

Capitolo 1

Spettro della radiazione elettromagnetica

Ricordiamo brevemente le diverse teorie che furono sviluppate nel corso dei secoli per interpretare la natura della luce e comprenderne il comportamento sperimentale.

Isaac Newton cercò di spiegare le proprietà della luce con l'ipotesi che questa fosse costituita da particelle estremamente piccole emesse dai corpi luminosi (**teoria corpuscolare della luce**) e soggette alle leggi della meccanica; Huygens, invece, cercò di spiegare i fenomeni luminosi interpretandoli sotto l'ipotesi di una natura ondulatoria della luce (**teoria ondulatoria della luce**); questo approccio trovò conferma verso la fine dell'Ottocento quando Maxwell, studiando le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, trovò delle soluzioni aventi le proprietà di *onde trasversali* che si propagano con una velocità che coincide, entro gli errori, col valore sperimentale della velocità della luce (il valore oggi accettato per la velocità della luce è $c = 299792458 \text{ m/s}$ ed è una delle costanti fondamentali della Fisica). Nella teoria ondulatoria della luce le onde associate vengono quindi considerate di natura elettromagnetica ed i campi elettrici e magnetici relativi devono essere soluzioni delle equazioni di Maxwell.

La figura 1.1 rappresenta in modo schematico lo spettro elettromagnetico oggi conosciuto. Vediamone, a grandi linee, le componenti principali.

Le **onde a frequenza radio** hanno frequenza da pochi Hz fino a 10^9 Hz e comprendono le radiazioni da linee elettriche, le onde radio AM e FM e le onde TV.

Le **microonde** vanno da circa 10^9 Hz a circa 3×10^{11} Hz, corrispondenti a lunghezze d'onda da 1 mm a 30 cm circa, e comprendono onde usate per telecomunicazioni (telefonini) e onde radar.

2CAPITOLO 1. SPETTRO DELLA RADIAZIONE ELETTROMAGNETICA

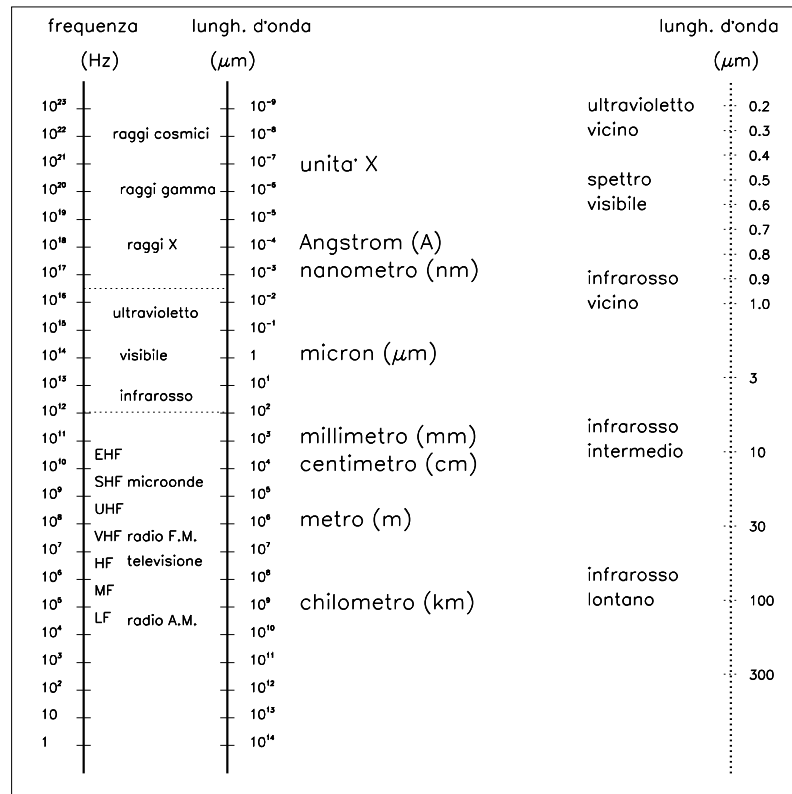


Figura 1.1:

L'**infrarosso** é compreso nella banda di frequenze da circa 3×10^{11} Hz a 4×10^{14} Hz.

La **luce** comprende una zona assai ristretta dello spettro elettromagnetico, con lunghezze d'onda da 780 nm a 380 nm, anche se, in realtà, l'occhio umano può spesso coprire un campo leggermente più ampio. Nella tabella 1.1 sono riportate le frequenze e le lunghezze d'onda associate ai vari colori.

L'**ultravioletto** si estende al di là del violetto da una frequenza di circa 7.7×10^{14} Hz fino a circa 3×10^{17} Hz. La radiazione solare contiene ultravioletto in frazione piuttosto notevole; essa viene, però, assorbita in larga misura negli strati più alti dell'atmosfera terrestre.

I **raggi X**, scoperti da Roentgen nel 1895, occupano la banda seguente all'ultravioletto fino a circa 5×10^{19} Hz; al di là di questi raggi si hanno i **raggi gamma**.

La teoria ondulatoria risulta adeguata per tutti i problemi di trasmissione della luce (propagazione in mezzi omogenei e comportamento all'in-

Colore	lunghezza d'onda nel vuoto (nm)	Frequenza (10^{12} Hz)
Rosso	780–622	384–482
Arancione	622–597	482–503
Giallo	597–577	503–520
Verde	577–492	520–610
Azzurro	492–455	610–659
Violetto	455–380	659–769

Tabella 1.1:

terfaccia tra mezzi diversi), tuttavia, come é stato stabilito dallo sviluppo della Teoria Quantistica, l'emissione e l'assorbimento della luce avvengono attraverso “pacchetti d'onde” con energia ed impulso definiti, chiamati *quanti di luce o fotoni*. Nella maggioranza dei casi il comportamento della radiazione elettromagnetica é quello tipico ondulatorio; viceversa, in certi fenomeni le proprietà corpuscolari dei fotoni risultano predominanti. Questo comportamento particolare é noto col nome di **dualismo onda–corpuscolo**.

Capitolo 2

Propagazione della radiazione luminosa

La teoria ondulatoria della luce permette di descrivere accuratamente la propagazione della luce in un mezzo isotropo, i fenomeni della riflessione e della rifrazione e perciò anche la propagazione attraverso una successione di diversi mezzi materiali a contatto. Tuttavia, lo studio di un buon numero di situazioni di notevole importanza pratica può semplificarsi notevolmente utilizzando le idee dell'**Ottica geometrica** basate sul concetto di **raggio luminoso**. Da un punto di vista formale si può osservare che lo studio della propagazione della luce in un mezzo isotropo può farsi in termini delle normali ai fronti d'onda in luogo dei fronti d'onda stessi: *quando la luce si propaga in un mezzo isotropo, le traiettorie ortogonali ai fronti d'onda vengono chiamate raggi luminosi*. Da un punto di vista pratico un raggio di luce può realizzarsi con buona approssimazione utilizzando fasci laser o facendo arrivare un fascio di luce su di uno schermo opaco sul quale sia stato praticato un piccolo foro: al limite, per un foro puntiforme si potrebbe pensare di produrre un singolo raggio luminoso. Questo, però, non avviene mai perché quando un'onda piana luminosa di lunghezza d'onda λ attraversa un foro di diametro d , il fascio di luce emergente presenta una dilatazione angolare ϕ dell'ordine di λ/d (diffrazione). Solo nel caso limite $\lambda = 0$ non si verificherebbe alcuno sparpagliamento angolare e si potrebbe parlare di raggio luminoso come di una retta luminosa.

Pertanto l'impiego del concetto di raggio luminoso, e quindi la validità dell' Ottica geometrica, restano ben giustificati solo nei casi in cui i diaframmi e gli ostacoli incontrati dalla luce hanno dimensioni lineari assai grandi rispetto alla lunghezza d'onda λ ; quando tale condizione non è soddisfatta i fenomeni di diffrazione e interferenza hanno un ruolo dominante e per la loro interpretazione è necessario l'impiego dell'Ottica ondulatoria.

2.1 Leggi sperimentali della propagazione luminosa

Sperimentalmente la propagazione della luce attraverso un mezzo isotropo ed il suo comportamento alla superficie di separazione tra mezzi isotropi differenti sono descritti da tre leggi:

1. Legge della propagazione rettilinea
2. Leggi della riflessione
3. Leggi della rifrazione

É noto sperimentalmente fino dall'antichit  che la luce si propaga secondo traiettorie rettilinee per portarsi da un punto A ad un punto B immersi nello stesso mezzo otticamente omogeneo (aria, acqua, ..) o in mezzi otticamente omogenei diversi. Infatti   molto semplice osservare nella pratica il comportamento della radiazione luminosa in un mezzo omogeneo, per esempio considerando la traiettoria della luce emessa da una lampada ad incandescenza immersa in aria, quando essa venga intercettata da uno schermo sul quale sia praticato un foro che permetta solamente ad una porzione del fascio luminoso di estendersi dietro di esso.   anche semplice convincersi che la traiettoria di un raggio luminoso che viene emesso da una sorgente in aria e che si propaga fino ad un punto in acqua attraversando la superficie di separazione tra i due mezzi   data da una linea spezzata. Per quanto detto sopra a proposito del concetto di raggio luminoso, la propagazione rettilinea della luce   verificabile solamente fintanto che essa non incontri lungo il suo cammino degli ostacoli con dimensioni lineari confrontabili con la sua lunghezza d'onda, allorch  la natura ondulatoria diventa dominante.

Se un fascio luminoso incide sulla superficie di separazione di due mezzi diversi esso si divide in due parti di modo che una parte dell'energia luminosa si riflette indietro nel primo mezzo, dando il fenomeno della **riflessione**, ed una parte entra nel secondo mezzo, dando il fenomeno della **rifrazione**. Le leggi sperimentali che governano i due fenomeni possono essere enunciate nel modo seguente:

- **Leggi della riflessione**

1. Raggio incidente, raggio riflesso e normale nel punto di incidenza alla superficie di separazione, piana o curva che essa sia, giacciono nello stesso piano.

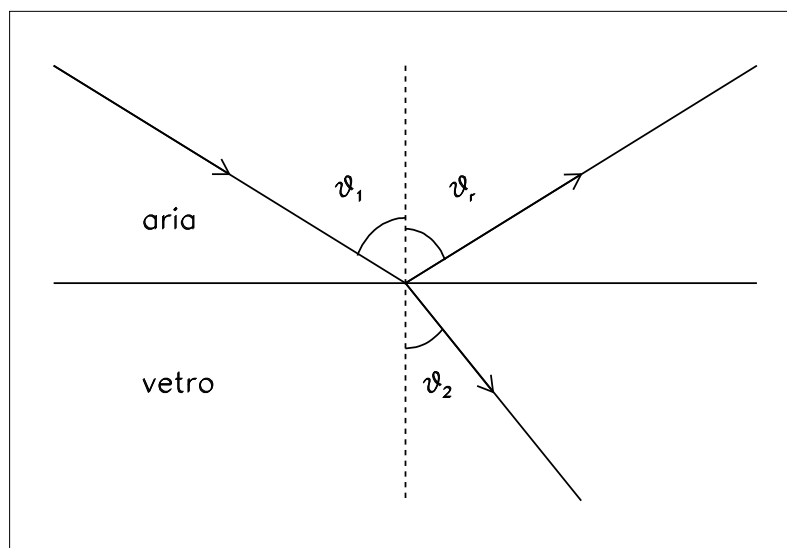


Figura 2.1:

La figura 2.1 rappresenta un raggio luminoso che incide su una superficie aria–vetro lucida. L'angolo θ_1 tra il raggio incidente e la normale alla superficie nel punto di incidenza viene detto **angolo di incidenza** e il piano definito da queste due rette é detto **piano di incidenza**. Il raggio riflesso giace nel piano di incidenza e forma con la normale un angolo θ_r detto **angolo di riflessione**.

