STATISTICA: CONCETTI E FORMULE UTILI

Ricordiamo alcune definizioni utili:

Sensibilita' di uno strumento: e' il minimo valore rilevabile con lo strumento
Risoluzione di uno strumento: e' il minimo intervallo di validita' di una misura rilevabile con lo strumento
Accuratezza: e' la capacita' di ottenere nella misura un valore prossimo al valore vero della grandezza
Precisione: e' il grado di esattezza con cui viene dato un risultato.

ERRORI

Quando si effettua una sola misura di una grandezza si assume il valore ottenuto come la migliore stima della grandezza e la risoluzione dello strumento come migliore stima dell'incertezza da cui la misura e' affetta.

Propagazione degli Errori per misure ripetute e singole

Se f e' una funzione delle variabili x, y, z, e gli errori con cui vengono misurate le variabili sono indipendenti, l'errore su f (misura indiretta) e' legato agli errori sulle misure di x, y, z dalla relazione:

$$\sigma_f=\sqrt{\left(\frac{(\partial f)}{(\partial x)}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{(\partial f)}{(\partial y)}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{(\partial f)}{(\partial z)}\right)^2\sigma_z^2}$$

valida nel caso in cui la misura delle grandezze sia ripetuta piu' volte.
In particolare:
Somma: f = x + y , $\sigma_f=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
Differenza: f = x - y , $\sigma_f=\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$
Prodotto: f = xy, $\frac{\sigma_f}{f}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$
Rapporto: f = y/x, $\frac{\sigma_f}{f}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2+\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$

Nel caso di misure singole, invece, si avra':

$$\sigma_f=\left|\frac{(\partial f)}{(\partial x)}\right|\sigma_x+\left|\frac{(\partial f)}{(\partial y)}\right|\sigma_y+\left|\frac{(\partial f)}{(\partial z)}\right|\sigma_z$$

In particolare:

Somma: f = x + y , $\sigma_f = \sigma_x + \sigma_y$

Differenza: f = x - y , $\sigma_f = \sigma_x + \sigma_y$

Prodotto: f = xy, $\frac{\sigma_f}{f} = \left|\frac{\sigma_x}{x}\right| + \left|\frac{\sigma_y}{y}\right|$

Rapporto: f = y/x, $\frac{\sigma_f}{f} = \left|\frac{\sigma_x}{x}\right| + \left|\frac{\sigma_y}{y}\right|$

Relazioni utili:

- f(x) = sin (x), $\sigma(f) = \cos(x)\sigma(x)$, $\frac{\sigma(f)}{f} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\sigma(x)$
- f(x) = cos (x), $\sigma(f) = -\sin(x)\sigma(x)$, $\frac{\sigma(f)}{f} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\sigma(x)$

- dalla legge della rifrazione tra aria e mezzo con indice di rifrazione n:

$$n = \frac{(\sin(\theta_i))}{(\sin(\theta_t))} \qquad \frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(\sin\theta_i)}{\sin\theta_i} + \frac{\sigma(\sin\theta_t)}{\sin\theta_t} = \frac{\cos\theta_i}{\sin\theta_i}\sigma(\theta_i) + \frac{\cos\theta_t}{\sin\theta_t}\sigma(\theta_t)$$

- dalla legge delle lenti sottili

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{(q+p)}{qp}$$

$$\sigma(f) = \left|\frac{(\partial f)}{(\partial p)}\right|\sigma(p) + \left|\frac{(\partial f)}{(\partial q)}\right|\sigma(q) = \left|\frac{(q(p+q) - pq)}{(q+p)^2}\right|\sigma(p) + \left|\frac{(p(p+q) - pq)}{(q+p)^2}\right|\sigma(q)$$

- **dalla legge della deviazione di una lamina ottica:**

$$D = t\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_2)} \qquad \sigma(D) = \left|\frac{\partial D}{\partial t}\right|\sigma(t) + \left|\frac{\partial D}{\partial \theta_1}\right|\sigma(\theta_1) + \left|\frac{\partial D}{\partial \theta_2}\right|\sigma(\theta_2)$$

$$\sigma(D) = \left|\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_2)}\right|\sigma(t) + \left|t\frac{\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_2)}\right|\sigma(\theta_1) + \left|t\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_2)}{\cos^2(\theta_2)}\right|\sigma(\theta_2)$$

REGRESSIONE LINEARE su N punti sperimentali

y = a + b x

$$\Delta = N(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2$$
$$a = \frac{((\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i))}{\Delta}$$
$$b = \frac{(N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i))}{\Delta}$$

Incertezze:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{(N-2)} \sum_{i=1}^{N} (y_i - a - b x_i)^2$$
$$\sigma_a^2 = \sigma_y^2 \frac{(\sum x_i^2)}{\Delta}$$
$$\sigma_b^2 = \frac{(N \sigma_y^2)}{\Delta}$$

Coefficiente di correlazione lineare

$$\rho = \frac{(\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

dove $\bar{x}$ e $\bar{y}$ rappresentano i valori medi delle grandezze x_i e y_i. Valori di ρ vicini a 1 o -1 indicano forte correlazione lineare; valor vicini a 0 indicano poca o nessuna correlazione tra le variabili x e y.

COMPATIBILITA' DEI RISULTATI (Test normale di confidenza)

Dopo aver effettuato la misura di una grandezza (in realta' occorrerebbe aver effettuato la misura molte volte in modo da avere una distribuzione di valori con un valor medio $\bar{x}$ ed una deviazione standard σ_x) volendo confrontare il valore ottenuto con il valore atteso, $x_{\exp}$, quale puo' essere quello ottenuto da molte misure precise effettuate con altri metodi o quello ottenuto da calcoli teorici, si deve calcolare la differenza: $|\bar{x} - x_{\exp}|$ e la si deve confrontare con la deviazione standard σ_x . Se

$$|\bar{x} - x_{\exp}| < 2\,\sigma_x$$

si ha una ragionevole discrepanza, cioe' si puo' ragionevolmente ritenere che il valore ottenuto nella misura appartenga alla distribuzione normale di cui $x_{\exp}$ e' il valor medio. Tale criterio fissa un limite del 5% per la irragionevole improbabilita', cioe', in base all'integrale normale degli errori, si sceglie come limite per la probabilita' di avere una discrepanza cosi' grande o maggiore tra il valore “vero” della grandezza, $x_{\exp}$, e quello ottenuto in una

ulteriore misura il valore del 5%, che corrisponde a 2σ .
Nel caso si debba verificare la compatibilita' tra due misure, si puo' applicare lo stesso criterio considerando pero' l'errore propagato sulla differenza tar I due valori misurati; I due valori saranno compatibili, percio', se:

$|x_1 - x_2| < 2(\sigma_{x1} + \sigma_{x2})$ ovvero se $|x_1 - x_2| < 2\sqrt{(\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2)}$