z} \quad \phi_R = -\phi_{eq}$$

la tensione ai capi dell'induttanza é:

$$v_L = iz_L = v \frac{z_L}{z_{eq}} = V \frac{\omega L}{Z} e^{-j(\phi_{eq} - \pi/2)}$$

$$V_L = V \frac{\omega L}{Z} \quad \phi_L = -\phi_{eq} + \pi/2$$

la tensione ai capi della capacità é:

$$v_C = iz_C = v \frac{z_C}{z_{eq}} = V \frac{1}{\omega C Z} e^{-j(\phi_{eq} + \pi/2)}$$

$$V_C = V \frac{1}{\omega C Z} \quad \phi_C = -\phi_{eq} - \pi/2$$

Circuito RLC in parallelo (figura 2.10)

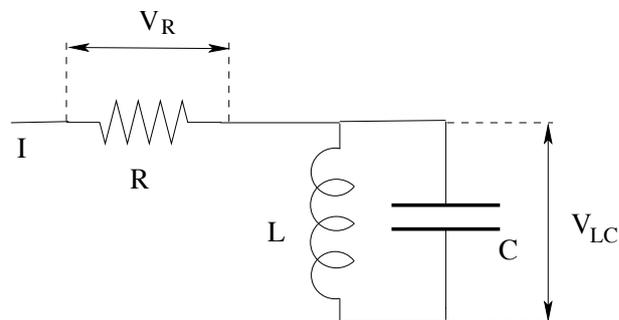


Figura 2.10:

Conviene calcolare prima l'impedenza equivalente z_{LC} del parallelo LC e poi sommarla a R per avere l'impedenza totale equivalente z_{eq} . L'impedenza z_{LC} é immaginaria pura ma la sua fase, ϕ_{LC} , ha un segno che dipende da ω , e precisamente $\phi_{LC} = -\pi/2$ se $\omega^2 > 1/LC$ mentre $\phi_{LC} = +\pi/2$ se $\omega^2 < 1/LC$:

$$\frac{1}{z_{LC}} = \frac{1}{z_L} + \frac{1}{z_C} = -j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) = -j \frac{1 - \omega^2 LC}{\omega L}$$

$$z_{LC} = j \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

$$Z_{LC} = \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}, \quad \phi_{LC} = \pm\pi/2$$

L'impedenza equivalente é:

$$z_{eq} = R + z_{LC} = R + j \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right)^2}, \quad \text{tg } \phi_{eq} = \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}$$

La corrente risulta:

$$i = \frac{v_{in}}{z_{eq}} = \frac{V}{Z} e^{-j \phi_{eq}}$$

$$I = \frac{V}{Z}, \quad \phi_i = -\phi_{eq}$$

la tensione ai capi della resistenza é:

$$v_R = iR = v_{in} \frac{R}{z_{eq}} = V \frac{R}{Z} e^{-j \phi_{eq}}$$

$$V_R = IR = V \frac{R}{Z} \quad \phi_R = -\phi_{eq}$$

la tensione ai capi del parallelo é:

$$v_{LC} = i z_{LC} = v_{in} \frac{z_{LC}}{z_{eq}} = V \frac{Z_{LC}}{Z} e^{-j(\phi_{eq} - \phi_{LC})}$$

la corrente nell'induttanza é:

$$i_L = \frac{v_{LC}}{z_L} = V \frac{Z_{LC}}{Z \omega L} e^{-j(\phi_{eq} - \phi_{LC} + \pi/2)}$$

$$I_L = V \frac{Z_{LC}}{Z\omega L} \quad \phi_{i_L} = -\phi_{eq} + \phi_{LC} - \pi/2$$

la corrente nella capacità é:

$$i_C = \frac{v_{LC}}{z_C} = V \frac{Z_{LC}\omega C}{Z} e^{-j(\phi_{eq} - \phi_{LC} - \pi/2)}$$

$$I_C = V \frac{Z_{LC}\omega C}{Z} \quad \phi_{i_C} = -\phi_{eq} + \phi_{LC} + \pi/2$$

2.3 Esercizi

Vediamo alcuni esercizi sul calcolo di impedenze equivalenti e sulla applicazione dei teoremi delle reti lineari nel caso di regime alternato.

- **Esercizio 1**

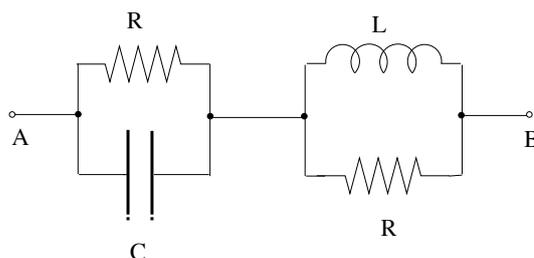


Figura 2.11:

Si calcoli l'impedenza equivalente del tratto di circuito rappresentato in figura 2.11, assumendo che la resistenza valga $R = 500 \Omega$, la capacità valga $C = 5 \mu F$, l'induttanza valga $L = 1 H$ e che la tensione alternata applicata agli estremi A e B abbia una frequenza: a) $\nu = 50 Hz$, b) $\nu = 5000 Hz$, c) $\nu = 500000 Hz$.

$$\begin{aligned} z_{eq} &= \frac{R \left(-\frac{j}{\omega C} \right)}{R - \frac{j}{\omega C}} + \frac{R(j\omega L)}{R + j\omega L} \\ &= \frac{-jR}{R\omega C - j} + \frac{jR\omega L}{R + j\omega L} \\ &= \frac{-jR(R\omega L + j)}{R^2\omega^2 C^2 + 1} + \frac{jR\omega L(R - j\omega L)}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ &= \left(\frac{R}{R^2\omega^2 C^2 + 1} + \frac{R\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) + j \left(\frac{R^2\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} - \frac{R^2\omega C}{R^2\omega^2 C^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Scrivendo:

$$z_{eq} = Re(z_{eq}) + jIm(z_{eq})$$

e ricordando che:

$$Z_{eq} = \sqrt{Re^2(z_{eq}) + Im^2(z_{eq})}, \quad tg \phi_{eq} = \frac{Im(z_{eq})}{Re(z_{eq})}$$

si ottiene la presente tabella.

ν (Hz)	ω	$Re(z_{eq})$ (Ω)	$Im(z_{eq})$ (Ω)	Z (Ω)	ϕ_{eq} (gradi)
50	$10^2 \pi$	449	-18	449	-2.3
$5 \cdot 10^3$	$10^4 \pi$	500	1.6	500	0.18
$5 \cdot 10^5$	$10^4 \pi$	500	0.016	500	0.0018

Come si può vedere, tanto il valore del modulo dell'impedenza quanto la sua fase dipendono dalla frequenza della tensione applicata.

• **Esercizio 2**

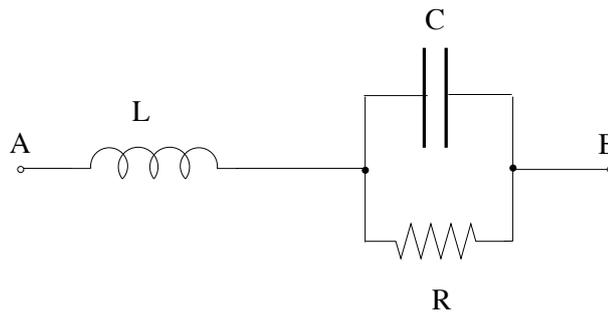


Figura 2.12:

Si calcoli l'impedenza equivalente del tratto di circuito rappresentato in figura 2.3, assumendo che la resistenza valga $R = 500 \Omega$, la capacità valga $C = 5 \mu F$, l'induttanza valga $L = 1 H$ e che la tensione alternata applicata agli estremi A e B abbia una frequenza $\nu = 50 Hz$ ($\omega = 100\pi$).

$$\begin{aligned} z_{eq} &= j\omega L + \frac{R \left(\frac{-j}{\omega C} \right)}{R - \frac{j}{\omega C}} \\ &= j\omega L - \frac{jR}{R\omega C - j} \cdot \frac{R\omega C + j}{R\omega C + j} \\ &= j\omega L - \frac{jR^2\omega C - R}{R^2\omega^2 C^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{R}{R^2\omega^2C^2 + 1} + j \left(\omega L - \frac{R^2\omega C}{R^2\omega^2C^2 + 1} \right) \\
 &= (309.2 + j71.3) \Omega \\
 Z &= 317.3 \Omega, \quad \phi_{eq} = \operatorname{atg} \frac{71.3}{309.2} \simeq 13^\circ
 \end{aligned}$$

• **Esercizio 3**

2.13 e 2.14

Nel circuiti mostrati nelle figure 2.3 e 2.3 si ha $R = 500 \Omega$, $C = 5 \mu F$ e $L = 1 H$, il generatore ha $V_{eff} = 120V$ e $\nu = 50 Hz$ ($\omega = 100\pi$). Si calcoli il valore efficace dell'intensità della corrente totale erogata e lo sfasamento tra quest'ultima e la tensione del generatore.