2. L'angolo di incidenza e l'angolo di riflessione sono uguali:

$$\theta_1 = \theta_r \quad (2.1)$$

Nel caso particolare di incidenza normale il raggio riflesso torna indietro su se' stesso.

3. Il percorso raggio incidente–raggio riflesso é invertibile esattamente.

Va osservato che una superficie puó presentare vari gradi di levigatezza e quindi riflettere la luce in modi diversi: se la superficie é levigata con cura e perciò presenta irregolarità che, nella maggior parte dei casi, hanno dimensioni piccole rispetto alla lunghezza d'onda della luce incidente, si ha **riflessione regolare o speculare**; se invece le irregolarità hanno dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda, anche se si suppone che le leggi della riflessione geometrica siano verificate da ogni raggio, i raggi riflessi viaggiano poi in varie direzioni: si parla in questo caso di **riflessione diffusa**.

Il meccanismo della riflessione della luce si può spiegare mediante l'assorbimento e la riemissione della luce ad opera degli atomi del mezzo riflettente. Quando la luce che si propaga nell'aria incide su una superficie di vetro, gli atomi del vetro assorbono la luce e la rimettono alla stessa frequenza (oscillazioni forzate) in tutte le direzioni; le onde emesse all'indietro dagli atomi del vetro "interferiscono", cioè si sovrappongono, costruttivamente sotto un angolo uguale all'angolo di incidenza per produrre l'onda riflessa. La frazione di energia luminosa riflessa su una superficie di separazione dipende dall'angolo di incidenza, dalla direzione del vettore intensità del campo elettrico \mathbf{E} associato all'onda e dalla velocità relativa della luce nel primo e nel secondo mezzo. La velocità della luce in un mezzo è caratterizzata dall'**indice di rifrazione** n , definito come il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto c e la velocità nel mezzo v :

$$n = \frac{c}{v} \quad (2.2)$$

- Leggi della rifrazione Quando un raggio luminoso incide sulla superficie di separazione tra due mezzi, la variazione della direzione di propagazione del raggio luminoso che entra nel secondo mezzo è detta **rifrazione**. Valgono le seguenti leggi sperimentali:

1. Raggio incidente, raggio rifratto e normale alla superficie rifrangente nel punto di incidenza giacciono nello stesso piano.
2. Legge di Snellius–Descartes. Il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza θ_1 e il seno dell'**angolo di rifrazione** θ_2 , formato dal raggio rifratto con la normale, è dato da n_2/n_1 , ovvero:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2.3)$$

3. Il percorso raggio incidente–raggio rifratto è invertibile esattamente.

Dalla legge di Snellius–Descartes si vede che se l'indice di rifrazione del secondo mezzo è maggiore dell'indice di rifrazione del primo mezzo l'angolo di rifrazione risulta minore dell'angolo di incidenza (si noti che entrambi gli angoli sono definiti tra 0 e $\pi/2$), cioè il raggio rifratto si avvicina alla normale; al contrario, se l'indice di rifrazione del secondo mezzo è minore dell'indice di rifrazione del primo mezzo, l'angolo di rifrazione è maggior dell'angolo di incidenza e il raggio rifratto si allontana dalla normale. In questo secondo caso, al crescere dell'angolo

8 CAPITOLO 2. PROPAGAZIONE DELLA RADIAZIONE LUMINOSA

di incidenza, l'angolo di rifrazione cresce finché non si raggiunge un angolo di incidenza limite θ_{1L} per cui l'angolo di rifrazione vale $\pi/2$:

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \quad (2.4)$$

$$\sin \theta_2 = \sin \pi/2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_{1L} \rightarrow \sin \theta_{1L} = \frac{n_2}{n_1} \quad (2.5)$$

Per angoli di incidenza maggiori di θ_{1L} non esiste raggio rifratto (matematicamente, per $n_2 < n_1$ l'equazione (2.4) non ammette soluzioni per $\theta_1 > \theta_{1L}$, dato che il seno di un angolo non può essere maggiore di 1): questo fenomeno è detto **riflessione totale**. La riflessione totale si

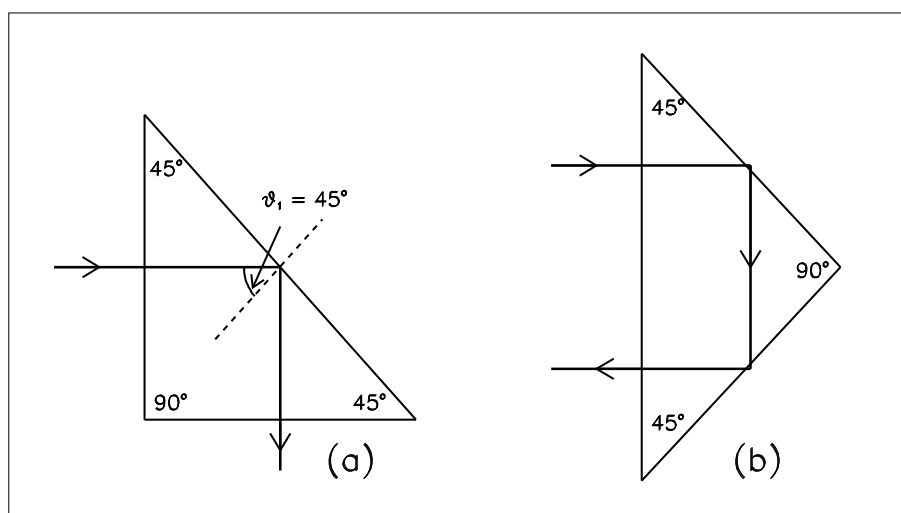


Figura 2.2:

produce soltanto quando la luce passa da un mezzo più rifrangente ad un altro meno rifrangente, come nel caso vetro-aria ($n_2/n_1 \simeq 1/1.5$, $\theta_{1L} \simeq 41.8^\circ$) o acqua-aria ($n_2/n_1 \simeq 1/1.333$, $\theta_{1L} \simeq 48.6^\circ$). Esempi di riflessione totale da parte di un prisma di vetro di una interfaccia vetro-aria sono riportati nella figura 2.2 (a) e (b).

Viceversa, se $n_2 > n_1$, $\theta_2 < \theta_1$ e, al crescere dell'angolo di incidenza θ_1 da 0 a $\pi/2$, l'angolo di rifrazione θ_2 crescerà da 0 fino ad un valore massimo dato dalla relazione:

$$n_2 \sin \theta_{2L} = n_1 \sin \pi/2 \rightarrow \sin \theta_{2L} = \frac{n_1}{n_2}$$

il cui valore coincide con quello dell'angolo limite per il cammino invertito.

Nel fenomeno della rifrazione della luce l'onda trasmessa é generata dalla sovrapposizione dell'onda incidente e dell'onda prodotta dall'assorbimento e dalla riemissione dell'energia luminosa per opera degli atomi del secondo mezzo. Nel caso della luce che entra in un mezzo provenendo dall'aria c'è un ritardo di fase tra l'onda riemessa e l'onda incidente, dovuto al meccanismo di assorbimento-riemissione; c'è anche un ritardo di fase tra l'onda risultante e l'onda incidente, per cui in un dato intervallo di tempo l'onda trasmessa percorre nel mezzo un cammino piú corto di quello dell'onda incidente iniziale: cioè, la velocità dell'onda trasmessa é minore di quella dell'onda incidente. Perciò l'indice di rifrazione del secondo mezzo é maggiore di 1 (per l'aria $n = c/v = 1.0003$, per il ghiaccio $n = c/v = 1.31$). Poiché la frequenza della luce nel secondo mezzo é uguale a quella della luce incidente, ma la sua velocità di propagazione é diversa, la lunghezza d'onda della luce trasmessa é (leggermente) diversa da quella della luce incidente. Se λ é la lunghezza d'onda della luce nel vuoto, la lunghezza d'onda λ' in un mezzo di indice di rifrazione n é:

$$\lambda' = \frac{v}{\nu} = \frac{c/n}{\nu} = \frac{\lambda}{n} \quad (2.6)$$

La velocità di propagazione nel mezzo, sempre minore di quella nel vuoto, é poi una funzione della frequenza dell'onda luminosa a causa dei diversi tempi di riemissione della luce assorbita da parte degli atomi del mezzo a seconda della frequenza stessa. Ne segue che anche l'indice di rifrazione dipende dalla frequenza:

$$n(\nu) = \frac{c}{v(\nu)} \quad (2.7)$$

In particolare n risulta decrescere lievemente al diminuire della frequenza; generalmente, però, la variazione dell'indice di rifrazione viene indicata in funzione della lunghezza d'onda della luce nel vuoto: un esempio é riportato in figura 2.3 per alcuni tipi di vetro e per il quarzo. La dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda (e perciò da ν) é detta **dispersione**: se un fascio di luce bianca incide sotto un certo angolo sulla superficie di separazione tra aria e vetro, ad esempio, l'angolo di rifrazione per le lunghezza d'onda minori, verso l'estremo violetto dello spettro visibile, é lievemente minore di quello per le lunghezza d'onda maggiori, verso l'estremo rosso dello spettro,

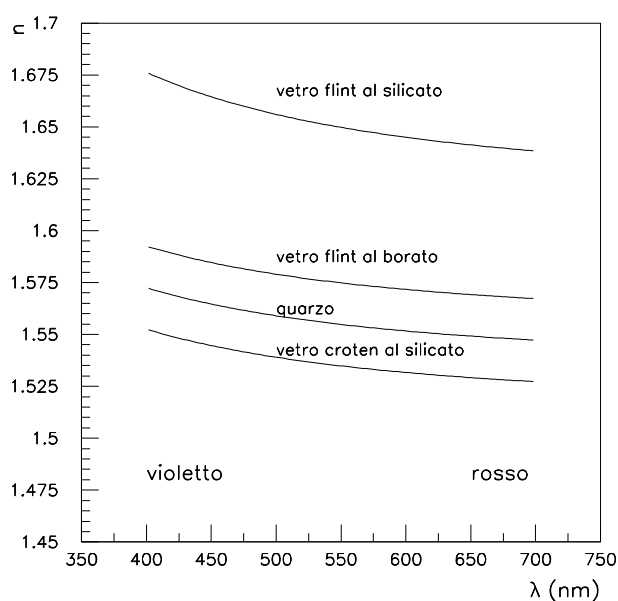


Figura 2.3:

come conseguenza del lieve aumento del valore di n dal rosso al violetto. Perciò il fascio di luce bianca entrando in un mezzo con un indice di rifrazione diverso da quello del mezzo in cui è stato emesso viene scomposto o disperso nei colori, ossia nelle lunghezze d'onda, da cui è composto.