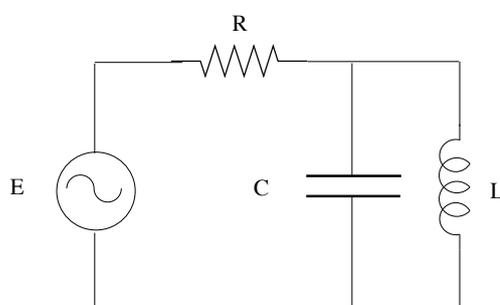


Figura 2.13:

2.13

Per il circuito di figura 2.3 :

$$\begin{aligned}
 z_{eq} &= R + \frac{j\omega L \left(\frac{1}{j\omega C} \right)}{j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \\
 &= R + \frac{L\omega}{j(\omega^2 LC - 1)} \cdot \frac{j}{j} \\
 &= R + \frac{jL\omega}{1 - \omega^2 LC} = (500 + j616)\Omega
 \end{aligned}$$

$$Z = \sqrt{500^2 + 616^2} \Omega = 793\Omega, \quad \phi_{eq} = \operatorname{atg} \frac{616}{500} = 50.9^\circ$$

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = 0.15A, \quad \phi_i = -\phi_{eq} = -50.9^\circ$$

2.14

Per il circuito di figura 2.3 , invece:

$$z_{eq} = -\frac{j}{\omega C} + \frac{R(j\omega L)}{R + j\omega L} = -\frac{j}{\omega C} + \frac{jR\omega L}{R + j\omega L} \cdot \frac{R - j\omega L}{R - j\omega L}$$

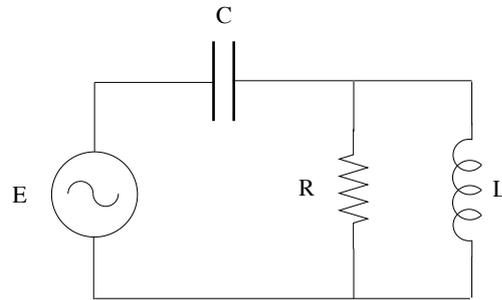


Figura 2.14:

$$= \frac{R\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{R^2 \omega^2 LC - R^2 - \omega^2 L^2}{\omega C (R^2 + \omega^2 L^2)} = (141.5 + j411.4) \Omega$$

$$Z = \sqrt{141.5^2 + 411.4^2} = 435 \Omega, \quad \phi_{eq} = \operatorname{atg} \frac{411.4}{141.5} = 71^\circ$$

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = 0.28 A, \quad \phi_i = -\phi_{eq} = -71^\circ$$

• **Esercizio 4**

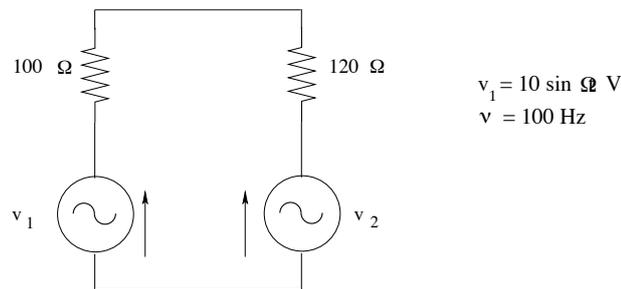


Figura 2.15:

Utilizzando il Principio di Sovrapposizione, calcolare modulo e fase, rispetto a v_1 , della differenza di potenziale tra i punti A e B ai capi della resistenza da 120Ω nel circuito in figura 2.15, sapendo che v_2 ha valore di picco 8 V , é sinusoidale, ha la stessa frequenza di v_1 , ma é in ritardo di 30° , mentre $v_1 = 10 \sin \omega t \text{ V}$ e $\nu = 100 \text{ Hz}$ ($\omega = 200\pi$).

$$v_1 = 10 \sin \omega t$$

$$v_2 = 8 e^{-j30^\circ} = 8 \cos 30^\circ - j 8 \sin 30^\circ = 6.92 - j4$$

Calcoliamo dapprima la corrente che fluisce in $R_2 = 120\Omega$ quando é attivo il generatore v_1 , mentre v_2 é sostituito da un corto circuito (o dalla sua resistenza interna).

$$i_1 = \frac{v_1}{R_{eq}} = \frac{v_1}{R_1 + R_2} = \frac{10}{220}A = 45mA$$

$$v_{AB1} = i_1 \cdot R_2 = 5.4V$$

e risulta in fase con v_1 ; quando si considera attivo solamente v_1 il potenziale del punto A differisce da quello del punto B per la caduta di potenziale sulla resistenza R_2 .

Calcoliamo ora la corrente che fluisce in R_2 quando é attivo il generatore v_2 , mentre v_1 é sostituito da un corto circuito (o dalla sua resistenza interna).

$$i_2 = \frac{v_2}{R_{eq}} = \frac{v_2}{R_1 + R_2} = \frac{6.92 - j4}{220}A = (31 - j18)mA$$

$$v_{AB2} = -i_2 \cdot R_2 = -(3.72 - j2.16)V$$

e risulta in fase con v_2 ; nuovamente, quando si considera attivo solamente v_2 il potenziale del punto A differisce da quello del punto B per la caduta di potenziale sulla resistenza R_2 .

La corrente totale sará data da:

$$i = i_1 - i_2 = (14 + j18) mA$$

e, di conseguenza, la differenza di potenziale tra i punti A e B sará:

$$v_{AB} = v_{AB1} + v_{AB2} = iR_2 = (1.6 + j2.16)V$$

$$V_{AB} = 2.73V, \quad \phi_{AB} = \operatorname{atg} \frac{2.16}{1.6} = 52^\circ$$

Se in un circuito in regime alternato sono presenti piú generatori indipendenti che operano tutti alla stessa frequenza, il teorema della sovrapposizione é del tutto analogo a quello che si avrebbe se il circuito operasse in continua. Il teorema, però, diventa essenziale se il circuito ha delle induttanze o delle capacitá e dei generatori che operano a frequenze differenti. Le reattanze dipendono dalla frequenza e quindi se i generatori non sono tutti alla stessa frequenza ci sará un circuito diverso per ogni frequenza, dove la differenza consiste nelle reattanze

e nella eliminazione dei vari generatori indipendenti. Di questi restano ogni volta solo quelli che hanno frequenza uguale, mentre gli altri vengono soppressi. Con la frequenza comune si calcolano le reattanze induttive e capacitive per il corrispondente circuito, che viene poi risolto per determinare le grandezze di interesse, che vengono scritte in forma sinusoidale. Il procedimento si ripete per ogni diversa frequenza dei generatori; infine, le singole risposte sinusoidali vengono sommate per ottenere la risposta totale.

• **Esercizio 5**

Dato il circuito rappresentato in figura 2.16, calcolare modulo e fase, rispetto a v_1 , della corrente che passa nel condensatore, sapendo che v_2 ha valore di picco 8 V, é sinusoidale, ha la stessa frequenza di v_1 , ma é in ritardo di 30° , mentre $v_1 = 10 \sin \omega t$ e $\nu = 100 \text{ Hz}$ ($\omega = 200\pi$).