2.2 Lamina ottica

Come esempio di dispersione della luce, si consideri la figura 2.4. Un raggio luminoso incide sulla faccia di una lamina a facce piane e parallele con indice di rifrazione n_2 , immersa in un mezzo con indice n_1 : l'angolo di incidenza sia i_1 . Se si traccia il percorso del raggio nella lamina e il successivo raggio rifratto uscente, si verifica facilmente che quest'ultimo è parallelo al raggio iniziale, ma spostato di una distanza D . Infatti, per la legge di Snellius, l'angolo i_2 formato dal raggio rifratto nella lamina con la normale è fissato dalla relazione $\sin i_2 = (n_1/n_2) \sin i_1$; il raggio rifratto incontra la seconda faccia con angolo di incidenza i_2 e l'angolo di rifrazione i'_1 è dato da $\sin i'_1 = (n_2/n_1) \sin i_2$, cosicché risulta $i_1 = i'_1$. Se t è lo spessore della lamina, dalla figura si ricava

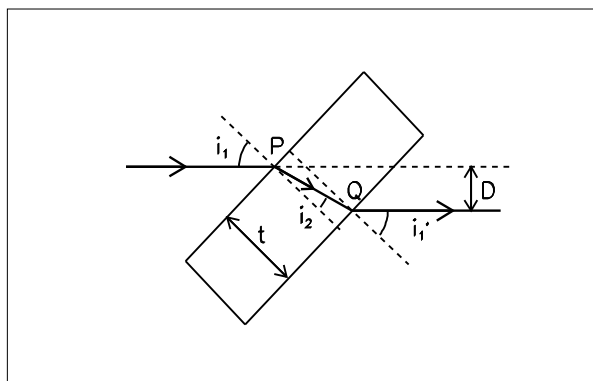


Figura 2.4:

che:

$$D = \overline{PQ} \sin (i_1 - i_2) = \frac{t}{\cos i_2} \sin (i_1 - i_2) = t (\sin i_1 - \cos i_1 \tan i_2)$$

$$= t \sin i_1 \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i_1}{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 i_1}} \right)$$

Per angoli i_1 piccoli é $D \simeq t (1 - n_1/n_2) i_1$; poiché l'indice di rifrazione (n_2) dipende dalla lunghezza d'onda della luce impiegata, colori diversi subiranno spostamenti diversi; in particolare, dato che n_2 per il viola é maggiore di n_2 per il rosso, é facile vedere, sia nella formula approssimata che in quella esatta, che la deviazione D per il viola é maggiore di quella per il rosso; la differenza tra gli spostamenti risulta:

$$D_v - D_r = t \cos i_1 (\tan i_{2r} - \tan i_{2v})$$

Qualora sia possibile misurare l' angolo di rifrazione entro la lamina, cioe' i_2 , lo spostamento del raggio prodotto dalla lamina sara' semplicemente:

$$D = \overline{PQ} \sin (i_1 - i_2) = \frac{t}{\cos i_2} \sin (i_1 - i_2)$$

Un osservatore posto dietro la lamina vede il raggio luminoso spostato di una quantita' pari a D , cioe' vede una immagine virtuale della sorgente del raggio stesso. L' effetto diminuisce al diminuire dell' angolo di incidenza.

Un altro esempio di dispersione della luce si ha quando un fascio di luce bianca incide sotto un certo angolo sulla superficie di un prisma di vetro; l'angolo di rifrazione per le lunghezza d'onda minori, é lievemente minore di quello per le lunghezza d'onda maggiori e la luce di lunghezza d'onda minore viene deviata piú di quella di lunghezza d'onda maggiore: anche in questo caso il fascio di luce bianca viene scomposto o disperso nei colori, ossia nelle lunghezze d'onda, da cui é composto, come mostrato in figura 2.5.

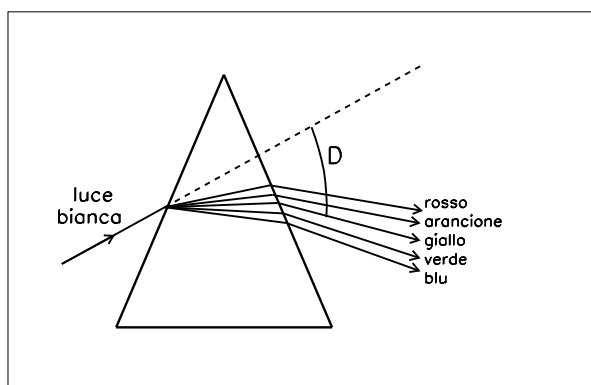


Figura 2.5:

2.3 Deviazione di un prisma

Consideriamo in dettaglio la deviazione prodotta da un prisma di vetro sulla direzione di propagazione di un raggio luminoso di lunghezza d'onda λ ; facciamo riferimento alla figura 2.6. Si considera una sezione principale di un prisma triangolare, data da un piano perpendicolare allo spigolo del prisma stesso: l'angolo al vertice della sezione, α , viene chiamato **angolo rifrangente**. Un raggio di luce monocromatica incide sulla prima faccia del prisma formando un angolo i_1 con la normale nel punto di incidenza; una parte di esso viene rifratta all'interno del prisma, formando un angolo i'_1 con la stessa normale: dato che l'indice di rifrazione del prisma (1.5–1.7) é maggiore di quello dell'aria il raggio rifratto risulterà avvicinarsi alla normale rispetto al raggio incidente. Il raggio rifratto raggiunge poi la seconda faccia del prisma e vi incide con un angolo i_2 rispetto alla normale ed esce dal prisma con un angolo i'_2 dopo aver subito una seconda rifrazione. L'angolo D tra la direzione di incidenza sulla prima faccia del prisma e la direzione con

cui il raggio rifratto emerge dalla seconda faccia del prisma prende il nome di **angolo di deviazione**. Si vuole ricavare una relazione che permetta di esprimere tale angolo in funzione dell'indice di rifrazione n del prisma, del suo angolo rifrangente α e degli angoli (misurabili) di incidenza i_1 e di uscita i'_2 .

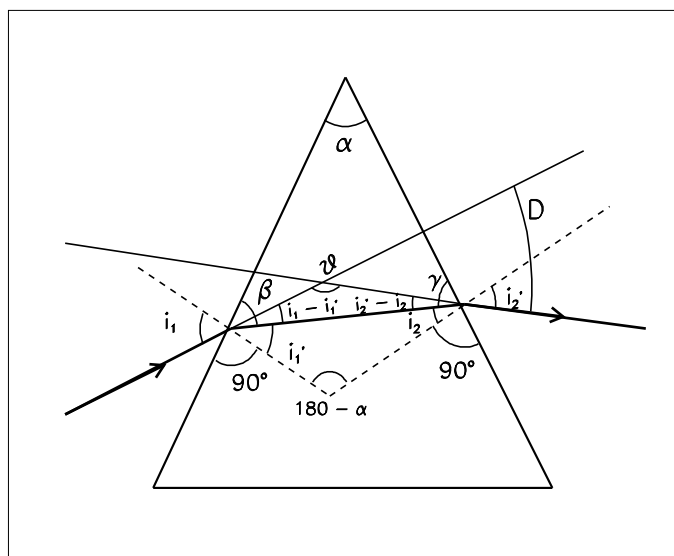


Figura 2.6:

Osserviamo che, in base a considerazioni di geometria elementare sui triangoli (e sugli angoli esterni ai triangoli) valgono le seguenti relazioni:

$$\theta = \pi - (i_1 - i'_1) - (i'_2 - i_2) \quad (2.8)$$

$$D = \pi - \theta = (i_1 - i'_1) + (i'_2 - i_2) \quad (2.9)$$

Siccome

$$\beta + i'_1 = \pi/2 \quad (2.10)$$

$$\gamma + i_2 = \pi/2 \quad (2.11)$$

ed anche

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (2.12)$$

risulta

$$\alpha = i'_1 + i_2 \quad (2.13)$$

e perciò

$$D = i_1 + i'_2 - \alpha \quad (2.14)$$

che esprime l'angolo di deviazione D in funzione di angoli misurabili: α , i_1 e i'_2 . Questi ultimi due angoli non sono indipendenti ma risultano legati dalla seconda legge della rifrazione:

$$\sin i'_1 n = \sin i_1 \quad (2.15)$$

da cui

$$\sin i'_1 = \sin i_1 / n \quad (2.16)$$

e

$$\sin i'_2 = n \sin i_2 = n \sin (\alpha - i'_1) = n (\sin \alpha \cos i'_1 - \cos \alpha \sin i'_1) \quad (2.17)$$

da cui, per la (2.15)

$$\sin i'_2 = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \cos \alpha \sin i_1 \quad (2.18)$$

Nel caso particolare in cui si operi in modo tale che la seconda rifrazione avvenga sotto un angolo pari all'angolo limite, cioè che $\sin i_2 = 1/n$ si avrà $\sin i'_2 = \sin \pi/2$ e, noto che sia l'angolo rifrangente del prisma, α , si avrà:

$$1 = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \cos \alpha \sin i_1 \quad (2.19)$$

In particolare, per $\alpha = \pi/3$, si potrà ricavare n come:

$$n = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos \pi/3 \sin i_1}{\sin \pi/3}\right)^2 + \sin^2 i_1} \quad (2.20)$$

L'angolo di deviazione D può essere espresso come:

$$D = i_1 - \alpha + \arcsin (\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} \sin \alpha - \sin i_1 \cos \alpha) \quad (2.21)$$

dove tutti gli angoli che compaiono sono direttamente misurabili. Un raggio incidente riesce ad attraversare il prisma se è $i_2 < \theta_L$ e contemporaneamente $i'_1 < \theta_L$ per il cammino inverso; poiché $\alpha = i'_1 + i_2$, le due condizioni precedenti possono scriversi nella forma:

$$\alpha - \theta_L < i'_1 < \theta_L$$

In particolare da queste disuguaglianze risulta $\alpha < 2 \theta_L$, condizione (necessaria) perché il raggio venga deviato dal prisma.

Viceversa, dalla misura dell'angolo di deviazione D è possibile ricavare l'indice di rifrazione del mezzo del prisma: infatti risolvendo l'ultima equazione in funzione di n si ottiene:

$$n = \sqrt{(\sin(D + \alpha - i_1) + \sin i_1 \cos \alpha)^2 \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 i_1} \quad (2.22)$$

che è di nuovo valutabile a partire da quantità misurabili direttamente.

Una situazione particolare si ha quando l'angolo di incidenza i_1 è tale da produrre una deviazione D minima; in questo caso differenziando le (2.15) e (2.17) si ha:

$$\cos i_1 di_1 = n \cos i'_1 di'_1 \quad (2.23)$$

e

$$n \cos i_2 di_2 = \cos i'_2 di'_2 \quad (2.24)$$

Dalla (2.24):

$$di'_2 = \frac{n \cos i_2 di_2}{\cos i'_2} \quad (2.25)$$

e poiché $i_2 = \alpha - i'_1$, che implica $di_2 = -di'_1$, dalla (2.21) si ricava:

$$di_2 = -\frac{\cos i_1 di_1}{n \cos i'_1} \quad (2.26)$$

che, sostituita nella (2.25) fornisce:

$$di'_2 = -\frac{\cos i_2 \cos i_1 di_1}{\cos i'_2 \cos i'_1} \quad (2.27)$$

Per il differenziale dell'angolo di deviazione $D = i_1 + i'_2 - \alpha$ si ha:

$$dD = di_1 + di'_2 = di_1 \left(1 - \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos i'_2 \cos i'_1} \right) \quad (2.28)$$

la derivata:

$$\frac{dD}{di_1} = 1 - \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos i'_2 \cos i'_1} \quad (2.29)$$

fornisce la variazione di D per variazione unitaria di i_1 . In condizioni di minima deviazione

$$\frac{dD}{di_1} = 0$$

$$\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos i'_2 \cos i'_1} = 1$$

che risulta verificato se $i'_1 = i_2$ e $i'_2 = i_1$, cioè se si é in condizioni di simmetria per cui il raggio si propaga nel prisma parallelamente alla base. Allora, dato che per l'angolo di deviazione minima vale (2.14): $D_M = 2i_1 - \alpha$ e (2.13) $\alpha = 2i'_1$, considerando la prima rifrazione si puó scrivere:

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin i'_1} = \frac{\sin \left(\frac{D_M + \alpha}{2} \right)}{\sin \alpha/2}$$

e perciò:

$$n(\lambda) = \frac{\sin i_1}{\sin i'_1(\lambda)} = \frac{\sin \left(\frac{D_M(\lambda) + \alpha}{2} \right)}{\sin \alpha/2}$$

che permette di determinare l'indice di rifrazione del mezzo per le varie lunghezze d'onda che compongono il fascio incidente dalla misura dell'angolo di deviazione minima. La dispersione del prisma consiste appunto nella dipendenza della deviazione D dalla lunghezza d'onda e resta misurata, per definizione, da $dD/d\lambda$; dalle (2.16), (2.17) e (2.19) segue:

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\cos i_2 \tan i'_1 + \sin i_2}{\cos i'_2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

Per la maggior parte dei mezzi trasparenti e non colorati vale una relazione tipo:

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

come illustrato in figura 2.3.