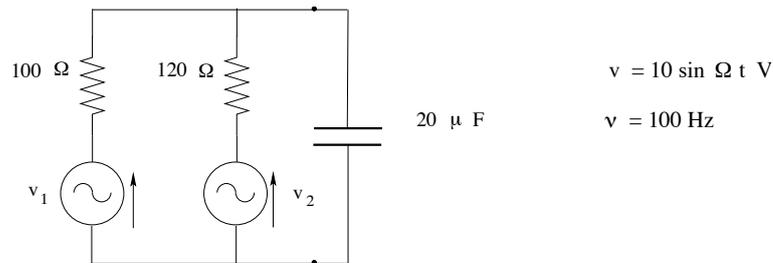


Figura 2.16:

$$v_1 = 10 \sin \omega t$$

$$v_2 = 8 e^{-j30^\circ} = 8 \cos 30^\circ - j 8 \sin 30^\circ = 6.92 - j4$$

Applichiamo il teorema di Thevenin, considerando come circuito esterno, C' , il condensatore.

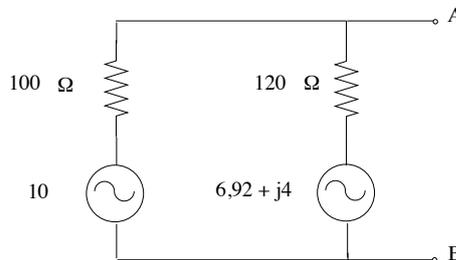


Figura 2.17:

La tensione equivalente di Thevenin, come é facile vedere in figura 2.17, sarà data da:

$$v_{Th} = \frac{v_1 - v_2}{R_1 + R_2} R_2 + v_2 = \frac{10 - 6.92 + j4}{220} 120 + 6.92 - j4 = (8.6 - j1.82)V$$

La resistenza equivalente di Thevenin sarà:

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 120}{220} = 54.5 \Omega$$

Il circuito equivalente sarà pertanto quello riportato in figura 2.18.

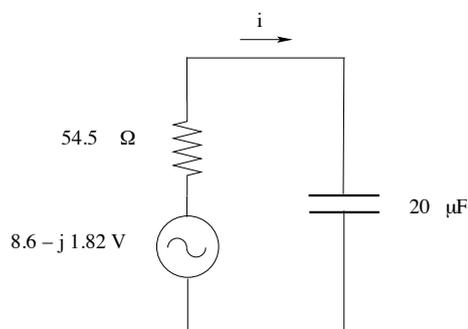


Figura 2.18:

La corrente che attraversa il condensatore risulterà data da:

$$i = \frac{v_{Th}}{R_{Th} + z_C}$$

dove:

$$z_C = \frac{-j}{\omega C} = -j79.6 \Omega$$

Perció:

$$i = \frac{8.6 - j1.82}{54.5 - j79.6} A = \frac{(8.6 - j1.82)(54.5 + j79.6)}{2970 + 6336} A = (65.8 + j62.8) mA$$

$$I = \sqrt{4329 + 3943.8} = 90.0 mA, \quad tg \phi_i = \frac{62.8}{65.}, \quad \phi_i = 43.66^\circ$$

• Esercizio 6

Dato il circuito rappresentato in figura 2.19, trovare la tensione del punto A riferita al punto B, sapendo che $v = 20 \sin \omega t$, $\nu = 50 KHz$.

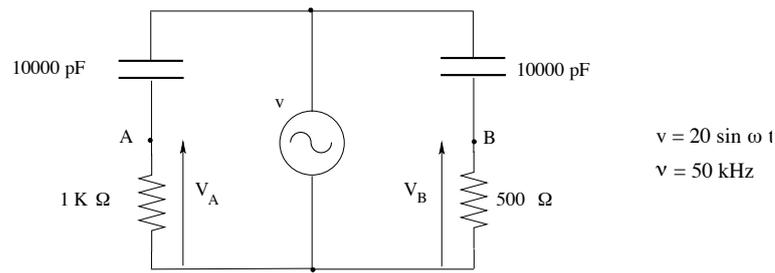


Figura 2.19:

Le due maglie sono indipendenti, in quanto sono entrambe poste in parallelo al generatore e pertanto le tensioni e le correnti in ciascuna non sono influenzate dalla presenza dell'altra maglia, come visto anche nel caso di correnti continue. Possiamo, pertanto, considerare separatamente le due maglie e partendo da quella di sinistra, avremo (vedi figura 2.20

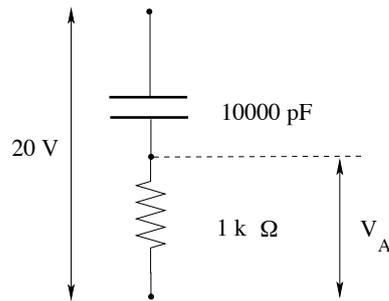


Figura 2.20:

$$v_A = i_1 R_A$$

$$i_1 = \frac{v}{z_{eq}} = \frac{20}{10^3 - \frac{j}{\omega C}} = \frac{20}{10^3 - j 3.18 \cdot 10^2} A$$

$$v_A = i_1 R_A = \frac{20}{10^3 - j 3.18 \cdot 10^2} \cdot 10^3$$

$$= \frac{20}{1 - j 0.318} = \frac{20(1 + j 0.318)}{1 + 0.1} = (18.18 + j5.45)V$$

Analogamente per la maglia di destra, vedi figura 2.21:

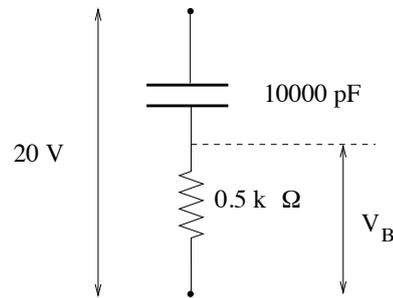


Figura 2.21:

$$v_B = i_2 R_B$$

$$i_2 = \frac{v}{z_{eq}} = \frac{20}{0.5 \cdot 10^3 - \frac{j}{\omega C}} = \frac{20}{0.5 \cdot 10^3 - j \cdot 3.18 \cdot 10^2} A$$

$$v_B = i_2 R_B = \frac{20}{0.5 \cdot 10^3 - j \cdot 3.18 \cdot 10^2} \cdot 0.5 \cdot 10^3 = \frac{10(0.5 + j \cdot 0.318)}{0.5^2 + 0.318^2} = (14.24 + j9.06)V$$

Infine:

$$v_{AB} = v_A - v_B = 3.94 - j3.32$$

$$V_{AB} = 4.97V, \quad \text{tg } \phi_{AB} = \frac{-3.32}{3.94}, \quad \phi_{AB} \simeq -47^\circ$$

• **Esercizio 7**

Calcolare le correnti di maglia i_1 e i_2 nel circuito di figura 2.22.

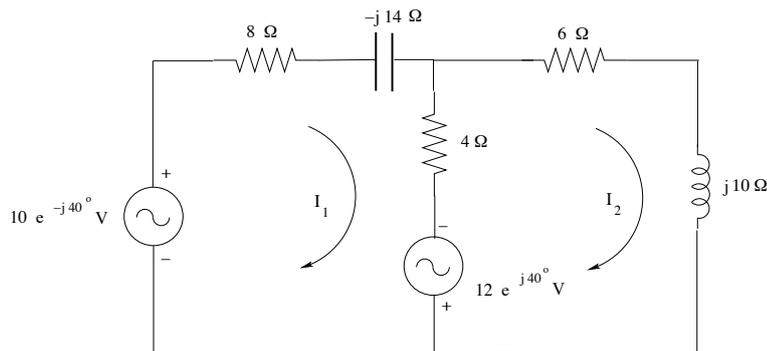


Figura 2.22:

L'analisi di maglia per circuiti in regime alternato é una estensione di quella per i circuiti in continua. Si convertono subito in generatori di

tensione eventuali generatori di corrente, poi si assegnano dei riferimenti orari alle correnti di maglia e si applica la LTK ad ogni singola maglia. Alle autoresistenze e mutue resistenze verranno ora sostituite le *autoimpedenze* e le mutue impedenze. Convieni, prima di scrivere le equazioni di maglia, calcolare le impedenze immaginarie di condensatori e induttori per la frequenza (o pulsazione) del generatore, in modo da riportarsi alla situazione illustrata in figura.