Capitolo 3

Sistemi ottici

Si chiama **sistema ottico** un sistema di lenti e specchi, cioè dispositivi riflettenti e rifrangenti, quindi una successione di superfici riflettenti e rifrangenti che delimitano mezzi con indici di rifrazione differenti. Le superfici in questione sono lisce e regolari e, nei casi che verranno studiati, hanno forma sferica o piana (come limite di una superficie sferica quando il raggio di curvatura tende ad infinito). Quando tutti i centri di curvatura delle superfici si trovano sulla stessa retta, questa viene chiamata **asse ottico** e il sistema é detto **centrato**; in tale situazione le superfici piane eventualmente presenti sono perpendicolari all'asse. L'asse ottico é' asse di simmetria di rotazione del sistema; il punto di incontro dell'asse e una superficie riflettente o rifrangente viene chiamato **vertice**.

Come già accennato all'inizio del capitolo precedente, l'azione di una discontinuitá sulla propagazione della luce puó essere descritta convenientemente nell'ambito dell'Ottica Geometrica utilizzando il concetto di **raggio luminoso**; in un mezzo omogeneo, quali sono supposti essere i mezzi separati dalle superfici riflettenti e rifrangenti considerate, i raggi luminosi sono perpendicolari al fronte d'onda. Si consideri una sorgente luminosa (praticamente) puntiforme posta nel punto A; il fascio di raggi luminosi uscenti da A é omocentrico e A viene detto **punto oggetto** (o semplicemente **oggetto**): se, dopo aver attraversato il sistema ottico, il fascio risulta essere omocentrico, il suo centro A' viene chiamato **punto immagine** (o semplicemente **immagine**) di A. Quando i raggi emergenti dal sistema passano effettivamente per il centro A', questo é **immagine reale** e se si pone uno schermo in A' su di esso si forma una immagine luminosa; se, invece, i raggi emergenti divergono ma i loro prolungamenti passano tutti per il centro A', si ha un'**immagine virtuale**.

3.1 Superfici riflettenti: specchi

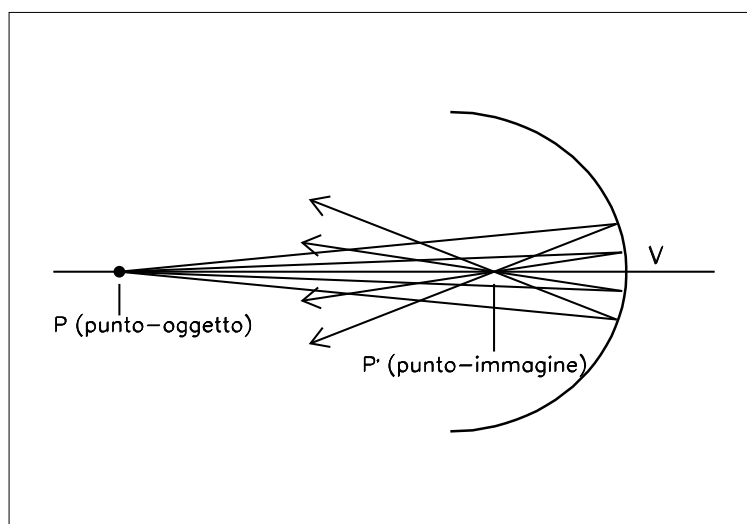


Figura 3.1:

La figura 3.1 mostra un fascio di raggi luminosi uscenti da una sorgente puntiforme P posta sull'asse di uno specchio sferico concavo: essi, dopo essersi riflessi sullo specchio, convergono nel punto immagine P' (immagine reale), per poi divergere come se in esso ci fosse un oggetto. Per ottenere una formula semplice che fornisca la posizione dell'immagine P' in funzione della posizione della sorgente e del raggio di curvatura dello specchio, applichiamo le leggi della riflessione ponendoci nella **approssimazione** (gaussiana) di **raggi parassiali**, cioè consideriamo solamente raggi luminosi che incidono sullo specchio sferico in punti vicini al vertice e formano con l'asse ottico degli angoli piccoli per i quali è valida la approssimazione:

$$\sin \alpha \sim \alpha \sim \operatorname{tg} \alpha \quad (3.1)$$

(I raggi che incidono in punti lontani dall'asse, detti raggi *non parassiali* convergono in punti vicini al punto immagine e fanno apparire confusa o "sfuocata" l'immagine producendo un effetto detto **aberrazione di sfericità** degli specchi).

La distanza dell'immagine (s'), misurata dal vertice V dello specchio a P', può essere messa in relazione con la distanza dell'oggetto (s), misurata tra il vertice V e il punto P, e il raggio di curvatura (r) dello specchio

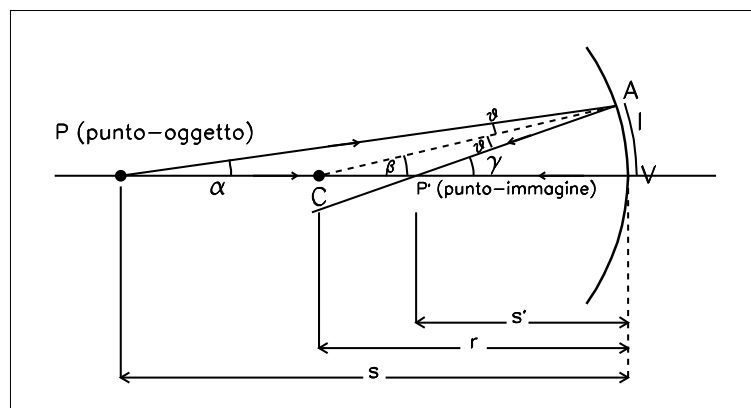


Figura 3.2:

servendosi della geometria elementare. La costruzione è illustrata nella figura 3.2, per un generico raggio parassiale. Il punto C è il centro di curvatura dello specchio; il raggio incidente PA e il raggio riflesso AP' formano angoli uguali con la semiretta radiale CA che è normale alla superficie riflettente nel punto di incidenza A. L'angolo β è un angolo esterno al triangolo PAC e perciò è uguale a:

$$\beta = \alpha + \theta \quad (3.2)$$

Analogamente dal triangolo PAP' si ottiene:

$$\gamma = \alpha + 2\theta \quad (3.3)$$

Eliminando θ tra queste due equazioni, si ottiene:

$$\gamma = \alpha + 2(\beta - \alpha) \quad (3.4)$$

$$2\beta = \alpha + \gamma \quad (3.5)$$

Usando le approssimazioni per i piccoli angoli, valide per raggi parassiali, $\alpha \sim l/s$, $\beta \sim l/r$, $\gamma \sim l/s'$, si ottiene:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \quad (3.6)$$

Questa formula è detta **formula degli specchi sferici**. Se la distanza dell'oggetto è molto grande rispetto al raggio r , ossia se s tende ad infinito,

il termine $1/s$ può essere trascurato e la distanza dell'immagine é: $s' = 2/r$. Questa distanza é detta **distanza focale** f dello specchio e la formula degli specchi sferici si può scrivere:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (3.7)$$

Il **fuoco** o **punto focale** é il punto in cui vanno a convergere i raggi paralleli (= raggi provenienti da distanza infinita) che incidono sullo specchio. Viceversa, raggi uscenti da una sorgente puntiforme posta nel fuoco di uno specchio concavo si riflettono parallelamente all'asse; questa, come visto, e' una proprietá delle onde luminose nota come **invertibilitá del cammino luminoso**.

3.2 Costruzione grafica delle immagini formate dagli specchi

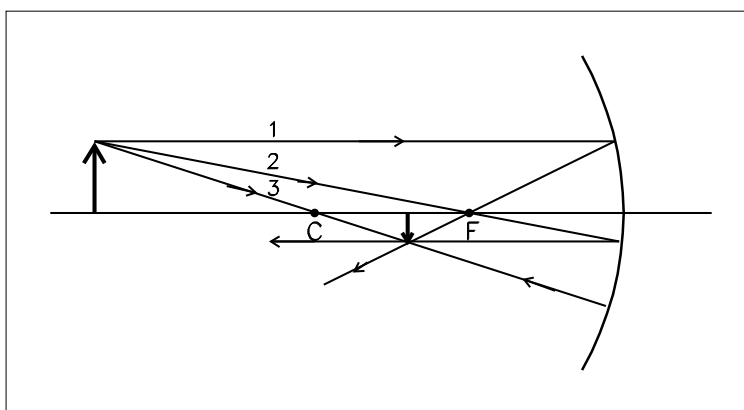


Figura 3.3:

Un metodo utile (anche se approssimato) per localizzare l'immagine formata da uno specchio é la **costruzione grafica** indicata in figura 3.3, in cui l'oggetto e' posto perpendicolarmente all'asse dello specchio. Si tracciano opportuni raggi uscenti dall'estremo superiore dell'oggetto (**raggi principali**) e dalla loro intersezione si ricava la posizione dell'immagine; i raggi principali per uno specchio sferico sono quattro:

3.2. COSTRUZIONE GRAFICA DELLE IMMAGINI FORMATE DAGLI SPECCHI21

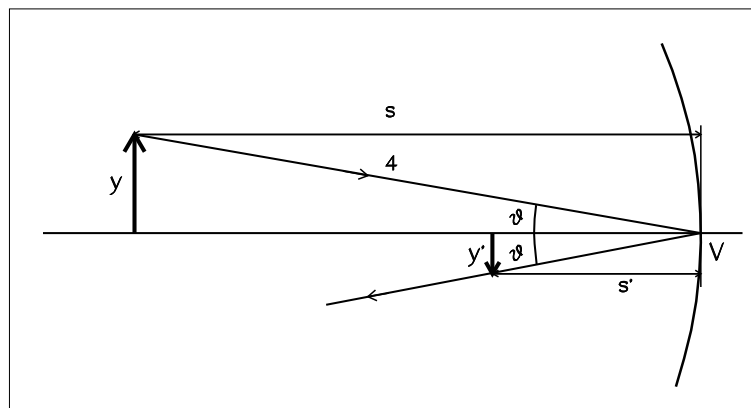


Figura 3.4:

1. il **raggio incidente parallelo all'asse** che si riflette passando per il fuoco;
2. il **raggio incidente passante per il fuoco** che si riflette parallelamente all'asse;
3. il **raggio incidente passante per il centro di curvatura** che si riflette su se' stesso dato che incide normalmente alla superficie;
4. il **raggio incidente passante per il vertice** (vedi figura 3.4) dello specchio che si riflette formando con l'asse un angolo uguale all'angolo di incidenza.

Dalle figure si vede che l'immagine é capovolta e non ha la stessa dimensione dell'oggetto. Il rapporto tra l'altezza dell'immagine (y') e l'altezza dell'oggetto (y) é l'**ingrandimento lineare trasverso** G_{lt} dell'immagine. Dalla figura 3.4 si può facilmente ricavare che $\text{tg } \theta = y/s = y'/s'$ da cui $G_{lt} = y'/y = s'/s$.

Se l'oggetto é tra lo specchio e il fuoco, i raggi riflessi non convergono, ma sembrano provenire da un punto situato dietro lo specchio, come illustrato in figura 3.5: l'immagine é virtuale e diritta e, essendo s minore di $r/2$, dall'equazione (3.6) s' risulta negativo.

Le equazioni (3.6), (3.7) e la definizione di distanza focale possono essere applicate agli specchi convessi, concavi e piani adottando la seguente convenzione sui segni:

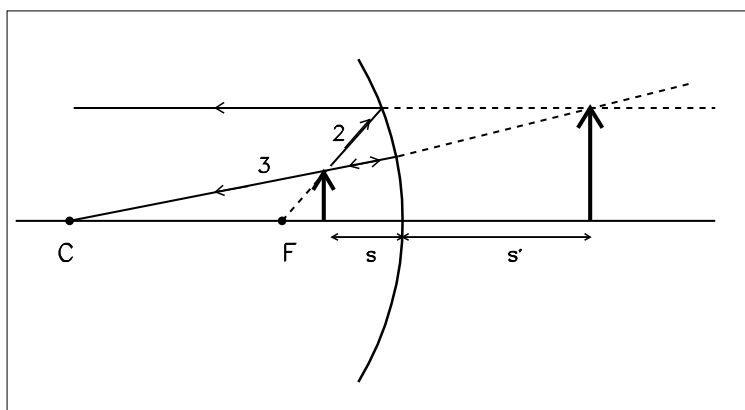


Figura 3.5:

s :	+ se l'oggetto é davanti allo specchio (oggetto reale) - se l'oggetto é dietro lo specchio (oggetto virtuale)
s' :	+ se l'immagine é davanti allo specchio (immagine reale) - se l'immagine é dietro lo specchio (immagine virtuale)
r, f :	+ se il centro di curvatura é davanti allo specchio (specchio concavo) - se il centro di curvatura é dietro allo specchio (specchio convesso)

Le immagini reali si possono formare solo davanti allo specchio, nello **spazio di riflessione** che coincide con lo **spazio di incidenza**. Con queste convenzioni per i segni l'ingrandimento trasversale é dato da:

$$G_{lt} = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (3.8)$$

Un ingrandimento negativo, che si ha quando sia s che s' sono positive, indica che l'immagine é capovolta.

3.3 Specchi piani

Nel caso degli specchi piani il raggio di curvatura r é infinito e pertanto anche la distanza focale risulta infinita. L'equazione (3.7) fornisce:

$$s' = -s$$

che indica che l'immagine é virtuale (dietro lo specchio) ad una distanza uguale alla distanza dell'oggetto. L'ingrandimento (equazione (3.8)) vale:

$$G_{lt} = +1$$

che indica che l'immagine é diritta ed ha la stessa altezza dell'oggetto. Inoltre l'immagine formata da uno specchio piano é affetta da una **inversione di profonditá** dovuta al fatto che lo specchio trasforma un sistema di coordinate destrorso per il quale vale la relazione tra i versori degli assi: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, in uno sinistrorso per il quale $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{k}$.

3.4 Specchi convessi

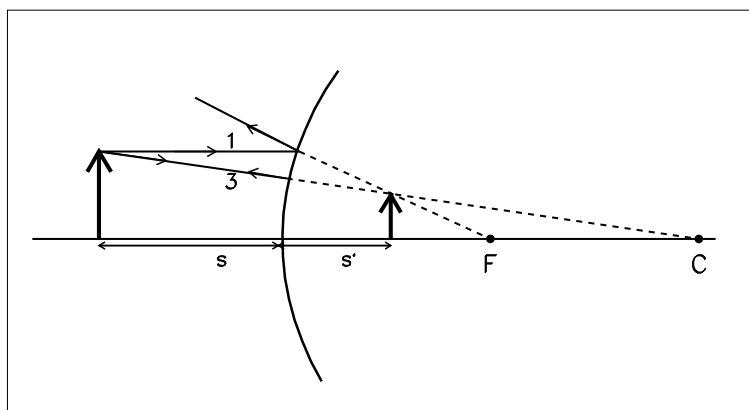


Figura 3.6:

La figura 3.6 mostra la costruzione grafica dell'immagine di un oggetto data da uno specchio sferico convesso. Il raggio passante per il centro di curvatura C é perpendicolare allo specchio e si riflette su se' stesso. Il raggio parallelo all'asse si riflette come se provenisse dal fuoco F posto dietro lo specchio. Si puó vedere che l'immagine si forma dietro lo specchio ed é pertanto virtuale. Risulta essere diritta e rimpicciolita.

3.5 Riassunto

Dalle formule (3.7) e (3.8) si possono trarre le seguenti conclusioni sulle immagini fornite dagli specchi sferici e piani:

specchio concavo $r > 0, f > 0$	specchio convesso $r < 0, f < 0$	specchio piano $r = \infty, f = \infty$
$s > r/2: s' > 0$ $G_{lt} < -1$ se $2f > s > f$ $-1 < G_{lt} < 0$ se $s > 2f$ $s < r/2: s' < 0$ e $ s' > s, G_{lt} > +1$	$s' < 0, 0 < G_{lt} < 1$	$s' = -s, G_{lt} = +1$

3.6 Superfici rifrangenti: diottro sferico

Consideriamo ora il caso di raggi emessi da una sorgente puntiforme che incidono su una superficie sferica che separa due mezzi con indici di rifrazione diversi n_1 e n_2 : ciascuno di questi raggi subisce una rifrazione e si propaga al di là della superficie secondo una direzione diversa da quella di incidenza.

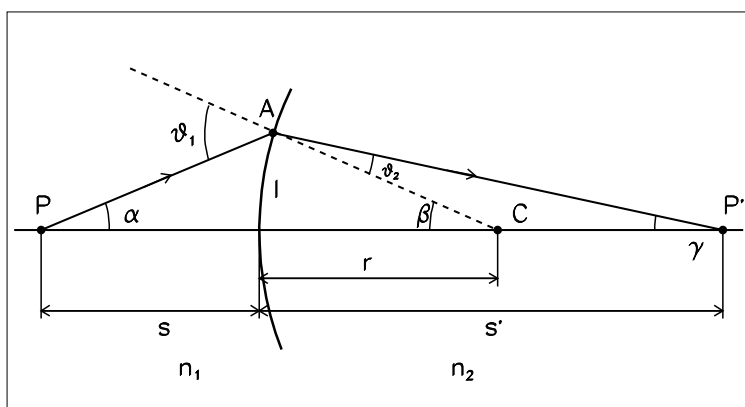


Figura 3.7:

Anche in questo caso i raggi parassiali convergono tutti in un punto posto dietro (davanti) la superficie che prende il nome immagine reale (virtuale). La formazione delle immagini per rifrazione su tale superficie può essere derivata considerando la figura 3.7: in essa $n_2 > n_1$ e pertanto la luce si propaga più lentamente nel secondo mezzo. Applicando ai raggi parassiali la seconda legge di Snellius–Descartes e le approssimazioni per i piccoli angoli si può dedurre un'equazione che fornisce la distanza dell'immagine a partire dalla distanza dell'oggetto, dal raggio di curvatura e dagli indici di rifrazione.

Nella figura viene considerato un raggio parassiale generico; gli angoli θ_1 e θ_2 sono legati dalla seconda legge di Descartes:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (3.9)$$

che nel caso di piccoli angoli diventa:

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \quad (3.10)$$

Dal triangolo ACP' si ottiene:

$$\beta = \theta_2 + \gamma = \frac{n_1}{n_2} \theta_1 + \gamma \quad (3.11)$$

e dal triangolo PAC:

$$\theta_1 = \alpha + \beta \quad (3.12)$$

Eliminando θ_1 si ottiene:

$$n_1 \alpha + n_2 \gamma = (n_2 - n_1) \beta \quad (3.13)$$

Usando le approssimazioni per i piccoli angoli, valide per raggi parassiali, $\alpha \sim l/s$, $\beta \sim l/r$, $\gamma \sim l/s'$, si ottiene:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (3.14)$$

che é nota come **formula di Gauss**. Nella rifrazione, le immagini reali si formano dietro la superficie rifrangente, nello **spazio di trasmissione**, mentre le immagini virtuali si formano davanti alla superficie rifrangente, nello **spazio di incidenza**. Le convenzioni per i segni usate per la rifrazione sono riportate nella tabella seguente.

s :	+ se l'oggetto é davanti la superficie (spazio di incidenza) - se l'oggetto é dietro la superficie (spazio di trasmissione)
s' :	+ se l'immagine é dietro la superficie (spazio di trasmissione) - se l'immagine é davanti la superficie (spazio di incidenza)
r, f :	+ se il centro di curvatura é nello spazio di trasmissione - se il centro di curvatura é nello spazio di incidenza

Confrontando queste convenzioni con quelle per la riflessione si puó osservare che s' , r , f sono positivi se l'immagine o il centro di curvatura si trovano nello spazio in cui si propagano la luce rifratta o riflessa rispettivamente.

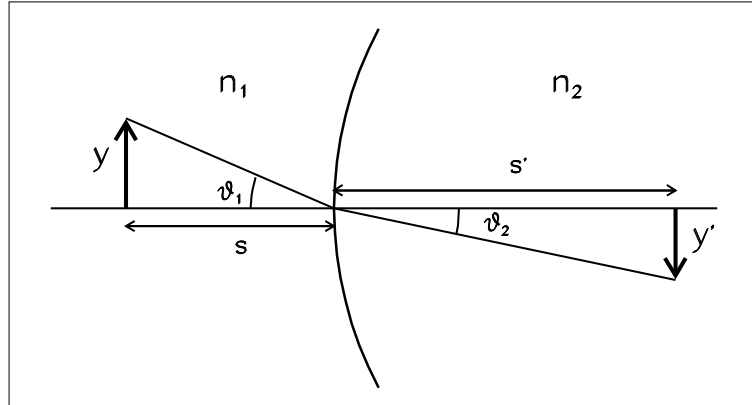


Figura 3.8:

Per l'ingrandimento lineare trasversale, consideriamo la figura 3.8: il raggio tracciato a partire dall'estremo superiore dell'oggetto nel mezzo 1 si rifrange nel mezzo 2 avvicinandosi alla normale dato che $n_2 > n_1$; vale sempre:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (3.15)$$

ma si vede anche che:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{y}{s} \quad (3.16)$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = -\frac{y'}{s'} \quad (3.17)$$

(notiamo che y' é negativa). Per piccoli angoli $\sin \alpha \sim \operatorname{tg} \alpha$ perciò la seconda legge di Snellius diventa:

$$n_1 \frac{y}{s} = n_2 \frac{-y'}{s'} \quad (3.18)$$

e per l'ingrandimento lineare trasversale:

$$G_{lt} = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \quad (3.19)$$

La formula (3.14) puó essere usata per calcolare la distanza apparente di un oggetto immerso in acqua ($n_1=1.33$) quando l'osservatore si trova

sulla verticale passante per l'oggetto ($n_2 = 1$). In questo caso la superficie rifrangente è piana ed ha perciò raggio di curvatura infinito; dalla (3.14) si ha allora:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = 0 \quad (3.20)$$

Perciò la profondità apparente risulta:

$$s' = -\frac{n_2}{n_1}s$$

Il segno negativo indica che l'immagine è virtuale e si forma dalla stessa parte della superficie rifrangente dove si trova l'oggetto. L'ingrandimento lineare è:

$$G_{lt} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = +1$$

La profondità apparente è uguale alla profondità reale divisa per l'indice di rifrazione dell'acqua e l'immagine mantiene le dimensioni dell'oggetto.