Considerando la prima maglia, l'autoimpedenza (o impedenza totale della maglia) é $8 - j14 + 4 = 12 - j14 \Omega$ e l'impedenza mutua con la maglia 2 vale 4Ω ; la somma delle f.e.m. di generatore in direzione di i_1 é:

$$\begin{aligned} 10 e^{-j40^\circ} + 12 e^{j10^\circ} &= 10(\cos 40^\circ - j \sin 40^\circ) + 12(\cos 10^\circ + j \sin 10^\circ) \\ &= 7.66 - j 6.43 + 11.82 + j 2.08 = 19.48 - j 4.34 = 19.96 e^{-j 12.6^\circ} \end{aligned}$$

l'equazione di maglia é:

$$(12 - j 14)i_1 - 4i_2 = 19.48 - j 4.34$$

Per la seconda maglia, invece, si ha:

$$-4i_1 + (10 + j 10)i_2 = -(11.82 + j 2.08)$$

Queste due equazioni costituiscono un sistema che permette di ricavare le correnti i_1 e i_2 applicando, per esempio, la regola di Cramer.

2.4 Filtri

2.4.1 Filtro passa basso RC

Consideriamo un circuito costituito da un generatore di tensione alternata chiuso su una combinazione in serie di una resistenza R ed una capacità C , come illustrato in figura 2.23. Calcoliamo la tensione ai capi del condensatore, in modulo e fase rispetto alla tensione del generatore; quest'ultima é $v_i = V_i \sin \omega t$, che in forma esponenziale é semplicemente V_i , avendo preso la fase di v_i come riferimento.

L'impedenza equivalente del circuito é:

$$z_{eq} = R - \frac{j}{\omega C} = \frac{\omega \tau - j}{\omega C}$$

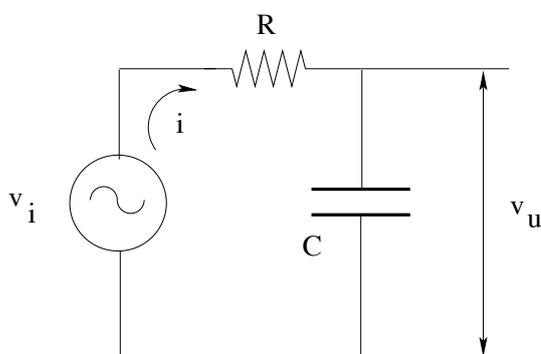


Figura 2.23:

dove si é indicato con $\tau = RC$ la costante di tempo del circuito. Il modulo e la fase dell'impedenza equivalente sono:

$$Z = \frac{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}{\omega C}, \quad \text{tg } \phi_{eq} = \frac{-1}{\omega\tau}$$

La corrente che fluisce nel circuito é:

$$\begin{aligned} i &= \frac{v_i}{z_{eq}} = \frac{V_i}{R - \frac{j}{\omega C}} \\ &= \frac{V_i\omega C}{\omega\tau - j} = \frac{V_i\omega C(\omega\tau + j)}{\omega^2\tau^2 + 1} \end{aligned}$$

il suo modulo e la sua fase sono:

$$I = \frac{V_i\omega C}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}, \quad \text{tg } \phi_i = \frac{1}{\omega\tau}$$

La tensione ai capi del condensatore risulta:

$$\begin{aligned} v_u &= i \cdot z_C = \frac{V_i}{R - \frac{j}{\omega C}} \cdot \left(\frac{-j}{\omega C} \right) \\ &= \frac{V_i}{1 + j\omega\tau} = \frac{V_i(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} \end{aligned}$$

con modulo e fase:

$$V_u = \frac{V_i}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \text{tg } \phi_u = -\omega\tau$$

Consideriamo la **funzione di trasferimento** $G = \frac{v_u}{v_i}$:

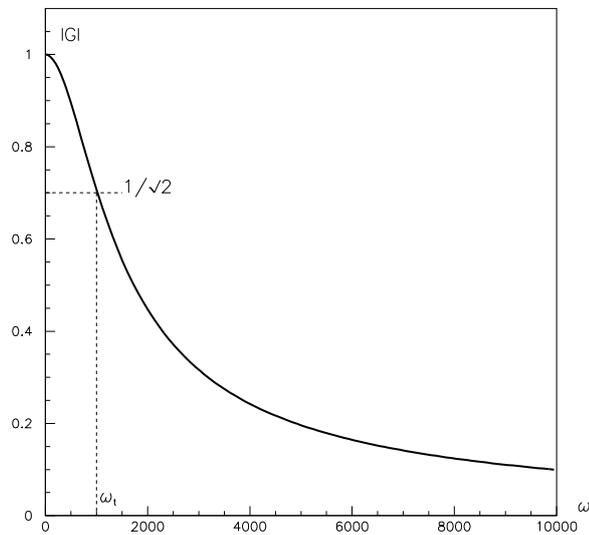


Figura 2.24:

$$G = \frac{v_u}{v_i} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

essa é una funzione complessa e il suo modulo prende il nome di **guadagno** del circuito:

$$|G| = \left| \frac{v_u}{v_i} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

Graficando il guadagno in funzione della pulsazione ω del generatore, come riportato in figura 1.24 nel caso di $\tau = 0.001$ s, si trova che:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G| = 1 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G| = 0$$

ció il circuito si comporta in modo da fornire in uscita una oscillazione con la stessa frequenza del generatore, ma con ampiezza che decresce all'aumentare della frequenza. Il circuito é ció un **filtro** che lascia passare le basse frequenze, praticamente senza modificare le ampiezze corrispondenti, e deprime sempre piú fortemente l'ampiezza delle frequenze al di sopra di un **valore di taglio**, definito come quel valore della pulsazione per il quale l'ampiezza in uscita é pari a $1/\sqrt{2}$ volte l'ampiezza in ingresso:

$$\omega_t : |G| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega^2 \tau^2 = 1 \rightarrow \omega_t = \frac{1}{\tau}$$

da cui $\nu_t = \frac{1}{2\pi\tau}$. La fase della funzione di trasferimento é $tg \phi_G = -\omega\tau$, come per v_u .

2.4.2 Filtro passa basso RL – Facoltativo

La situazione é simmetrica rispetto a quella del circuito RC.

Consideriamo un circuito costituito da un generatore di tensione alternata chiuso su una combinazione in serie di una resistenza R ed un'induttanza L , come illustrato in figura 2.25. Calcoliamo la tensione ai capi della resistenza, in modulo e fase rispetto alla tensione del generatore; quest'ultima é $v_i = V_i \sin \omega t$, che in forma esponenziale é semplicemente V_i , avendo preso la fase di v_i come riferimento. L'impedenza equivalente del

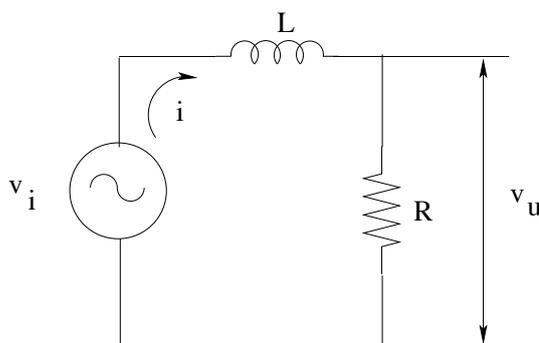


Figura 2.25:

circuito é:

$$z_{eq} = R + j\omega L = R(1 + j\omega\tau)$$

dove si é posto $\tau = L/R$, costante di tempo del circuito. Il modulo e la fase dell'impedenza equivalente sono:

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = R\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}, \quad \text{tg } \phi_{eq} = \omega\tau$$

La corrente che fluisce nel circuito é:

$$i = \frac{v_i}{z_{eq}} = \frac{V_i}{R(1 + j\omega\tau)} = \frac{V_i(1 - j\omega\tau)}{R(1 + \omega^2\tau^2)}$$

il suo modulo e la sua fase sono:

$$I = \frac{V_i}{R\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}, \quad \text{tg } \phi_i = -\omega\tau$$

La tensione ai capi della resistenza risulta:

$$v_u = i \cdot R = \frac{V_i}{1 + j\omega\tau} = \frac{V_i(1 - j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

con modulo e fase:

$$V_u = \frac{V_i}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}, \quad tg \phi_u = -\omega \tau$$

La **funzione di trasferimento** $G = \frac{v_u}{v_i}$ sarà:

$$G = \frac{v_u}{v_i} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

essa é una funzione complessa e il suo modulo, il guadagno del circuito, risulta:

$$|G| = \left| \frac{v_u}{v_i} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$$

Graficando il guadagno in funzione della pulsazione ω del generatore si trova nuovamente l'andamento di figura 1.24 e, in particolare, che:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G| = 1 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G| = 0$$

cioé il circuito si comporta come un **filtro** che lascia passare le basse frequenze, praticamente senza modificare le ampiezze corrispondenti, e deprime sempre piú fortemente l'ampiezza delle frequenze al di sopra di un **valore di taglio**, definito come quel valore della pulsazione per il quale l'ampiezza in uscita é pari a $1/\sqrt{2}$ volte l'ampiezza in ingresso:

$$\omega_t : |G| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega^2 \tau^2 = 1 \rightarrow \omega_t = \frac{1}{\tau}$$

da cui $\nu_t = \frac{1}{2\pi\tau}$. La fase della funzione di trasferimento é $tg \phi_G = -\omega\tau$, come per v_u .