Esempio:

Un pesce è in una vaschetta sferica di vetro piena di acqua di indice di rifrazione 1.33. Il raggio della vaschetta è 15 cm. Il pesce guarda attraverso la vaschetta e vede un gatto accucciato sul tavolo con il naso a 10 cm dalla vaschetta. Dove si forma l'immagine del naso del gatto e quanto vale il suo ingrandimento lineare trasversale? Si trascuri ogni effetto della parete sottile di vetro della vaschetta.

La distanza dell'oggetto, misurata tra il gatto e la vaschetta, è 10 cm. Gli indici di rifrazione sono $n_1=1$ e $n_2=1.33$. Il raggio di curvatura è +15 cm. Quindi, per l'equazione (3.14), la distanza dell'immagine è:

$$\frac{1.00}{10 \text{ cm}} + \frac{1.33}{s'} = \frac{1.33 - 1.00}{15 \text{ cm}} \quad (3.21)$$

Risolvendo rispetto a s' , si ottiene:

$$s' = -17.1 \text{ cm} \quad (3.22)$$

Il fatto che la distanza dell'immagine è negativa significa che l'immagine è virtuale e si forma davanti alla superficie rifrangente, nello spazio in cui si trova l'oggetto.

L'ingrandimento lineare trasversale dell'immagine è:

$$G_{lt} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = -\frac{-17.1 \text{ cm}}{1.33 \cdot 10 \text{ cm}} = 1.29 \quad (3.23)$$

Perciò il gatto appare più lontano e un po' più grande

3.7 Lenti sottili

Le equazioni ottenute nel paragrafo precedente per il diottro sferico possono essere usate per determinare il percorso di un raggio parassiale attraverso varie superfici rifrangenti e ottenere così la posizione e le dimensioni dell'immagine di un oggetto formato da un sistema ottico. Un sistema ottico semplice e di particolare interesse è la **lente sottile**, cioè una successione di due diottri sferici. Per determinare la posizione dell'immagine prodotta da una lente sottile si considera separatamente la rifrazione a ciascuna superficie rifrangente per ottenere un'equazione che metta in relazione la distanza dell'immagine con quella dell'oggetto, i due raggi di curvatura e l'indice di rifrazione della lente (che si suppone normalmente immersa in aria, anche se, in generale, i mezzi a destra e a sinistra della lente avranno indici di rifrazione diversi).

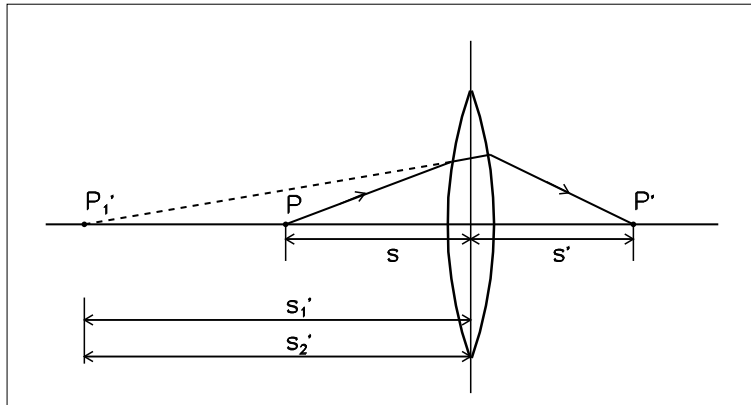


Figura 3.9:

Consideriamo la figura 3.9, in cui, come di solito, si considera un generico raggio parassiale emesso da una sorgente (oggetto) puntiforme posta sull'asse ottico di una lente molto sottile con indice di rifrazione n , immersa in aria, e con raggi di curvatura r_1 e r_2 . Se l'oggetto si trova a distanza s dalla prima superficie la distanza s'_1 dell'immagine P'_1 formata dalla rifrazione a questa è data da:

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'_1} = \frac{n-1}{r_1} \quad (3.24)$$

e risulta negativa, cioè l'immagine è virtuale e si trova nello spazio di incidenza del primo diottro. Questa immagine non si forma perché la luce viene

rifratta di nuovo alla seconda superficie ma diventa l'oggetto per la seconda rifrazione: i raggi rifratti dalla prima superficie incidono sulla seconda sotto gli stessi angoli sotto cui inciderebbero se ci fosse un oggetto in questo punto immagine. Dato che la lente ha spessore trascurabile la distanza dell'oggetto é uguale in valore assoluto a s'_1 ma é positiva, dato che si trova nello spazio di incidenza del secondo diottero: $s_2 = -s'_1$. Per la seconda superficie vale l'equazione:

$$\frac{n}{-s'_1} + \frac{1}{s'} = \frac{1-n}{r_2} \quad (3.25)$$

dalle (3.24) e (3.25) si ottiene:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.26)$$

La distanza focale di una lente sottile é per definizione la distanza a cui si viene a formare l'immagine quando l'oggetto é a distanza infinita; ponendo $s=\infty$ ed indicando con f la distanza dell'immagine s' , si ottiene:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (3.27)$$

che é detta **equazione dei fabbricanti di lenti**; sostituendo nella (3.26) si ha:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (3.28)$$

che é la **formula per le lenti sottili**. Anche nel caso della lente sottile tutti i raggi parassiali provenienti dal punto oggetto vengono fatti convergere nel punto immagine, se l'immagine é reale, o paiono divergere da esso, se l'immagine é virtuale.

Nel caso delle lenti la distanza dell'immagine s' é positiva se l'immagine si forma nello spazio di trasmissione della lente, cioé dalla parte opposta allo spazio di incidenza della luce; il raggio, come nel caso della rifrazione ad una singola superficie, é positivo se il centro di curvatura si trova nello spazio di trasmissione, negativo se si trova nello spazio di incidenza.

Poiché l'indice di rifrazione n é sempre maggiore di 1, nel caso di una **lente biconvessa** che é una lente **convergente** (vedi figura 3.10 sinistra) $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ e la distanza focale risulta positiva e la lente é detta

anche positiva. Ogni lente che é piú spessa al centro che al bordo é una lente convergente. Al contrario, una lente biconcava (vedi figura 3.10 destra), che é piu' sottile al centro che al bordo, é una lente **divergente**, $r_1 < 0$, $r_2 > 0$ e la distanza focale risulta negativa: la lente é detta anche negativa.

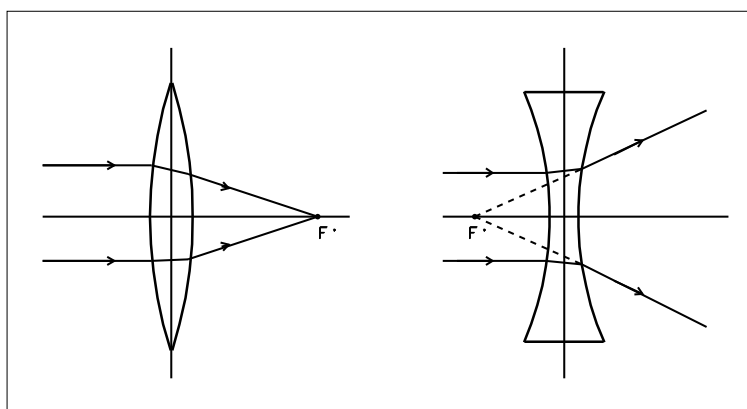


Figura 3.10:

Se si inverte la direzione orientata di propagazione della luce incidente sulla lente l'ordine delle superfici si inverte ma la distanza focale resta invariata. Se un fascio parallelo di luce incide sulla lente da sinistra esso viene fatto convergere in un punto posto ad una distanza pari ad f a destra della lente; se un fascio parallelo incide da destra esso viene fatto convergere in un punto posto ad una distanza pari ad f a sinistra della lente. Entrambi questi punti sono fuochi della lente.

Per l'invertibilitá del cammino luminoso la luce emergente da un fuoco e incidente sulla lente emergerá dalla lente sotto forma di un fascio parallelo. In particolare, se si specifica la direzione orientata di propagazione della luce, il punto oggetto per cui la luce emerge sotto forma di fascio parallelo é detto **primo fuoco** F e il punto in cui un fascio parallelo incidente viene fatto convergere é detto **secondo fuoco** della lente. Per una lente convergente il primo fuoco é nello spazio di incidenza, il secondo nello spazio di trasmissione; l'opposto vale per una lente divergente. Se il fascio parallelo incide sulla lente sotto un piccolo angolo con l'asse, esso viene fatto convergere in un punto giacente nel **piano focale**, posto a distanza f dalla lente e perpendicolare all'asse ottico.

3.8 Costruzione grafica delle immagini formate dalle lenti

Per localizzare le immagini formate dalle lenti conviene usare un metodo grafico (anche se e' piú approssimato). Si suppone che i raggi luminosi devino quando incontrano il piano centrale della lente sottile: come per gli specchi la costruzione viene data dalla intersezione dei raggi principali.

Lente convergente

I raggi principali per la lente convergente sono i seguenti:

1. il **raggio incidente parallelo all'asse** che emerge dalla lente passando per il secondo fuoco;
2. il **raggio incidente passante per il centro** che emerge dalla lente senza essere deviato (le facce della lente sono parallele in questo punto e il raggio pertanto emerge nella stessa direzione solo lievemente spostato);
3. il **raggio incidente passante per il primo fuoco** che emerge dalla lente parallelamente all'asse.

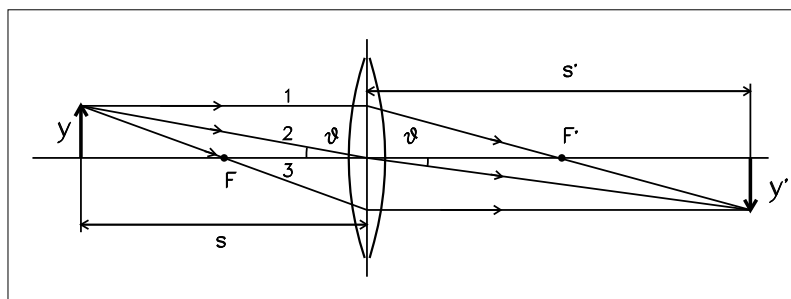


Figura 3.11:

I tre raggi convergono nel punto immagine, come illustrato in figura 3.11, che mostra un caso in cui l'immagine é capovolta. Dalla figura si può vedere che:

$$\operatorname{tg} \theta = y/s = -y'/s' \quad (3.29)$$

e perciò l'ingrandimento lineare trasversale risulta:

$$G_{lt} = y'/y = -s'/s \quad (3.30)$$

come per gli specchi.

Lente divergente

I raggi principali per la lente convergente sono i seguenti:

1. il **raggio incidente parallelo all'asse** che diverge dalla lente come se uscisse dal secondo fuoco;
2. il **raggio incidente passante per il centro** che emerge dalla lente senza essere deviato;
3. il **raggio incidente passante per il primo fuoco** che emerge dalla lente parallelamente all'asse.

La costruzione é illustrata in figura 3.12.