2.4.3 Filtro passa alto RC

Consideriamo nuovamente un circuito costituito da un generatore di tensione alternata chiuso su una combinazione in serie di una resistenza R ed una capacità C, come illustrato in figura 2.26. Calcoliamo ora la tensione ai capi della resistenza, in modulo e fase rispetto alla tensione del generatore; quest'ultima sia ancora $v_i = V_i \sin \omega t$, che in forma esponenziale é semplicemente V_i , avendo preso la fase di v_i come riferimento. L'impedenza equivalente del circuito é:

$$z_{eq} = R - \frac{j}{\omega C} = \frac{\omega \tau - j}{\omega C}$$

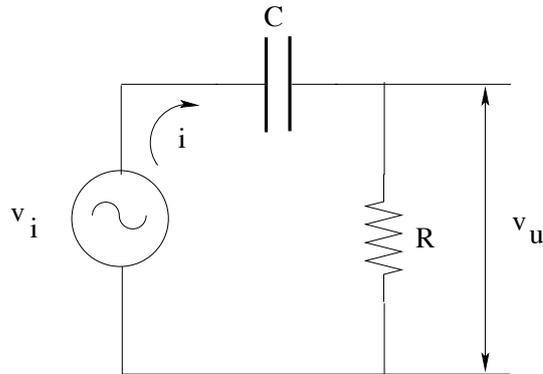


Figura 2.26:

dove si é posto $\tau = RC$, costante di tempo del circuito. Il modulo e la fase dell'impedenza equivalente sono:

$$Z = \frac{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}{\omega C}, \quad \text{tg } \phi_{eq} = \frac{-1}{\omega\tau}$$

La corrente che fluisce nel circuito é:

$$\begin{aligned} i &= \frac{v_i}{z_{eq}} = \frac{V_i}{R - \frac{j}{\omega C}} \\ &= \frac{V_i\omega C}{\omega\tau - j} = \frac{V_i\omega C(\omega\tau + j)}{\omega^2\tau^2 + 1} \end{aligned}$$

il suo modulo e la sua fase sono:

$$I = \frac{V_i\omega C}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}, \quad \text{tg } \phi_i = \frac{1}{\omega\tau}$$

La tensione ai capi della resistenza risulta:

$$\begin{aligned} v_u &= i \cdot R = \frac{V_i R}{R - \frac{j}{\omega C}} \\ &= \frac{V_i\omega\tau}{\omega\tau - j} = \frac{V_i\omega\tau(\omega\tau + j)}{1 + \omega^2\tau^2} \end{aligned}$$

con modulo e fase:

$$V_u = \frac{V_i\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \text{tg } \phi_u = \frac{1}{\omega\tau}$$

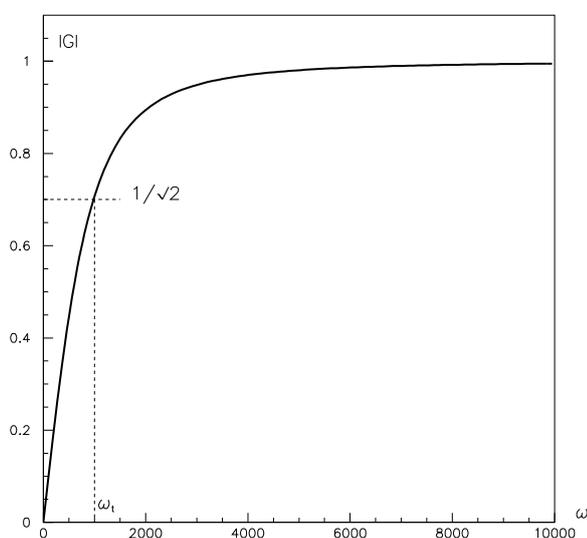


Figura 2.27:

Consideriamo la **funzione di trasferimento** $G = \frac{v_u}{v_i}$:

$$G = \frac{v_u}{v_i} = \frac{\omega\tau}{\omega\tau - j} = \frac{\omega\tau(\omega\tau + j)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

essa é una funzione complessa e il suo modulo (guadagno del circuito) risulta:

$$|G| = \left| \frac{v_u}{v_i} \right| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

Graficando il guadagno in funzione della pulsazione ω del generatore, come riportato in figura 1.27 nel caso di $\tau = 0.001$ s, si trova che:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G| = 1 \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |G| = 0$$

cioé il circuito si comporta in modo da fornire in uscita una oscillazione con la stessa frequenza del generatore, ma con ampiezza che cresce all'aumentare della frequenza. Il circuito é cioè un **filtro** che lascia passare le alte frequenze, praticamente senza modificare le ampiezze corrispondenti, e deprime sempre piú fortemente l'ampiezza delle frequenze al di sotto di un **valore di taglio**, definito come quel valore della pulsazione per il quale l'ampiezza in uscita é pari a $1/\sqrt{2}$ volte l'ampiezza in ingresso:

$$\omega_t : |G| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega^2 \tau^2 = 1 \rightarrow \omega_t = \frac{1}{\tau}$$

da cui $\nu_i = \frac{1}{2\pi\tau}$. La fase della funzione di trasferimento é $tg \phi_G = \frac{1}{\omega\tau}$, come per v_u .

2.4.4 Filtro passa alto RL – Facoltativo

Consideriamo nuovamente un circuito costituito da un generatore di tensione alternata chiuso su una combinazione in serie di una resistenza R ed un'induttanza L, come illustrato in figura 2.28. Calcoliamo ora la tensione ai capi dell'induttore, in modulo e fase rispetto alla tensione del generatore; quest'ultima sia ancora $v_i = V_i \sin \omega t$, che in forma esponenziale é semplicemente V_i , avendo preso la fase di v_i come riferimento. L'impedenza equivalente del

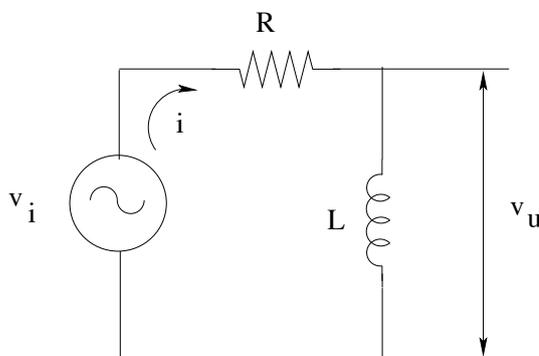


Figura 2.28:

circuito é:

$$z_{eq} = R + j\omega L = R(1 + j\omega\tau)$$

dove si é posto $\tau = L/R$, costante di tempo del circuito. Il modulo e la fase dell'impedenza equivalente sono:

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = R\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}, \quad tg \phi_{eq} = \omega\tau$$

La corrente che fluisce nel circuito é:

$$i = \frac{v_i}{z_{eq}} = \frac{V_i}{R(1 + j\omega\tau)} = \frac{V_i(1 - j\omega\tau)}{R(1 + \omega^2\tau^2)}$$

il suo modulo e la sua fase sono:

$$I = \frac{V_i}{R\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}}, \quad tg \phi_i = -\omega\tau$$

La tensione ai capi dell'induttore risulta:

$$v_u = i \cdot z_L = \frac{V_i j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{V_i \omega\tau(\omega\tau + j)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

con modulo e fase:

$$V_u = \frac{V_i \omega \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}, \quad \text{tg } \phi_u = \frac{1}{\omega \tau}$$

Consideriamo la **funzione di trasferimento** $G = \frac{v_u}{v_i}$:

$$G = \frac{v_u}{v_i} = \frac{j\omega}{1 + j\omega\tau} = \frac{\omega\tau(\omega\tau + j)}{1 + \omega^2\tau^2}$$

essa é una funzione complessa e il suo modulo (guadagno del circuito) é:

$$|G| = \left| \frac{v_u}{v_i} \right| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

Graficando il guadagno in funzione della pulsazione ω del generatore si trova nuovamente l'andamento di figura 1.27, e in particolare

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |G| = 1 \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |G| = 0$$

cioé il circuito si comporta in modo da fornire in uscita una oscillazione con la stessa frequenza del generatore, ma con ampiezza che cresce all'aumentare della frequenza. Il circuito é cioé un **filtro** che lascia passare le alte frequenze, praticamente senza modificare le ampiezze corrispondenti, e deprime sempre piú fortemente l'ampiezza delle frequenze al di sotto di un **valore di taglio**, definito come quel valore della pulsazione per il quale l'ampiezza in uscita é pari a $1/\sqrt{2}$ volte l'ampiezza in ingresso:

$$\omega_t : |G| = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \omega^2 \tau^2 = 1 \rightarrow \omega_t = \frac{1}{\tau}$$

da cui $\nu_t = \frac{1}{2\pi\tau}$. La fase della funzione di trasferimento é $\text{tg } \phi_G = \frac{1}{\omega\tau}$, come per v_u .

2.5 Risposta dei filtri ad un gradino di tensione

Si é già visto nello studio dei circuito in corrente continua come un circuito costituito da un generatore di tensione continua chiuso su una combinazione in serie di una resistenza ed una capacità o una resistenza ed un'induttanza e munito di un interruttore risponda alla chiusura dell'interruttore: l'operazione fa cambiare bruscamente le condizioni del circuito, causando fenomeni di tipo transitorio al cui esaurimento fa seguito un regime di correnti e tensioni

di tipo stazionario. Nel caso di un circuito RC, la situazione che si viene a creare al tempo $t=0$, scelto come istante di chiusura dell'interruttore, a causa della presenza della capacità che impone un andamento continuo della tensione ai suoi capi, è riassunta in figura 2.29, dove la brusca variazione della tensione in ingresso dal valore 0 al valore E è dovuta al generatore che è in grado di fornire una forma d'onda tipo gradino positivo; questo è equivalente alla chiusura dell'interruttore. La fase transitoria che segue la chiusura dell'interruttore in un circuito RC privo di generatori quando all'istante iniziale il condensatore è carico e tra le sue armature si trova una d.d.p. pari a V_0 è riassunta in figura 2.30. Per quanto concerne, invece, un circuito RL in serie, il transitorio seguente una brusca variazione della tensione fornita dal generatore quando la sua f.e.m. passa da un valore 0 ad un valore E, causato dalla presenza dell'induttanza che impone un andamento continuo della corrente, è riassunto in figura 2.31.

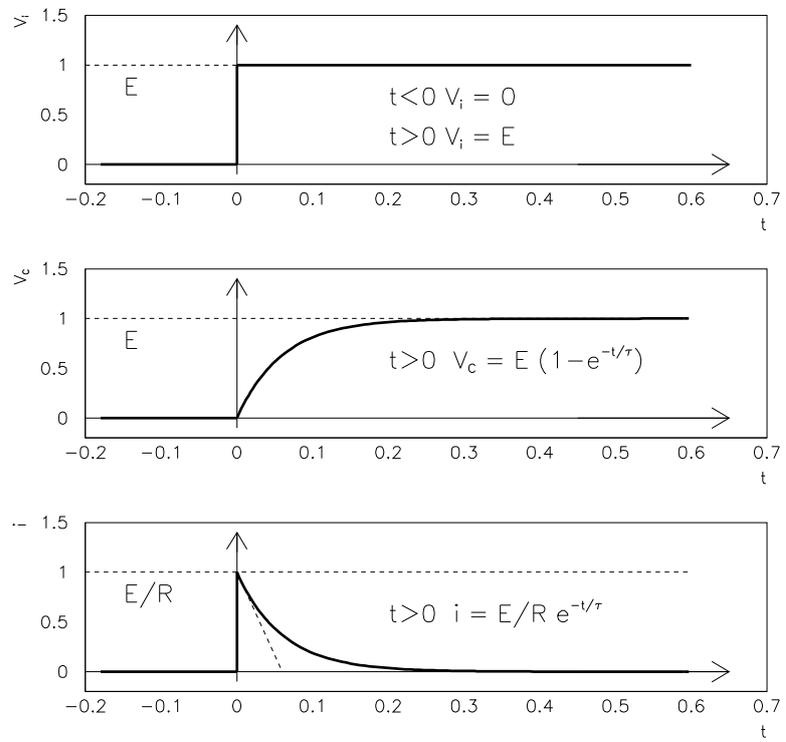


Figura 2.29:

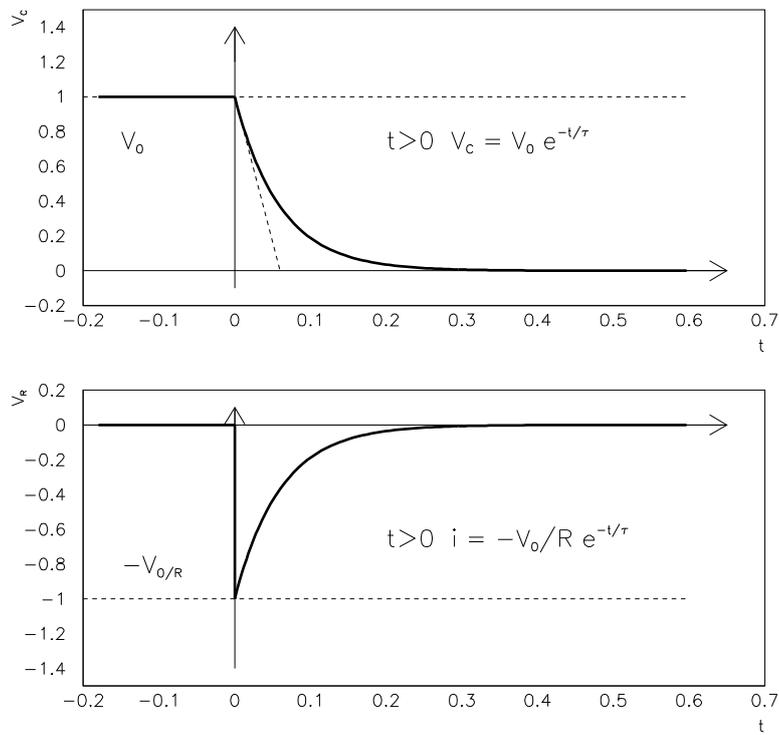


Figura 2.30:

La risposta di un circuito RC ad una brusca variazione negativa di tensione, da 0 a $-E$, simile ad un gradino negativo, può essere ottenuta risolvendo la LTK corrispondente con f.e.m. pari a $-E$: questo comporta una inversione del segno di correnti e tensioni rispetto al caso del gradino positivo, come riportato in figura 2.32. Per un gradino che passa da un valore E_1 ad un valore $E_2 = E_1 + E$ si ha per la tensione v_C una traslazione dell'asse delle ordinate da E_1 a E_2 in modo analogo a quanto indicato in figura 1.29 per una variazione positiva o in figura 1.32 per una variazione negativa, mentre la corrente, e quindi v_R , conserva lo stesso andamento delle figure citate, in quanto non risente del preesistente livello continuo di tensione.

La situazione è perfettamente analoga per un circuito RL. Per un gradino negativo, da 0 a $-E$, per esempio, la risposta è riportata in figura 2.33.

2.6 Risposta dei filtri ad un gradino rettangolare

In un transitorio i valori iniziali di corrente e di tensione possono non essere di tipo stazionario, ma valori residui di un transitorio precedente non ancora completamente esaurito. Continuano a valere, anche in questo caso, gli stessi criteri di continuità di corrente in una induttanza e di tensione in una capacità.

Un'onda rettangolare, ad esempio, definita come:

$$\begin{aligned} v &= 0 \quad \text{per } t < 0 \\ v &= E \quad \text{per } 0 < t < T \\ v &= 0 \quad \text{per } t > T \end{aligned}$$

é da considerare come successione di due gradini, uno positivo ed uno negativo. Le condizioni iniziali del transitorio dovuto al secondo gradino sono determinate dal transitorio dovuto al primo, se non ancora esaurito.