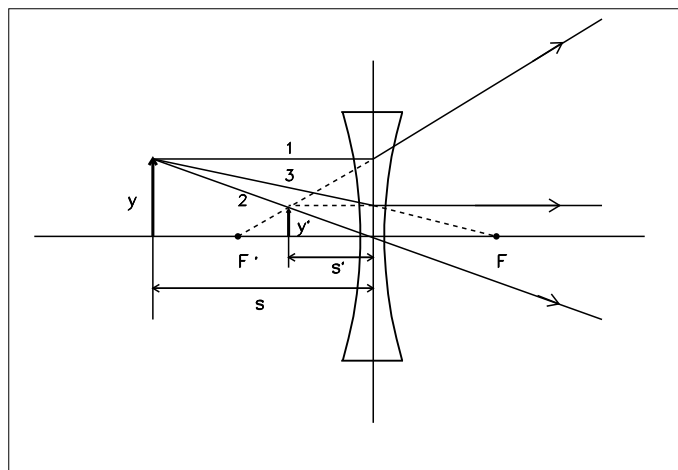


Figura 3.12:

3.9 Riassunto

Dalle formule (3.28) e (3.27), che riscriviamo qui come:

$$s' = -\frac{fs}{f-s} \quad (3.31)$$

$$G_{lt} = y'/y = -s'/s = \frac{f}{f-s} \quad (3.32)$$

si può ricavare per le immagini formate da lenti sottili la seguente tabella riassuntiva (si suppone che l'oggetto sia reale, cioè che sia $s > 0$):

lente convergente ($s < f$)	$s' < 0; s' > s$	$G_{lt} > +1$
lente convergente ($s > f$)	$s' > 0; s' > s$	$G_{lt} < -1$ se $2f > s > f$ $-1 < G_{lt} < 0$ se $s > 2f$
lente divergente	$s' < 0; s' < s$	$0 < G_{lt} < 1$

3.10 Esempi

1. L'occhio

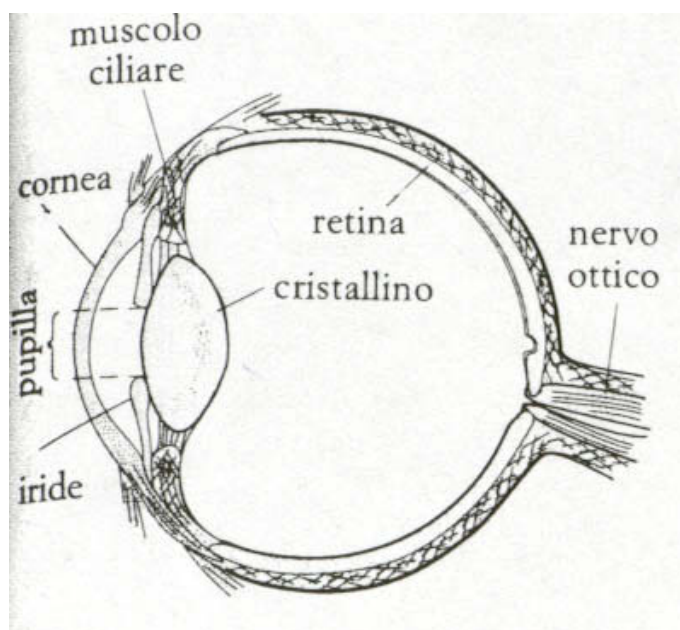


Figura 3.13:

La figura 3.13 rappresenta una sezione dell'occhio: la luce entra nell'occhio attraverso un'apertura variabile, la pupilla, e viene fatta convergere dal sistema ottico cornea-cristallino (lente convergente) sulla retina. La curvatura del cristallino può venire leggermente modificata dall'azione del muscolo ciliare; quando l'occhio osserva un oggetto lontano, il muscolo ciliare è rilassato e il sistema cornea-cristallino ha la massima lunghezza focale, pari a circa 2.5 cm, cioè la distanza tra la cornea e la retina. Se l'oggetto si avvicina il muscolo ciliare diminuisce leggermente il raggio di curvatura del cristallino (r_2) facendo pertanto diminuire la distanza focale in modo che l'immagine si formi ancora sulla retina (è il caso della riga 2 della tabella precedente). Questo processo è detto

accomodamento. Se l'oggetto é troppo vicino all'occhio, il cristallino non riesce piú a formare un'immagine nitida sulla retina e ne risulta un'immagine sfuocata. Il punto piú vicino di cui il cristallino riesce a formare un'immagine nitida sulla retina é detto **punto prossimo**; in condizioni di riposo l'occhio normale é accomodato all'infinito, ma esso puó senza fatica rimanere accomodato a lungo alla distanza di 25 cm, detta **distanza della visione distinta**.

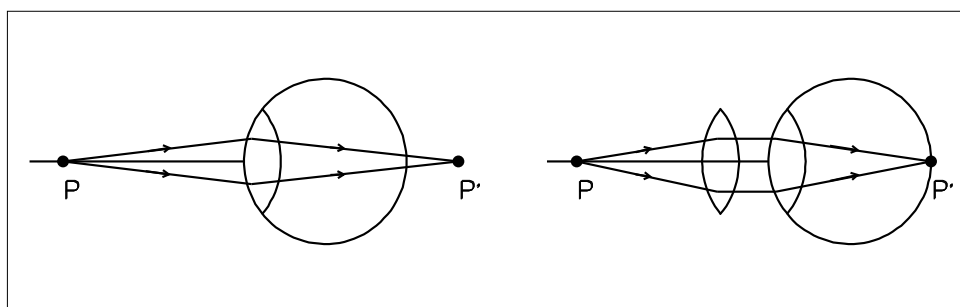


Figura 3.14:

Se la convergenza dell'occhio é insufficiente, le immagini degli oggetti vicini si formano dietro la retina e l'occhio é detto **ipermetrope**. Una persona ipermetrope é capace di vedere distintamente gli oggetti lontani, per la cui visione é richiesta una convergenza piccola, ma ha difficoltà nel vedere distintamente gli oggetti vicini. L'ipermetropia puó essere corretta con una lente convergente (vedi figura 3.14).

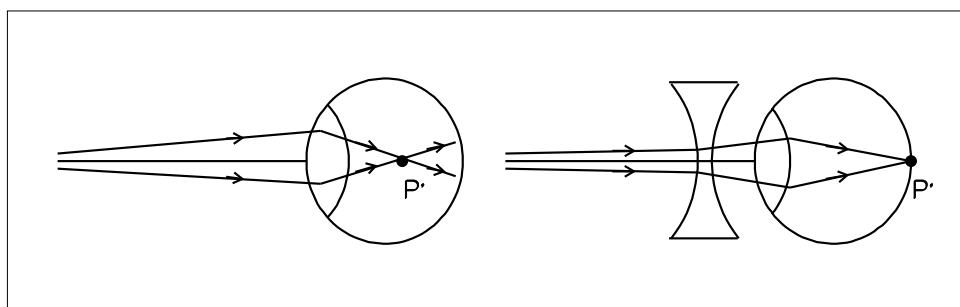


Figura 3.15:

Se, invece, la convergenza dell'occhio é eccessiva le immagini degli og-

getti lontani si formano davanti alla retina e l'occhio é **miope** (vedi figura 3.15); una persona miope vede, invece, distintamente gli oggetti vicini perché i raggi che escono con una grande divergenza possono essere fatti convergere sulla retina. La miopia si corregge con una lente divergente.

La grandezza apparente di un oggetto é determinata dalla grandezza dell'immagine sulla retina: questa é maggiore per un oggetto vicino che per uno lontano, come mostrato in figura 3.16; pertanto anche se l'altezza di un oggetto non varia, la sua grandezza apparente dipende dalla sua distanza dall'occhio. Una misura conveniente della grandezza dell'immagine sulla retina é l'angolo visuale θ sotto cui l'occhi vede l'oggetto:

$$\theta = \frac{y'}{2.5 \text{ cm}} \quad (3.33)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{s} \quad (3.34)$$

e perciò:

$$y' = (2,5 \text{ cm})\theta = (2,5 \text{ cm}) \frac{y}{s} \quad (3.35)$$

cioé l'altezza dell'immagine é direttamente proporzionale all'altezza dell'oggetto e inversamente proporzionale alla distanza tra l'oggetto e l'occhio

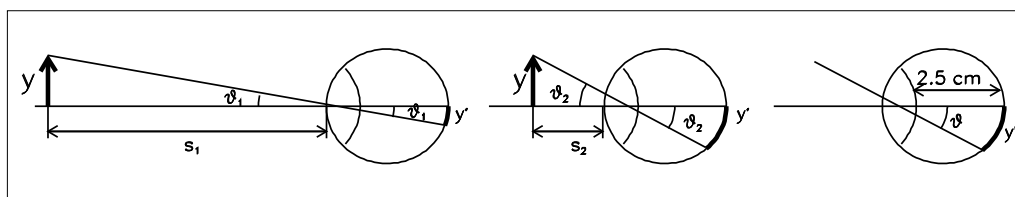


Figura 3.16:

2. La lente di ingrandimento

Per aumentare la grandezza apparente di un oggetto si può diminuire la sua distanza dall'occhio fino a portarlo più vicino del punto prossimo

usando una lente convergente che crei una immagine reale dell'oggetto ad una distanza infinita. Tale lente convergente é detta **lente di ingrandimento** o **microscopio semplice**. Il suo funzionamento é illustrato in figura 3.17: un oggetto di altezza y si trova nel punto prossimo dell'occhio, ad una distanza x_{pp} . L'altezza dell'immagine sulla retina é proporzionale all'angolo visuale θ_0 sotto cui l'occhio vede l'oggetto:

$$\theta_0 = \frac{y}{x_{pp}} \quad (3.36)$$

Se davanti all'occhio si pone una lente convergente con distanza focale f minore di x_{pp} ($s < f$ nella tabella riassuntiva) e l'oggetto viene posto nel fuoco della lente, i raggi che emergono dalla lente sono paralleli all'asse e pertanto l'immagine virtuale é a distanza infinita davanti alla lente; tali raggi vengono fatti convergere sulla retina dall'occhio rilassato. Se la lente é addossata all'occhio l'angolo visuale é ora:

$$\theta = \frac{y}{f} \quad (3.37)$$

Il rapporto θ/θ_0 é detto **ingrandimento visuale G_0** della lente:

$$G_0 = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{x_{pp}}{f} \quad (3.38)$$

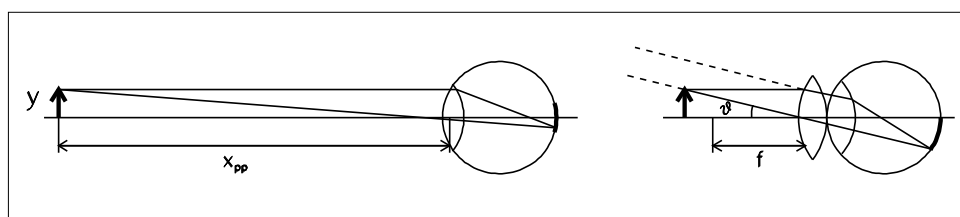


Figura 3.17:

3.11 Sistemi di lenti

Se si ha un sistema costituito da due o piú lenti, si puó localizzare l'immagine finale formata dal sistema trovando la distanza dell'immagine fornita dalla

prima lente e usandola insieme alla distanza tra le lenti per trovare la distanza dell'oggetto dalla seconda lente: si considera ogni immagine, reale o meno, come oggetto per la lente successiva.

Si considerino due lenti sottili, di distanze focali f_1 e f_2 , addossate. Si dimostri che la distanza focale equivalente del sistema, f , è data da:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (3.39)$$

Sia s la distanza dell'oggetto per la prima lente (e, perciò, per il sistema di lenti) e sia s'_1 la distanza dell'immagine. Applicando la formula delle lenti sottili alla prima lente, si ottiene:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'_1} = \frac{1}{f_1} \quad (3.40)$$

Poichè le due lenti sono addossate, la distanza dell'oggetto per la seconda lente è l'opposto della distanza dell'immagine formata dalla prima lente, cioè $s_2 = -s'_1$. Denotando con s' la distanza dell'immagine finale, si ottiene per la seconda lente:

$$\frac{1}{-s'_1} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_2} \quad (3.41)$$

Sommando membro a membro queste due equazioni per eliminare s'_1 , si ottiene:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} \quad (3.42)$$

Si può dunque concludere che quando due lenti sono addossate (o a breve distanza relativa), i reciproci delle loro distanze focali si sommano. Il reciproco della distanza focale è detto **potere diottrico** (o **potenza** o **vergenza**) **di una lente** (o di un sistema ottico in generale). Se la distanza focale è espressa in metri, il potere diottrico D è espresso in metri alla meno uno (m^{-1}), un'unità di misura chiamata **diottria** (D):

$$P = \frac{1}{f} \quad (3.43)$$

Il potere diottrico di una lente misura la sua capacità di far convergere un fascio parallelo di raggi luminosi in un punto a breve distanza dalla lente: minore è la distanza focale, maggiore è il potere diottrico. Per esempio, una lente avente la distanza focale di $25 \text{ cm} = 0.25 \text{ m}$ ha il potere diottrico di 4.0 D . Una lente avente la distanza focale di $10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$ ha il potere diottrico di 10 D . Poichè la distanza focale di una lente divergente è negativa, anche il potere diottrico è negativo. (La vergenza prende il nome di convergenza se positiva, di divergenza se negativa.)

3.12 Esempi

1. Il microscopio

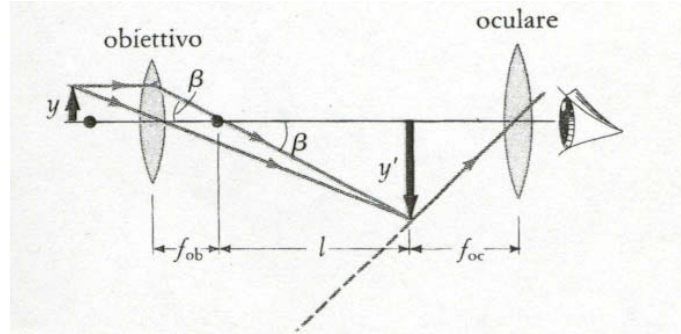


Figura 3.18:

Il microscopio é usato per osservare oggetti molto piccoli posti a distanze piccole. Nella sua forma piú semplice é costituito da due lenti convergenti (vedi figura 3.18): la lente piú vicina all'oggetto, detta **obiettivo**, forma un'immagine reale dell'oggetto che é ingrandita e capovolta ; la lente piú vicina all'occhio, detta **oculare**, é usata come lente di ingrandimento per osservare l'immagine dell'obiettivo. L'oculare é collocato in una posizione tale che l'immagine formata dall'obiettivo cada nel suo primo fuoco; cosí la luce emerge dall'oculare sotto forma di raggi paralleli, come se venissero "dall'infinito"; lo scopo dell'oculare é quello di permettere di vedere l'immagine ingrandita fornita dall'obiettivo nonostante che questa si trovi ad una distanza dall'occhio minore del punto prossimo. Siccome l'immagine data da una lente di ingrandimento, quale é l'oculare, é dritta, l'immagine finale formata dalle due lenti risulta capovolta. La distanza tra il secondo fuoco dell'obiettivo e il primo fuoco dell'oculare é detta **lunghezza ottica del tubo** l e il suo valore é tipicamente fissato a 16 cm. L'oggetto viene posto ad una distanza lievemente maggiore della distanza del primo fuoco dell'obiettivo in modo che si formi un'immagine ingrandita nel primo fuoco dell'oculare, alla distanza $l+f_{ob}$, dove f_{ob} é la distanza focale dell'obiettivo. Per l'ingrandimento lineare trasversale si ha:

$$tg \beta = \frac{y}{f_{ob}} = -\frac{y'}{l} \quad (3.44)$$

$$G_{lt,ob} = \frac{y'}{y} = -\frac{l}{f_{ob}} \quad (3.45)$$

L'ingrandimento visuale dell'oculare é:

$$G_{\theta,oc} = \frac{x_{pp}}{f_{oc}} \quad (3.46)$$

dove f_{oc} é la distanza focale dell'oculare e x_{pp} é la distanza del punto prossimo dell'occhio dell'osservatore. L'ingrandimento visuale del microscopio composto é dato da:

$$G_{\theta} = G_{\theta,ob} G_{lt,ob} = -\frac{x_{pp}}{f_{oc}} \frac{l}{f_{ob}} \quad (3.47)$$

2. Il telescopio

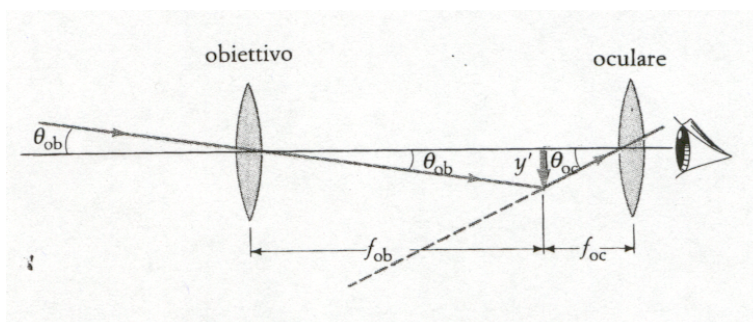


Figura 3.19:

Il telescopio (o cannocchiale) é usato per osservare oggetti molto lontani e spesso molto grandi. Il suo scopo é quello di avvicinare l'immagine dell'oggetto, cioè, di aumentare l'angolo visuale sotto cui l'occhio vede l'immagine in modo che l'oggetto appaia piú grande; é costituito da due lenti convergenti (vedi figura 3.19): un obiettivo che forma un'immagine reale capovolta e un oculare usato come lente di ingrandimento per osservare quell'immagine. Poiché l'oggetto é molto lontano, l'immagine formata dall'obiettivo giace nel suo fuoco ad una distanza f_{ob} ; siccome la distanza dell'oggetto é molto maggiore di f_{ob} , l'immagine é molto piú piccola: lo scopo dell'obiettivo non é, infatti, quello di ingrandire l'oggetto, ma di formare un'immagine tanto vicina da poter essere osservata con l'oculare. Questa immagine si trova nel secondo fuoco dell'obiettivo e nel primo fuoco dell'oculare per cui la distanza tra obiettivo ed oculare sara' $f_{ob}+f_{oc}$.

L'ingrandimento visuale del cannocchiale é dato da θ_{oc}/θ_{ob} . Siccome valgono le seguenti formule:

$$\operatorname{tg} \theta_{ob} = -\frac{y'}{f_{ob}} \quad (3.48)$$

$$\operatorname{tg} \theta_{oc} = \frac{y'}{f_{oc}} \quad (3.49)$$

si ha:

$$G_{\theta} = \frac{\theta_{oc}}{\theta_{ob}} = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} \quad (3.50)$$

da cui si vede che per avere un grande ingrandimento é necessario avere un obiettivo con una grande distanza focale ed un oculare con una piccola distanza focale.

3.13 Aberrazioni delle lenti

Se i raggi uscenti da un oggetto puntiforme non vengono fatti convergere tutti in un singolo punto immagine, la conseguente confusione dell'immagine é detta **aberrazione**.

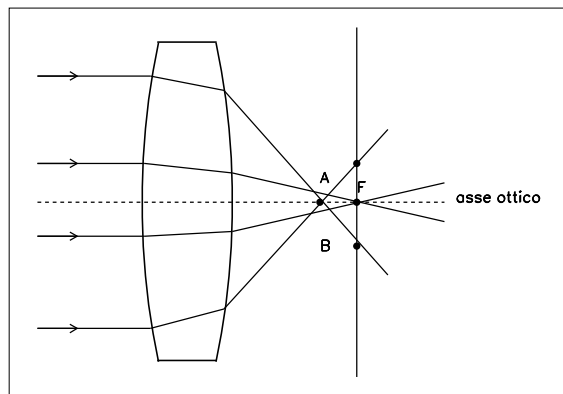


Figura 3.20:

Se si considerano dei raggi paralleli all'asse di una lente avente superfici sferiche, i raggi che incidono su di essa in punti lontani dall'asse

vengono deviati piú di quelli che incidono in punti vicini all'asse; pertanto, non passano per il fuoco definito per i raggi parassiali e, di conseguenza, non tutti i raggi vengono fatti convergere in un singolo punto, come illustrato in figura 3.20: al crescere delle distanza tra il raggio e l'asse, il raggio viene deviato troppo e la posizione A dell'intersezione del raggio rifratto con l'asse si allontana sempre piú dal fuoco parassiale F. Per un generico raggio la distanza AF misura la **aberrazione sferica longitudinale** mentre la distanza BF misura la **aberrazione sferica trasversale**. L'immagine di un punto luminoso, formata da una lente con aberrazione di sfericitá, appare come una macchia circolare luminosa circondata da un alone di luce. Questo macchia circolare ha il diametro minimo in un punto dove prende il nome di **cerchio di minima confusione**. Questo tipo di aberrazione é simile alla aberrazione di sfericitá degli specchi.

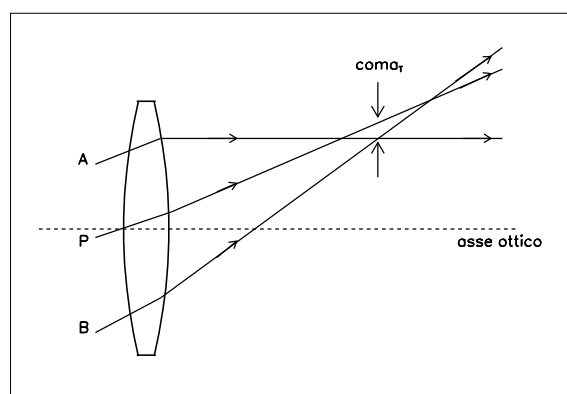


Figura 3.21:

Aberrazioni simili, ma piú complicate, dette **coma** e **astigmatismo** si hanno se gli oggetti sono fuori dell'asse. In particolare, si considerino, come indicato in figura 3.21, dei raggi tra di loro paralleli ma inclinati rispetto all'asse della lente: i raggi rifratti non si incontrano tutti nello stesso punto, come conseguenza della curvatura della lente, la cui superficie puó essere approssimata con un piano solo in zona parassiale. Siano A, B e P i raggi passanti per gli estremi ed il centro della lente: la distanza tra il raggio P e l'intersezione dei raggi rifratti A e B é il **coma tangenziale** della lente. L'immagine di un punto fuori asse, formata da una lente con coma, ricorda la forma di una cometa (da ciò il nome della aberrazione).

L'aberrazione della forma dell'immagine di un oggetto esteso do-

vuta al fatto che l'ingrandimento dipende dalla distanza del punto oggetto dall'asse prende il nome di **distorsione**.

Un'aberrazione importante, da cui sono affette le lenti ma non gli specchi, é l'**aberrazione cromatica**, che é dovuta alla variazione dell'indice di rifrazione al variare della lunghezza d'onda: la distanza focale di una lente dipenda dal suo indice di rifrazione e, perciò, é diversa per lunghezze d'onda diverse. Poiché n é lievemente maggiore per la luce blu che per la luce rossa, la distanza focale per la luce blu sará minore di quella per la luce rossa.