In un filtro RC passa basso, cioè letto ai capi del condensatore considerato inizialmente scarico, $v_C(0) = 0$, il primo transitorio é:

$$v_C = E(1 - e^{-t/\tau})$$

All'istante T é:

$$v_C(T) = E(1 - e^{-T/\tau})$$

come indicato in figura 2.34.

Se la durata T dell'onda rettangolare é minore di 3τ , non si sono ancora raggiunte le condizioni stazionarie e $v_C(T)$ é il valore iniziale per il secondo transitorio:

$$\begin{aligned} v_C &= E(1 - e^{-t/\tau}) \quad \text{per } t < T \\ v_C &= E(1 - e^{-T/\tau}) e^{-t'/\tau} \quad \text{per } t > T \end{aligned}$$

con $t' = t - T$, come indicato in figura 2.35. La situazione é analoga per l'andamento di v_R nel caso di un circuito RL.

Quanto alla corrente, e alla tensione v_R del circuito RC, dato che deve essere, ad ogni istante t :

$$E = v_C + v_R$$

si avrà, fino al tempo T , l'andamento della figura 2.36, con

$$v_R(T) = Ee^{-T/\tau}$$

e

$$i(T) = E/Re^{-T/\tau}$$

All'istante $t=T$ si verifica una brusca variazione $-E$ della tensione di ingresso. Poiché v_C é continua, $v_C(T^-) = v_C(T^+)$ e la variazione si ritrova tutta su v_R , come indicato in figura 2.37. Per $t > T$, v_R tende esponenzialmente a zero. La situazione é analoga per l'andamento di v_L nel caso di un circuito RL.

Come si é visto, le condizioni iniziali del secondo transitorio sono determinate dal primo. Se, in particolare, la durata T dell'impulso é molto maggiore della costante di tempo $\tau = RC$, il primo transitorio risulterà completamente esaurito e le forme d'onda in uscita saranno, per il circuito RC, quelle riportate in figura 2.38 per v_C e 2.39 per v_R : in particolare, si avrà che la tensione ai capi del condensatore (filtro RC passa basso) fornisce un impulso che conserva praticamente la forma dell'impulso di ingresso, mentre la tensione ai capi della resistenza (filtro RC passa alto) fornisce un impulso che rappresenta approssimativamente la derivata dell'impulso di ingresso. Si definisce quindi **circuito derivatore** un filtro passa alto con $\tau \ll T$.

Se, al contrario, la costante di tempo é molto piú grande di T , l'andamento della tensione v_C (filtro RC passa basso) é quello riportato in figura 2.40: v_C cresce poco nel tempo T . In questo intervallo di tempo l'esponenziale é approssimabile con una retta; infatti:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

se $x \ll 1$ la sommatoria puó essere approssimata ai suoi primi due termini senza commettere un errore troppo grande. Nel nostro caso $x = t/\tau$ per $t < T$, perciò:

$$v_C = E(1 - e^{-t/\tau}) \simeq E(1 - 1 + \frac{t}{\tau}) = E\frac{t}{\tau}$$

ossia una retta di pendenza E/τ . La retta rappresenta l'integrale dell'impulso di ingresso (che é una costante): si definisce **circuito integratore** un filtro passa basso con $\tau \gg T$. L'andamento della corrente ovvero della tensione ai capi della resistenza, é quello riportato in figura 2.41: l'impulso in uscita conserva praticamente la forma dell'impulso in ingresso.

Le stesse condizioni si estendono ai filtri RL.

2.6.1 Transitori ripetuti

Si presenta in pratica frequentemente il caso di transitori ripetuti, dovuti, ad esempio, ad una forma d'onda periodica in ingresso. L'onda sará **quadra** se

il tempo di permanenza a livello alto, T_1 , é pari al tempo di permanenza a livello basso, T_2 , (ed entrambi sono, perciò pari a metà periodo), mentre sarà **rettangolare** se il tempo di permanenza a livello alto é diverso dal tempo di permanenza a livello basso, come nel caso rappresentato in figura 2.42. La risposta del filtro si ottiene con una ripetuta applicazione del procedimento delineato nel paragrafo precedente. Se la costante di tempo non é molto piú piccola di T_1 e T_2 , si ha ad ogni gradino una condizione iniziale che dipende dal transitorio precedente.

2.7 Lavoro e potenza

Come é noto, il lavoro compiuto dal campo elettrico (per esempio quello di un generatore) per spostare un carica q tra due punti di un circuito tra i quali vi sia una differenza di potenziale pari a v é dato dal prodotto:

$$\mathcal{L} = v \cdot q$$

e la potenza (fornita dal generatore per effettuare lo spostamento) é:

$$P = v \cdot i$$

Nel caso in cui i due punti siano i terminali di una resistenza R , per la quale vale, ad ogni istante, la legge di Ohm, $v = R \cdot i$:

$$P = R \cdot i^2 \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = R \cdot \int i^2 dt$$

Nel caso in cui i due punti siano i terminali di una induttanza L , per la quale la relazione istantanea tra corrente e tensione é: $v = L \cdot \frac{di}{dt}$:

$$P = L i \cdot \frac{di}{dt} \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = L \cdot \int i \frac{di}{dt} dt = \frac{1}{2} Li^2$$

Nel caso in cui i due punti siano i terminali di una capacità C , per la quale la relazione istantanea tra corrente e tensione é: $i = C \cdot \frac{dv}{dt}$:

$$P = C v \cdot \frac{dv}{dt} \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = C \cdot \int v \frac{dv}{dt} dt = \frac{1}{2} Cv^2$$

$\frac{1}{2} Li^2$ e $\frac{1}{2} Cv^2$ rappresentano l'energia immagazzinata, rispettivamente, nell'induttanza, quando essa é attraversata dalla corrente istantanea i , e nella capacità quando tra le sue armature é presente una d.d.p. istantanea v .

112CAPITOLO 2. ANALISI DEI CIRCUITI IN CORRENTE ALTERNATA

La potenza fornita dal generatore per mantenere una corrente nel circuito dipende pertanto dai valori istantanei di i e v . In regime alternato ha piú interesse valutare il valore medio del lavoro e della potenza; se

$$i = I \sin \theta \quad \theta = \omega t + \phi$$

$$v = V \sin (\theta + \phi)$$

si avrà:

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{T} \int_0^T v \cdot i dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} IV \sin \theta \sin (\theta + \phi) d\theta \\ &= \frac{VI}{2} \cos \phi = V_{eff} I_{eff} \cos \phi = \frac{ZI^2}{2} \cos \phi \end{aligned}$$

Se $\cos \phi = 0$ il circuito viene detto **swattato**; $V_{eff} I_{eff} \cos \phi$ prende il nome di **potenza attiva**, $V_{eff} I_{eff}$ é, invece la **potenza apparente**, mentre $V_{eff} I_{eff} \sin \phi$ é la **potenza reattiva**.

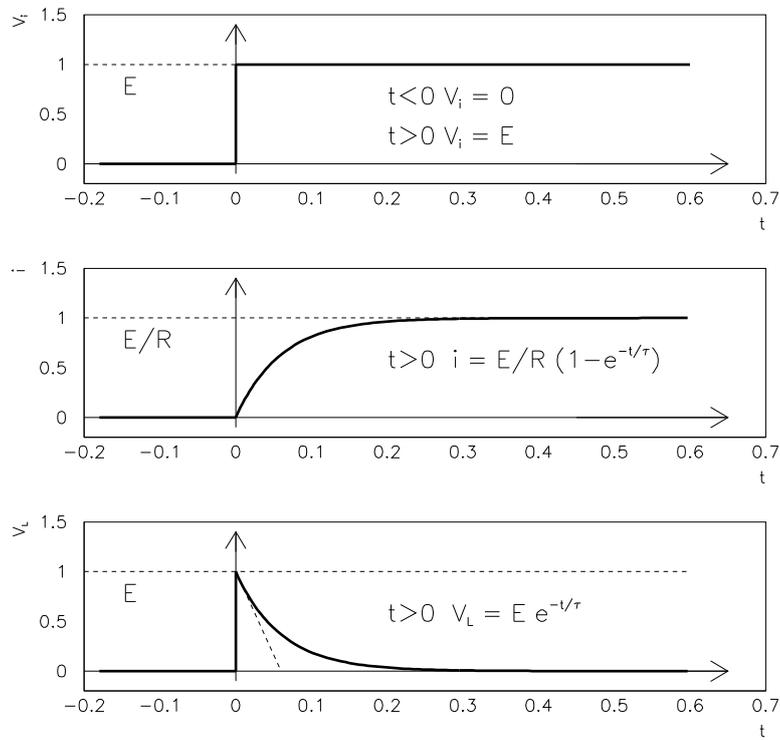


Figura 2.31:

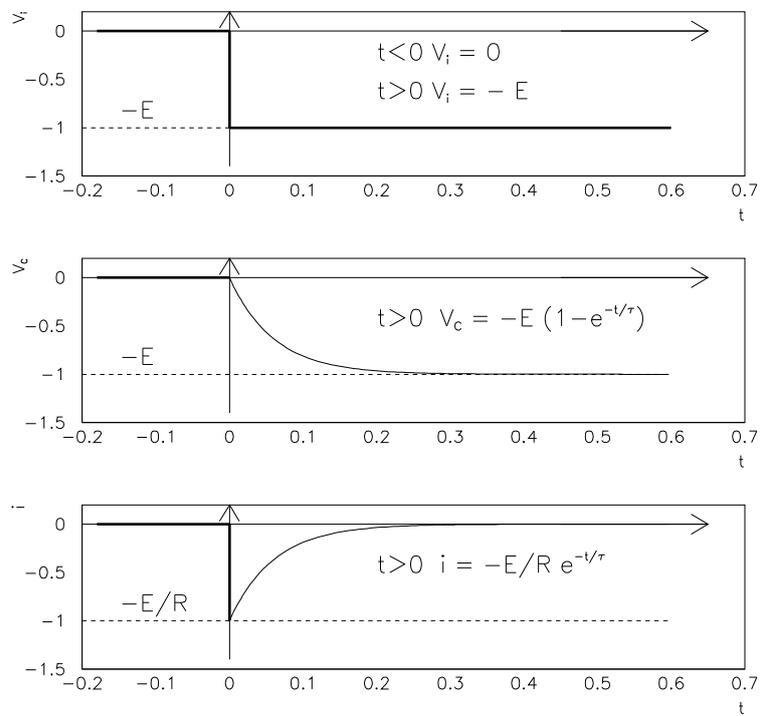


Figura 2.32:

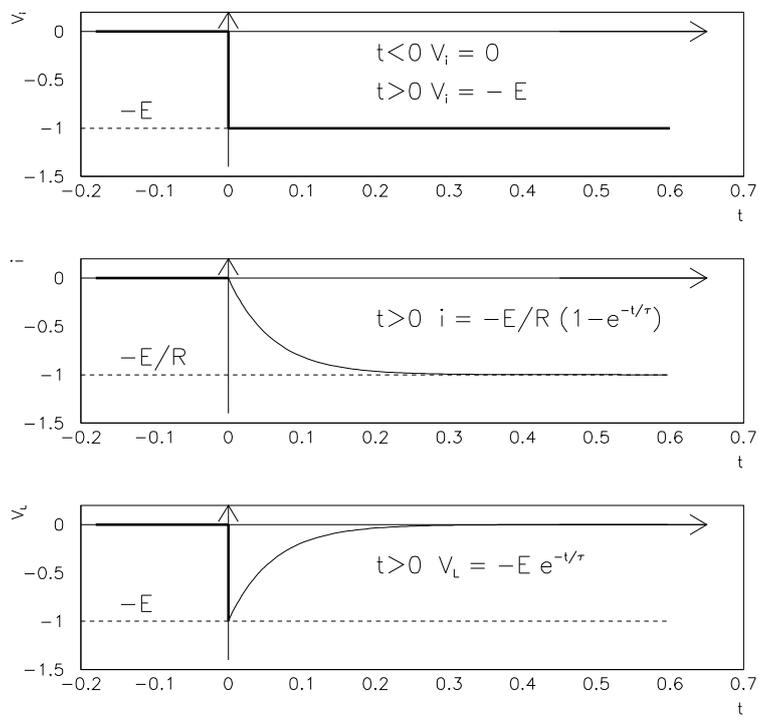


Figura 2.33:

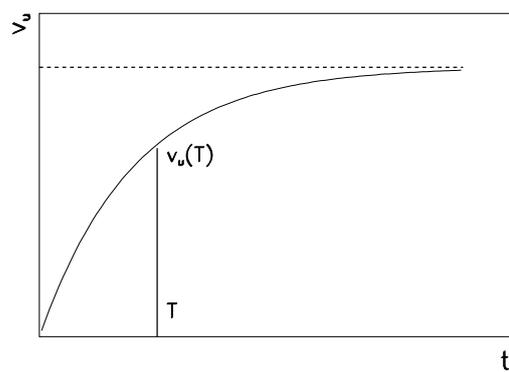


Figura 2.34:

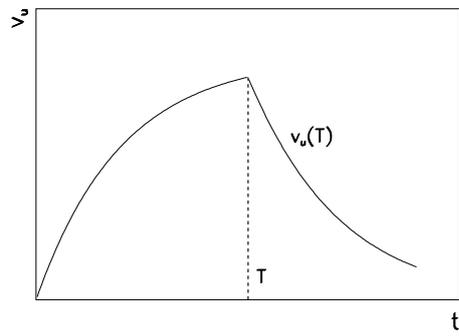


Figura 2.35:

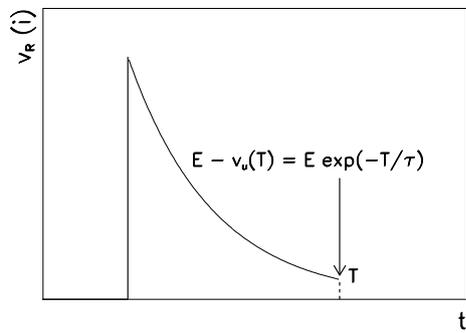


Figura 2.36:

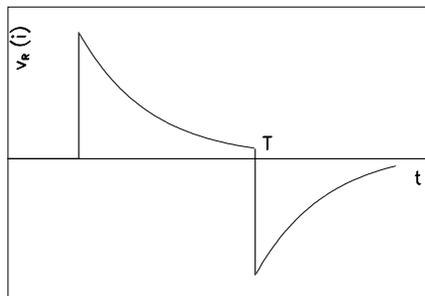


Figura 2.37:

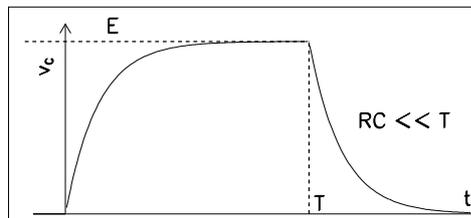


Figura 2.38:

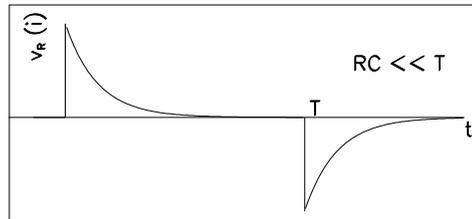


Figura 2.39:

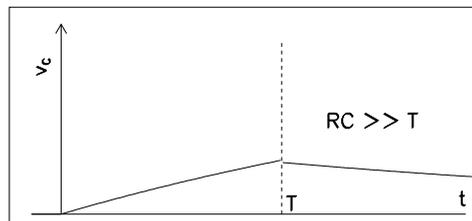


Figura 2.40:

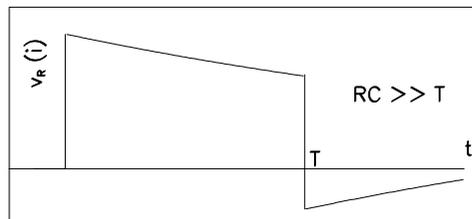


Figura 2.41:

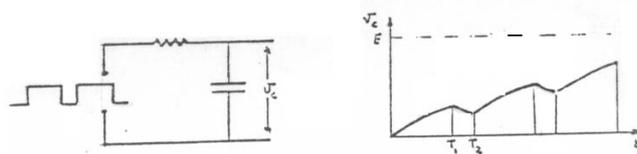


Figura 2.42: