Parte III

Elementi di analisi dei circuiti elettrici

Capitolo 5

Analisi dei circuiti in corrente continua

Un circuito elettrico o elettronico é una rete di componenti attivi e passivi, variamente interconnessi per realizzare uno scopo utile.

Bisogna infatti notare che moltissime misure (fisiche e no) vengono oggi eseguite con l'uso di strumenti di tipo elettronico; il motivo é che oggi é relativamente facile realizzare delle *interfacce* fra il mondo delle grandezze fisiche (ad esempio meccaniche, termodinamiche ...) e non (chimiche, biologiche, ...) e quello dei segnali; queste interfacce si chiamano **trasduttori** (un esempio é la fotoresistenza utilizzata nell'esperienza di laboratorio sull'Ottica per misurare l'illuminamento di una sorgente luminosa). Il segnale elettrico prodotto dal trasduttore in risposta ad uno stimolo esterno deve di solito essere variamente manipolato (amplificato se é troppo piccolo per poter essere utilizzato, formato per poter essere trattato da altri strumenti elettronici, selezionato per distinguerlo dal fondo, ...) e questo é il compito del circuito elettronico.

I **componenti** sono elementi circuitali di diverso tipo, i quali concorrono a realizzare le funzioni desiderate del circuito considerato. Gli elementi **passivi** non sono in grado di *produrre* (piú correttamente, di *trasformare*) energia ma solo di dissiparla; gli elementi **attivi**, invece sono capaci di farlo.

Senza avere la pretesa di essere esaurienti, possiamo iniziare ad occuparci degli elementi di circuito piú importanti; essi verranno considerati nella loro forma ideale, ossia priva di tutte le caratteristiche accessorie che complicano la situazione reale.

5.1 Generatori di tensione e di corrente

Nell'analisi di ogni circuito ci sono due quantitá fondamentali la cui conoscenza, nel punto o nei punti considerati del circuito, é necessaria e sufficiente per descrivere il funzionamento dello stesso: la corrente e la tensione. Di seguito ricordiamo la definizione di queste ed altre grandezze fisiche importanti nello studio dei circuiti elettrici.

- **Carica elettrica** Esistono due tipi di cariche elettriche: cariche **positive**, come quella portata dai *protoni*, e cariche **negative**, come quella portata dagli *elettroni*. Ogni carica nel suo totale é sempre un multiplo intero di queste cariche fondamentali, che sono uguali in valore assoluto. É poi nota l'azione di repulsione tra cariche dello stesso segno e di attrazione tra cariche di segno opposto. In un circuito elettrico vale il principio della **conservazione della carica elettrica**: il bilancio delle cariche elettriche nel circuito rimane costante, la carica non si crea e non si distrugge. Il simbolo della grandezza é Q; nel sistema SI la carica si misura in *coulomb*, C: la carica di un elettrone, indicata con e, vale $e = -1.602 \cdot 10^{-19}\ C$ ed é l'opposto della carica del protone.

  In un atomo indisturbato il numero di elettroni é uguale a quello dei protoni e pertanto l'atomo risulta elettricamente neutro. Se un elettrone esterno riceve energia, per esempio sotto forma di calore, esso puó liberarsi dalla forza di attrazione dei protoni, diventando un *elettrone libero* e trasformando l'atomo in uno *ione positivo*. Se, invece, un atomo cattura un elettrone libero si trasforma in uno *ione negativo*

- **Corrente elettrica** La intensità di corrente in un punto del circuito é la quantitá di carica che transita per quel punto nell'unitá di tempo:

  $$I = \frac{dQ}{dt}$$

  Essa é pertanto conseguenza del moto di cariche elettriche. L'unitá SI di corrente é l'*ampere*, A, definito come la corrente prodotta da un flusso di carica di 1 C in un intervallo di tempo di 1 s:

  $$1\ A = \frac{1\ C}{1\ s}$$

  Alla corrente é sempre associata una direzione; per convenzione, il flusso di corrente ha sempre la direzione del movimento delle cariche positive, opposta a quella degli elettroni. Nei solidi solo gli elettroni sono liberi di muoversi e di generare un flusso di corrente; nei gas e nei liquidi, invece, anche gli ioni possono muoversi e contribuire alla corrente. I circuiti elettrici sono quasi sempre costituiti da solidi e il flusso di corrente é quasi sempre prodotto dai soli elettroni. In un diagramma circuitale ad ogni corrente é sempre associata una freccia che indica la *direzione di riferimento della corrente positiva*; se, dopo i calcoli, il valore della corrente risulta negativo, ció indica che il flusso della carica positiva va nella direzione opposta a quella ipotizzata.

Una corrente che scorre sempre nella stessa direzione ed il cui valore é costante nel tempo si dice **corrente continua**; una corrente il cui flusso varia in verso e valore sinusoidalmente nel tempo é detta **corrente alternata**.

Per **generatore di corrente** si intende un elemento di circuito che fa scorrere attraverso sè stesso una data corrente; esso è un elemento attivo. Il simbolo circuitale é riportato in figura 5.1. Un **generatore ideale di corrente** é, invece, un caso limite concettuale e indica un generatore che eroga la sua corrente fra i morsetti, costante o variabile nel tempo, **indipendentemente dalla tensione che si sviluppa** e cioé **indipendentemente dal carico collegato**.

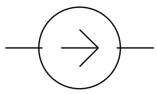


Figura 5.1:

- **Tensione** Il concetto di tensione implica quello di lavoro (misurato in joule, J, nel SI): la tensione tra due punti A e B nello spazio é la differenza di potenziale elettrico fra i due punti e rappresenta il lavoro compiuto dal campo elettrico per spostare una carica positiva di 1 C tra i due punti stessi. L'unitá SI della tensione é il Volt, V:

  $$1\ V \ = \ \frac{1\ J}{1\ C}$$

  Il simbolo della grandezza, V, é talvolta dotato di indici per specificare i punti tra i quali esiste la differenza di potenziale in oggetto. Se il campo elettrico per spostare la carica unitaria positiva dal punto A al punto B (ovvero la carica unitaria negativa dal punto B al punto A) compie del lavoro, il punto A sará a potenziale positivo rispetto al punto B, $V_{AB} \ = \ V_A \ - \ V_B \ > \ 0$, e si avrá una **caduta di potenziale** tra A ed B, mentre se per spostare la carica unitaria positiva dal punto A al punto B é necessario compiere del lavoro contro il campo elettrico $V_{AB} = V_A - V_B < 0$ e si avrá una **salita di potenziale** tra A e B. Se dopo i calcoli V_{AB} risulta positivo, allora il punto A é effettivamente ad un potenziale piú alto del punto B.

Una tensione costante nel tempo viene detta **tensione continua** (DC); una tensione che varia sinusoidalmente nel tempo viene detta **tensione alternata** (AC). Un generatore di tensione é un elemento attivo di circuito che produce fra i suoi estremi una data differenza di potenziale; il simbolo circuitale del generatore di tensione continua é riportato in figura 5.2. Un **generatore ideale di tensione** é, ancora, un caso limite concettuale e indica un generatore che fornisce la sua tensione ai morsetti, costante o variabile nel tempo, **indipendentemente dalla corrente che deve erogare** e cioé **indipendentemente dal carico collegato**.

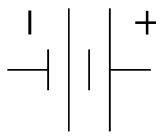


Figura 5.2:

- **Potenza** La potenza é l'energia prodotta da un generatore o assorbita da un carico nell'unitá di tempo. Il suo simbolo é P; nel SI si misura in Watt, W:

$$1\ W = \frac{1\ J}{1\ s} = 1\ V \cdot 1\ A$$

.

5.2 Resistenza

5.2.1 Legge di Ohm

Gli elettroni liberi che scorrono entro un conduttore collidono con gli atomi di questo perdendo parte della loro energia cinetica che viene trasformata in calore. La tensione applicata dona loro nuova energia cinetica che viene di nuovo persa in collisioni successive. Questo alternarsi di continue accelerazioni e decelerazioni produce come effetto un moto medio degli elettroni con velocitá costante, cioé una corrente costante nel tempo, se la tensione applicata é a sua volta costante nel tempo ovvero un moto con dipendenza temporale che rispecchia l'andamento della tensione se questa varia.

La **resistenza** é la proprietá per cui i materiali si oppongono, o resistono, al moto degli elettroni, rendendo necessaria l'applicazione di una tensione per far scorrere la corrente. Il simbolo della grandezza é R e l'unitá di misura SI é l'*ohm*, Ω. Sia per i conduttori metallici che per conduttori di altri tipi esiste una proporzionalitá diretta tra la corrente che li attraversa e la tensione applicata ai loro capi:

$$I\ (A) \ = \ \frac{V\ (V)}{R\ (\Omega)}$$

in cui R é la costante di proporzionalitá. Questa relazione costituisce la **legge di Ohm**; da essa si ricava che, piú grande é la resistenza, minore é la corrente per una certa tensione applicata. Se una tensione di 1 V fa scorrere nel conduttore 1 A di corrente, la resistenza elettrica di questo é pari ad 1 Ω:

$$1\ A \ = \ \frac{1\ V}{1\ \Omega}$$

Spesso é utile riferirsi all'inverso della resistenza, cioé alla **conduttanza**, G:

$$G \ = \ \frac{1}{R}$$

la cui unitá di misura nel SI é il *siemens*, S. In termini di conduttanza la legge di Ohm diventa:

$$I\ (A) \ = \ G\ (S) \ \cdot \ V\ (V)$$

da cui si vede che maggiore é la conduttanza di un conduttore e maggiore é la corrente che lo percorre per una data tensione.

5.2.2 Resistivitá

La resistenza di un conduttore di sezione uniforme, mantenuto ad una certa temperatura, é direttamente proporzionale alla lunghezza l del suddetto e inversamente proporzionale all'area della sua sezione s, qualunque sia la forma:

$$R \ = \ \rho\ \frac{l}{s}$$

in cui l é espresso in metri, la sezione s in metri quadri e la costante di proporzionalitá ρ é la **resistivitá** caratteristica del materiale di cui é fatto il conduttore, misurata in $\Omega \ \cdot \ m$ nel SI.

I materiali conduttori vengono classificati, in base al valore della loro resistivitá, come *buoni conduttori* o semplicemente *conduttori* se $\rho \approx 10^{-8}\ \Omega \cdot m$, come per l'argento, il rame e l'alluminio, *cattivi conduttori* o *isolanti* se $\rho \approx 10^{10}\ \Omega \cdot m$, come per il vetro, la ceralacca e il quarzo, semiconduttori per valori intermedi di ρ, come per il germanio e il silicio. Nella tabella 5.1 sono riportati i valori di resistivitá per alcuni materiali.

Materiale	Resistività (W m a 20° C)	Materiale	Resistività (W m a 20° C)
Argento	1.64×10^{-8}	Nichel-Cromo	100×10^{-8}
Rame, ricotto	1.72×10^{-8}	Silicio	2500
Alluminio	2.83×10^{-8}	Carta	10^{10}
Ferro	12.3×10^{-8}	Mica	5×10^{11}
Costantana	49×10^{-8}	Quarzo	10^{17}

Tabella 5.1:

La relazione tra conduttanza G, lunghezza l ad area della sezione s é:

$$G = \sigma \frac{s}{l}$$

in cui la costante di proporzionalitá σ é la **conduttivitá** del materiale, misurata in S m^{-1} nel SI.

5.2.3 Effetti della temperatura

La resistenza (ovvero la resistivitá) della maggior parte dei materiali buoni conduttori cresce quasi linearmente con la temperatura, nel campo di normale funzionamento, come indicato nella figura 5.3 per il rame. Vi sono, invece, altri materiali, come i semiconduttori, sulla cui resistivitá la temperatura produce l'effetto opposto. Se la porzione rettilinea della curva viene prolungata fino all'asse delle ascisse, lo interseca in un punto T_0 in cui la resistenza appare uguale a zero. Questa T_0 é la cosiddetta *temperatura estrapolata a resistenza zero*. L'effettiva temperatura di resistenza zero é 0 K. Se é nota T_0, insieme alla resistenza R_1 ad un'altra temperatura T_1, la resistenza R_2 ad una temperatura T_2, sempre compresa nella zona lineare della curva, potrá essere calcolata come:

$$R_2 = \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0} R_1$$

In modo equivalente, la resistenza R_2 é data da:

$$R_2 = R_1 \left[1 + \alpha_1 \left(T_2 - T_1\right)\right]$$

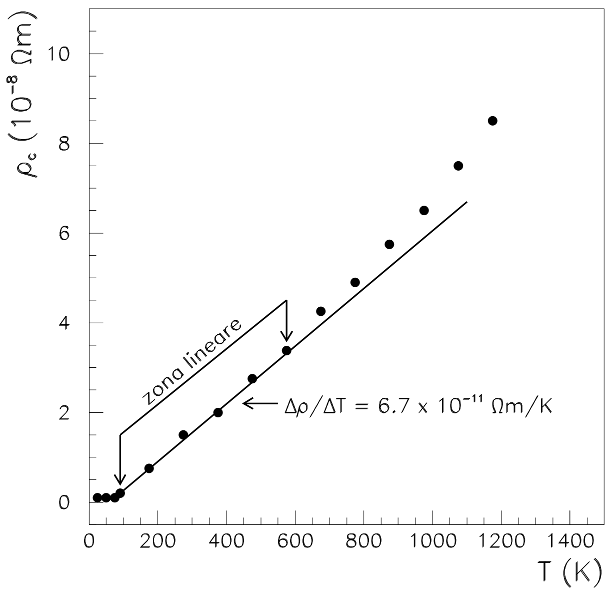


Figura 5.3:

Materiale	α_1: coefficiente di temperatura (°C^{-1} a 20°C)
Tungsteno	0.0045
Rame	0.00393
Alluminio	0.00391
Argento	0.0038
Costantana	0.000008
Carbone	-0.0005

Tabella 5.2:

in cui α_1 é il *coefficiente termico della resistenza* alla temperatura T_1 e nel SI si misura in $°C^{-1}$ o in K^{-1}. Nella tabella 5.2 sono riportati i valori di α_1 a 20°C per i materiali conduttori piú comuni.

Per alcuni metalli, come Hg, Sn, Pb, infine, se la temperatura scende sotto un certo valore critico T_C (4.17 K per Hg, 3.72 K per Sn, 7.26 K per Pb) la resistivitá cade bruscamente ad un valore circa 10^{12} volte piú piccolo di quello a 0°C: questo fenomeno prende il nome di **superconduttività**.

5.2.4 Resistori

In pratica un **resistore** é un elemento di circuito dotato di resistenza, per il quale vale una relazione lineare tra tensione istantanea e corrente istantanea data dalla legge di Ohm (*resistore lineare*). Elementi di circuito dotati di resistenza non costante, come i diodi, vengono detti *resistori non lineari o non ohmici.* Nella figura 1.4 é riportato il simbolo circuitale del resistore lineare.

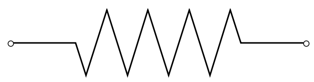


Figura 5.4:

Un resistore è un elemento passivo del circuito in quanto esso non è in grado nè di far scorrere corrente attraverso di sè, nè di generare una differenza di potenziale ai suoi capi, ma solo di dissipare l'energia posseduta dalla corrente che lo attraversa. Se nella relazione che esprime la potenza in funzione della tensione e della corrente sostituiamo la legge di Ohm, ricaviamo la potenza assorbita da un resistore lineare:

$$P = V\ I = \frac{V^2}{R} = I^2\ R$$

L'energia corrispondente a questa potenza viene dissipata sotto forma calore mediante un processo che prende il nome di *effetto Joule.* Ogni resistore ha una *limitazione di potenza* o *wattaggio* che indica la massima potenza che esso puó assorbire senza surriscaldarsi fino a temperatura distruttiva.

Il valore della resistenza viene indicato dal produttore su ogni componente con un *codice di colori* dedicato. Questo valore é il *valore nominale* che é solo approssimativamente uguale al valore effettivo. La possibile variazione percentuale della resistenza rispetto al valore nominale si dice *tolleranza.* Il codice di colori piú usato indica il valore nominale della resistenza e la relativa tolleranza con quattro o cinque (sei) bande colorate attorno all'involucro della resistenza, secondo una codifica che è riportata sugli appositi fogli esposti in Laboratorio o nel file *codicecoloribis.pdf* scaricabile a parte.

5.2.5 Circuiti aperti e cortocircuiti

Un *circuito aperto* equivale ad una resistenza infinita, quindi per qualsiasi tensione finita applicata ai suoi capi é attraversato da corrente nulla. Negli schemi circuitali é indicato con due terminali che non sono connessi a niente.

Un *cortocircuito* é l'opposto del circuito aperto ed equivale a resistenza nulla: qualunque sia la corrente finita che lo attraversa, la tensione ai suoi capi é zero. Negli schemi circuitali é indicato con un filo conduttore ideale, privo di resistenza.

5.2.6 Terminologia

Termini usati per indicare strutture circuitali sono i seguenti:

- **Ramo** Nel senso piú restrittivo del termine, per ramo di un circuito s'intende il componente singolo, attivo (generatore) o passivo (resistore). Il termine si applica, in genere, per indicare una disposizione di componenti attraversati dalla stessa corrente, specie quando sono di un solo tipo.

- **Nodo** É il punto di collegamento di due o piú rami; sul diagramma circuitale si indica con un punto, che si puó considerare come un punto di saldatura reale nel circuito. Il nodo comprende anche i fili connessi al punto, comprende cioé tutti i punti che si trovano allo stesso potenziale. Se un corto circuito mette in contatto due nodi, questi sono effettivamente equivalenti ad un solo nodo, anche se sul diagramma si vedono due punti.

- **Anello** Un anello é un qualunque insieme di rami che formano un cammino chiuso all'interno del circuito.

- **Maglia** La maglia é un anello che non comprende al suo interno alcun cammino chiuso, ovvero nessun componente.

Si consideri l'applicazione 1 al termine del capitolo come esempio.

5.3 Composizione di resistori

I componenti spesso vengono inseriti nei circuiti in varie combinazioni; nell'analizzare i circuiti é utile sostituire la combinazione di componenti dello stesso tipo con un singolo *componente equivalente* tale che, quando venga sostituito alla combinazione di componenti, i valori di correnti e tensioni nel resto del circuito restino invariati.

Due o piú componenti di un circuito sono **collegati in serie** quando vengono tutti percorsi dalla stessa corrente, cioé quando si trovano nello stesso ramo; nel caso di soli resistori si parla allora di **resistori in serie** o piú semplicemente di **resistenze in serie**. Un esempio é riportato

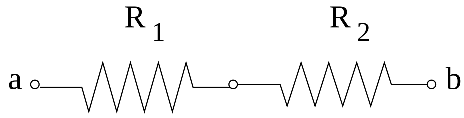


Figura 5.5:

in figura 5.5. Si supponga che una tensione V sia applicata tra i punti a e b della figura. Una corrente i si stabilisce nella combinazione ed in ciascun resistore; le differenze di potenziale sui resistori, per la legge di Ohm, sono:

$$V_1 \; = \; i \; R_1 \qquad \text{e} \qquad V_2 \; = \; i \; R_2$$

La somma di queste differenze di potenziale deve essere uguale alla tensione applicata tra i punti a e b, cioé:

$$V \; = \; V_1 \; + \; V_2$$

Se si sostituisse la combinazione con la sua resistenza equivalente, R_{eq}, scorrerebbe la stessa corrente i, per cui:

$$V \; = \; i \; R_{eq}$$

Combinando queste equazioni si ottiene:

$$i \; R_{eq} \; = \; i \; R_1 \; + \; i \; R_2$$

e perció

$$R_{eq} \; = \; R_1 \; + \; R_2$$

Estendendo questo risultato ad una combinazione in serie di un numero qualsiasi di resistori, si ottiene:

$$R_{eq} \; = \; \sum_n \; R_n$$

cioé per trovare la resistenza equivalente di una combinazione in serie si calcola la somma delle singole resistenze; la resistenza equivalente é perció sempre *piú grande* della piú grande delle resistenze della serie e perció aggiungendo piú resistori in serie si ottiene una minor corrente per una assegnata differenza di potenziale.

Nel caso di resistori in serie é utile la *regola del partitore di tensione*, che fornisce la tensione ai capi di ogni resistore della serie in funzione dei valori di tutte le resistenze e della tensione applicata ai capi della combinazione. Applicando la legge di Ohm ad una serie di un numero qualsiasi di resistori con resistenza totale R_T a cui venga applicata una tensione V, la corrente circolante risulta $i = V/R_T$; la tensione V_X ai capi della resistenza R_X della serie sará allora data da:

$$V_X = \frac{R_X}{R_T} V$$

Bisogna notare che le due tensioni V e V_X rappresentano l'una una salita di potenziale, prodotta per esempio da un generatore di tensione, e l'altra una caduta di potenziale su una resistenza.

Due o piú componenti sono **collegati in parallelo** quando tra gli estremi di tutti si ha la stessa differenza di potenziale, cioé quando sono compresi tra gli stessi due nodi; nel caso di resistori si parla di **resistori in parallelo** o semplicemente di **resistenze in parallelo**. Un esempio é dato in figura 5.6. Se tra i punti a e b della figura si applica una tensione V, la

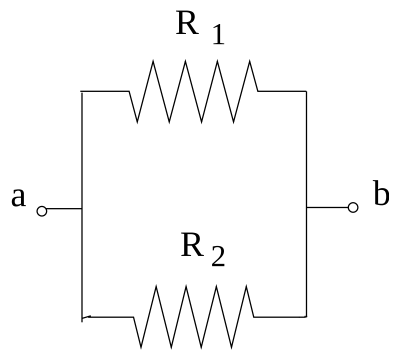


Figura 5.6:

differenza di potenziale su ciascun resistore é V. In base alla legge di Ohm, le correnti che attraversano ciascun resistore sono:

$$i_1 = V/R_1 \qquad \text{e} \qquad i_2 = V/R_2$$

La corrente totale i, allora, sará suddivisa tra i due resistori, per cui

$$i = i_1 + i_2$$

Se sostituiamo la rete di resistori collegati in parallelo con una singola resistenza equivalente R_{eq}, attraverso essa scorre la stessa corrente totale i. La corrente é allora:

$$i = V/R_{eq}$$

Dalle ultime tre equazioni si ricava allora:

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

cioé

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

La resistenza equivalente di una combinazione in parallelo di un numero qualsiasi di resistori sará allora:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_n \frac{1}{R_n}$$

Si noti che R_{eq} é sempre *piú piccola* della piú piccola resistenza in parallelo; offrendo piú cammini in parallelo alla corrente si ottiene una corrente maggiore per una assegnata differenza di potenziale. Nel caso di due resistori in parallelo la resistenza equivalente risulta:

$$R_{eq} = \frac{R_1\ R_2}{R_1 + R_2}$$

e nel caso in cui le due resistenze siano uguali $R_1 = R_2 = R$ si ha $R_{eq} = R/2$; se, invece, $R_1 >> R_2$ si ha $R_{eq} \simeq \frac{R_1 R_2}{R_1} = R_2$.

Si puó osservare che nel caso di resistori in serie si sommano le resistenze nel caso di conduttori in parallelo si sommano le conduttanze: $G_{eq} = G_1 + G_2$. Per resistori in parallelo vale la *regola del partitore di corrente*, che fornisce, per ogni resistore di conduttanza G_X, la corrente che lo percorre i_X in funzione della conduttanza totale G_T e della corrente totale i nella combinazione di resistori:

$$i_X = \frac{G_X}{G_T}\ i$$

Bisogna notare che le due correnti i_X e i sono rispettivamente una uscente e l'altra entrante nel primo nodo del parallelo considerato. Nel caso di due sole resistenze in parallelo si ha:

$$i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2}\ i = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\ i$$

$$i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2}\ i = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\ i$$

Si vedano le applicazioni 2, 3 e 4 al termine del capitolo.

5.4 Misure di tensione e di corrente

Dalle definizioni di combinazione in serie ed in parallelo di componenti di un circuito elettrico risulta evidente che se si vuole misurare la corrente che fluisce in una certa parte del circuito sará necessario porre il misuratore di corrente (*galvanometro* per correnti massime dell'ordine del μA, *amperometro* per correnti piú intense) **in serie** ai componenti che sono attraversati dalla corrente in oggetto; la disposizione é indicata nella figura 5.7, dove il circuito é costituito semplicemente da un generatore di tensione chiuso su due resistori composti in serie.

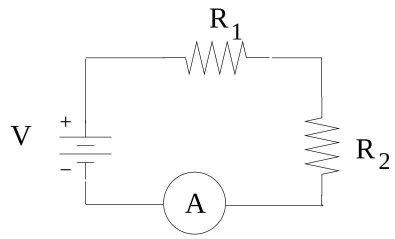


Figura 5.7:

Per effettuare una misura accurata sará necessario che la resistenza interna dell'amperometro sia il piú possibile piccola, onde modificare il meno possibile il valore della corrente; infatti la corrente che attraverserá lo strumento di misura, ovvero la corrente misurata i_{mis}, risulterá essere data dal rapporto tra la tensione applicata ai capi della serie e la resistenza equiva-lente, pari alla somma delle resistenze dei componenti, $R_T = R_1 + R_2$, piú quella dell'amperometro, R_{in}:

$$i_{mis} \;=\; \frac{V}{R_T \;+\; R_{in}}$$

La differenza tra i_{mis} ed il valore della corrente del circuito in assenza dell'amperometro, $i \;=\; \frac{V}{R_T}$ é l'errore sistematico da cui risulta affetta la misura.

Se poi é necessario misurare correnti maggiori della portata dell'amperometro é possibile estendere il campo di misura mettendo in parallelo allo strumento una resistenza (*shunt*) che stia in rapporto noto con la resistenza interna dell'amperometro, come indicato in figura 5.8.

La corrente che passa nell'amperometro, i_1, in base alla regola del partitore di corrente, sará:

$$i_1 \;=\; \frac{R}{R \;+\; R_{in}}\; i$$

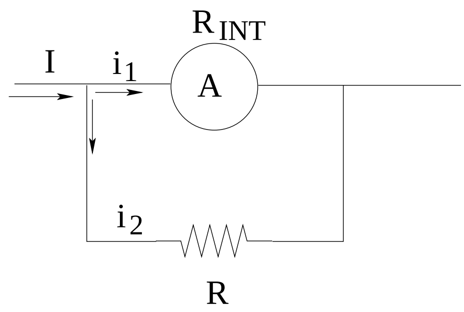


Figura 5.8:

e risulterá pertanto molto inferiore alla corrente che entra nella combinazione in parallelo, i, se R é molto piú piccola di R_{in}; scegliendo opportunamente il valore di R sará possibile limitare la corrente che attraversa lo strumento evitandone il danneggiamento.

Invece, se si vuole misurare la differenza di potenziale ai capi di un componente, per esempio di un resistore R, sará necessario porre il misuratore di tensione (detto *voltmetro*) **in parallelo** al componente, come indicato nella figura 5.9.

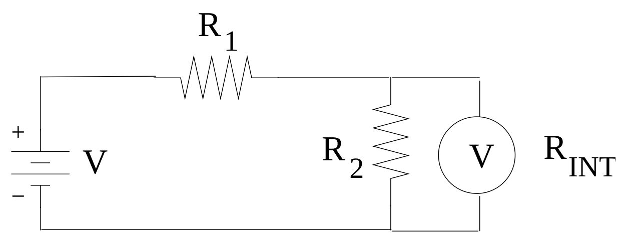


Figura 5.9:

In questo caso, per modificare il meno possibile la tensione con l'introduzione del voltmetro sará necessario che la resistenza interna di quest'ultimo, R_{in}, sia molto grossa: infatti, poiché esso viene inserito in parallelo alla resistenza R, la resistenza equivalente risulterá:

$$R_{eq} \;=\; R_1 \;+\; \frac{R_2 \; R_{in}}{R_2 \;+\; R_{in}}$$

e pertanto la differenza di potenziale misurata, $V_{2\ mis}$ sará:

$$V_{2\ mis} = V \frac{\frac{R_2\ R_{in}}{R_2\ +\ R_{in}}}{R_{eq}}$$

mentre quella reale, in assenza del voltmetro é:

$$V_2 = V \frac{R_2}{R_1\ +\ R_2}$$

che é tanto meglio approssimata dal valore misurato quanto piú R_{eq} é prossima a R_2, ossia quanto piú R_{in} é maggiore di R_2.

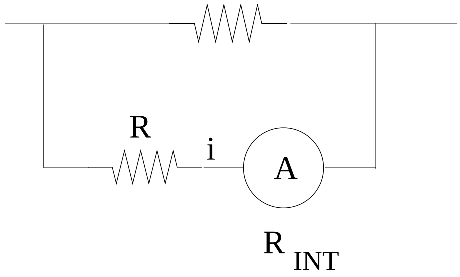


Figura 5.10:

Un amperometro puó essere usato come voltmetro mettendo una resistenza opportunamente grande in serie allo strumento in modo da limitare la corrente che lo attraversa, come indicato in figura 5.10. La tensione misurata sará data da:

$$V = i \cdot (R + R_{in})$$

Il voltmetro cosí ottenuto avrá resistenza interna pari a $R_{in}\ +\ R$ e andrá messo in parallelo al componente o ai componenti ai capi dei quali si vuole misurare la tensione, come indicato nella figura.

In maniera analoga, un voltmetro puó essere usato come amperometro mettendolo in parallelo ad una resistenza nota, sufficientemente piccola, e mettendo il tutto in serie al tratto di circuito di cui si vuole misurare la corrente. In tal caso la corrente sará data dal rapporto tra la tensione letta dal voltmetro, V, e la resistenza equivalente del parallelo, che risulterá essere anche la resistenza interna dello strumento.

Infine, per misurare direttamente una resistenza si deve fare il rapporto tra la differenza di potenziale ai suoi capi e la corrente che la percorre. Esistono vari tipi di misuratori di resistenza, *ohmetri*, ma i piú comuni sono gli *ohmetri amperometrici*, nei quali una differenza di potenziale nota viene applicata alla resistenza considerata e viene misurata la corrente risultante.

5.5 Generatori reali di tensione e di corrente

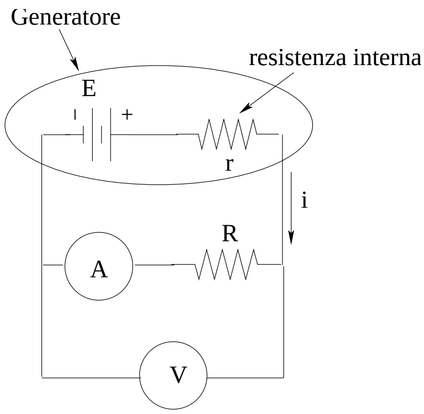


Figura 5.11:

La forza elettromotrice (f.e.m.) di un generatore é la differenza di potenziale (d.d.p.) che esiste tra i suoi poli a circuito aperto, cioé quando il generatore non eroga corrente.

Consideriamo un generatore di f.e.m. E chiuso su una resistenza R (comprensiva della resistenza interna dell'amperometro inserito nel circuito), come mostrato nella figura 5.11. Sperimentalmente si verifica che l'intensitá di corrente é inferiore a E/R, ovvero che la d.d.p. ΔV ai capi della resistenza R, che é uguale alla tensione tra i morsetti del generatore mentre questo eroga corrente, é minore della f.e.m. E. Se si varia la resistenza R cambia l'intensitá della corrente i: la d.d.p. ΔV varia linearmente con i e tende a E quando i tende a zero; vale cioé la relazione:

$$\Delta V = E - ir$$

dove r é una costante caratteristica del generatore chiamata **resistenza interna**; la quantitá ir viene detta **caduta di tensione interna**.

La d.d.p. ai morsetti di un generatore che non eroga corrente é la f.e.m. E; la d.d.p. ai morsetti di un generatore che eroga corrente é uguale alla f.e.m. E diminuita della caduta interna.

Per la resistenza R vale la relazione: $\Delta V = iR$ e quindi:

$$E = i\,(R + r)$$

relazione che si puó ottenere dalla legge di Ohm pensando che la corrente incontri una resistenza r nell'attraversare il generatore e poi la resistenza R all'esterno, con la tensione E applicata agli estremi delle due resistenze r e R disposte in serie. Se la resistenza r del generatore fosse nulla si avrebbe un generatore ideale: la tensione ai suoi capi sarebbe $\Delta V = E$ indipendentemente dalla corrente i erogata.

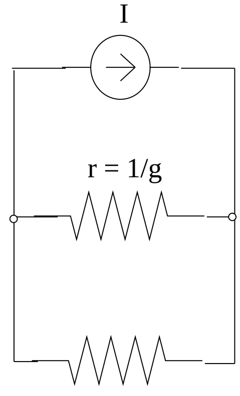


Figura 5.12:

Analogamente, consideriamo un generatore di corrente reale, figura 5.12: esso é **cortocircuitato** quando é chiuso su una resistenza arbitrariamente piccola R; in tali condizioni il circuito oppone la minima resistenza al passaggio di corrente elettrica, che assume allora il suo valore massimo, I. In generale, se la resistenza R non é trascurabile, la corrente erogata diminuisce linearmente all'aumentare della d.d.p. ai suoi capi ΔV:

$$i = I - g \, \Delta V$$

g é una costante che ha le dimensioni di una conduttanza. In altri termini, un generatore reale puó pensarsi come un generatore ideale di corrente in parallelo con una conduttanza g, carattersistica del generatore, detta **conduttanza interna**: se poniamo $i = G \, \Delta V$, dove $G = 1/R$, segue che:

$$I = \Delta V \, (g + G)$$

e la corrente erogata dal generatore é:

$$i = I - \frac{g}{g + G} \, I$$

In particolare, quando $g \ << \ G$, la corrente che attraversa il generatore reale tende a I indipendentemente dal valore di G, cioé indipendentemente dalla d.d.p. ai suoi capi. In tali condizioni un generatore ideale é una buona approssimazione di un generatore reale.

Da quanto detto si ha allora che quando un generatore reale é connesso ad una resistenza di carico, il suo comportamento puó essere indifferentemente rappresentato o come un generatore di f.e.m. in serie ad una resistenza interna r o come un generatore di corrente in parallelo con una conduttanza interna g. Si puó inoltre dimostrare che é $r \ = \ 1/g$.

5.6 Leggi di Kirchhoff

- **Legge delle tensioni di Kirchhoff (LTK)**

  Si consideri un cammino chiuso (anello o maglia) all'interno di un circuito elettrico composto da N rami contenenti resistori (R_k) e generatori di tensione (V_k) e percorsi dalle correnti i_k; si fissi un verso positivo di percorrenza. In tale cammino chiuso, ad ogni istante, sia in senso orario che in senso antiorario, la somma algebrica delle cadute di tensione é uguale alla somma algebrica delle forze elettromotrici:

  $$\sum_{k=1}^{N} V_k \ = \ \sum_{k=1}^{N} R_k \ i_k$$

  Il termine algebrica vuol dire che nelle somme sono compresi i segni propri delle cadute di tensione e delle f.e.m. La legge delle tensioni di Kirchhoff é una conseguenza diretta della legge di Ohm applicata ai vari rami di una maglia.

- **Legge delle correnti di Kirchhoff (LCK)**

  Si consideri un nodo nel quale concorrono N rami, percorsi dalle correnti i_k, considerate positive o negative secondo che entrino o escano dal nodo; ad ogni istante la somma algebrica delle correnti nei rami facenti capo ad uno stesso nodo é nulla:

  $$\sum_{k=1}^{N} i_k \ = \ 0$$

  Il termine algebrica vuol dire che nelle somme sono compresi i segni propri delle correnti. La legge delle correnti di Kirchhoff traduce la conservazione della carica ai nodi di una rete.

- **Analisi delle maglie**

  Nell'*analisi delle maglie* si applica la LTK alle correnti di maglia; il senso assegnato alle correnti di maglia é preferibilmente quello orario, come indicato in figura 5.13.

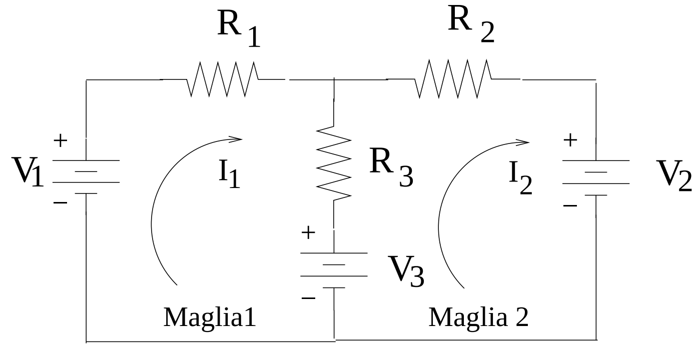


Figura 5.13:

La LTK si applica ad ogni maglia, una per volta; le cadute di tensione ai capi dei resistori, prese nella direzione delle correnti di maglia, vengono uguagliate alle f.e.m. ai capi dei generatori di tensione. Nel circuito della figura, per esempio, le cadute ai capi dei resistori R_1 e R_3 della maglia 1 sono rispettivamente I_1R_1 e $(I_1 - I_2)R_3$, quest'ultima perché la corrente che passa attraverso R_3 in direzione di I_1 é $I_1 - I_2$. La f.e.m. totale dei generatori di tensione é $V_1 - V_3$ e V_3 ha segno negativo visto che si tratta di una caduta di tensione muovendosi nel senso di I_1. Ne risulta per la maglia 1:

$$I_1R_1 + (I_1 - I_2)R_3 = V_1 - V_3$$

ovvero

$$I_1 (R_1 + R_3) - I_2 R_3 = V_1 - V_3$$

Il coefficiente di I_1, R_1+R_3, pari alla somma delle resistenze dei resistori nella maglia 1, si chiama *autoresistenza* della maglia; il coefficiente di I_2, $-R_3$, é l'opposto della resistenza del resitore comune, o mutuo, alle maglie 1 e 2 ed é chiamato *resistenza mutua.* I termini di resistenza mutua hanno sempre segno negativo nelle equazioni delle maglie, perché le altre correnti percorrono sempre i resistori mutui in direzione opposta a quella delle correnti di maglia principali.

É piú facile scrivere le equazioni di maglia con le autoresistenze e le resistenze mutue che con la LTK. Per la maglia 2 troveremo:

$$- I_1 R_3 + I_2 (R_2 + R_3) = V_3 - V_2$$

In una equazione di maglia la tensione di un generatore ha segno positivo se il suddetto collabora al flusso della corrente di maglia principale, se la corrente cioé esce dal suo terminale positivo.

L'analisi delle maglie si applica a circuiti che contengano solo generatori di tensione, dato che non ci sono relazioni che forniscano le tensioni ai capi di generatori di corrente; se, peró nel circuito é presente un generatore di corrente collegato in modo tale da essere percorso da una sola corrente di maglia, tale corrente é pari a quella del generatore o al suo opposto a seconda del segno e non sará necessario applicare la LTK a tale maglia (vedi esempio).

Il numero di equazioni di maglia é uguale al munero delle maglie meno il numero di generatori di corrente, se ce ne sono.

Esempi nelle applicazioni 5, 6, 7 e 8 al fondo del capitolo.

5.7 Teoremi delle reti lineari

Per l'analisi delle reti si devono applicare alcuni teoremi, validi per circuiti lineari. Un circuito elettrico si dice *lineare* se é costituito da elementi lineari e da generatori indipendenti; un elemento elettrico é lineare se ha un rapporto eccitazione–risposta tale che, raddoppiando l'eccitazione raddoppia la risposta, come accade per i resistori. Un generatore é indipendente se produce tensioni o correnti in modo indipendente dalle altre tensioni o correnti presenti del circuito.

É di importanza fondamentale il concetto di *circuito equivalente.* Due circuiti A e B si dicono equivalenti rispetto a due punti a e b, quando é possibile sostituire l'uno con l'altro, nel senso che tensioni e correnti nel resto del circuito rimangono le stesse quando tra i punti a e b si trova il circuito A o quando vi sia sostituito il circuito B.

- **Teorema della sovrapposizione**

  Se in una rete sono presenti piú generatori ideali di tensione, la corrente in un ramo é la somma delle correnti dovute ai vari generatori, considerati attivi uno alla volta.

Nel calcolo ogni generatore inattivo deve essere sostituito da un corto circuito; per generatori non ideali si sostituisce a quelli inattivi la resistenza interna. Si veda l'esercizio 7a al fondo del capitolo.

- **Teorema di Thevenin**

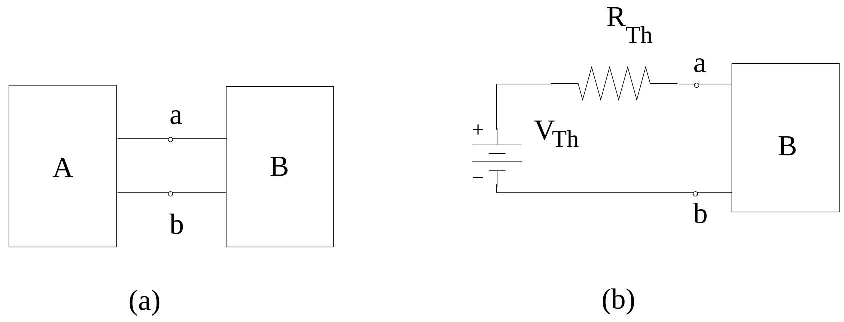


Figura 5.14:

A e B sono due circuiti qualsiasi, collegati nei punti a e b. Il circuito A é equivalente, rispetto al circuito esterno B, ad un generatore di tensione V_{Th} *con una resistenza in serie* R_{Th}*.* V_{Th} *é la differenza di potenziale tra i punti a e b a circuito aperto, cioé quando sono tolte le connessioni con B;* R_{Th} *é la resistenza totale del circuito A nel quale i generatori di tensione sono sostituiti dalle loro resistenze interne.*

Se, in particolare, il circuito esterno B é costituito da una semplice resistenza R, il teorema puó essere espresso come:

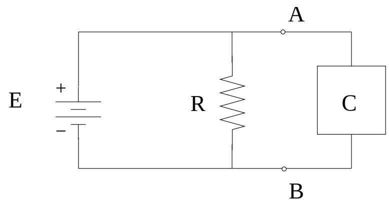
$$I_R \ = \ V_{eq} \ / \ (R \ + \ R_{eq})$$

dove I_R é la corrente che fluisce nella resistenza esterna R.

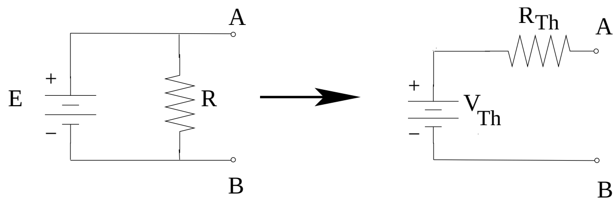
Il teorema é particolarmente utile quando un'opportuna scelta dei punti a e b rende agevole in un circuito il calcolo della tensione e resistenza equivalente. Si vedano gli esercizi 8a, 8b e 8c al fondo del capitolo.

Di particolare importanza é il seguente esempio di applicazione del teorema.

Esercizio Trovare l'equivalente del circuito a sinistra dei punti A e B. dove C è un circuito qualsiasi.



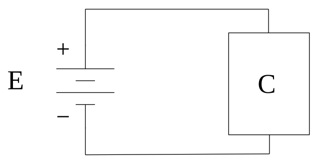
Per il teorema di Thevenin si ha la seguente equivalenza:



con

$$V_{Th} = V_{AB} = E$$
$$R_{Th} = 0$$

supponendo nulla la resistenza interna del generatore. Il circuito diviene semplicemente:



Questo significa che una resistenza in parallelo rispetto ad un generatore ideale non influisce per nulla sul resto del circuito. Per quello che riguarda il circuito esterno C, R puó essere a priori trascurata. Indipendentemente dal suo valore, il generatore mantiene una tensione fissa $V_{AB} = E$ ai suoi terminali. Il valore di R influisce ovviamente sulla corrente erogata dal generatore

$$I = I_C + I_R$$

dove I_C, la corrente che va nel circuito C, non dipende da R e $I_R = E/R$ non risente di quanto succede nel circuito C.

- **Teorema del massimo trasferimento di potenza**

  Un carico resistivo riceve la massima potenza da un circuito lineare in corrente continua quando la resistenza del carico é uguale alla resistenza di Thevenin del circuito così come é vista dal carico stesso.

  Quando la resistenza del carico é resa uguale a quella di Thevenin si dice che si fa l'*adattamento* delle resistenze.

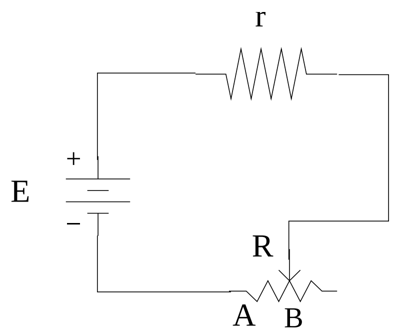


Figura 5.15:

Come semplice esempio, consideriamo un generatore con f.e.m. costante E e resistenza interna r, chiuso su una resistenza esterna variabile R (vedi figura 5.15), e calcoliamo il valore di R in corrispondenza al quale la potenza sviluppata in R é massima. Ai capi delle due resistenze r e R disposte in serie si ha una tensione E e perció l'intensitá della corrente erogata dal generatore é $i = E/(r + R)$, mentre la d.d.p. tra gli estremi A e B di R é $\Delta V = iR = ER/(r + R)$. La potenza sviluppata nella resistenza esterna é:

$$P \; = \; i \, \Delta V \; = \; i^2 \, R \; = \; \frac{E^2 R}{(r \; + \; R)^2}$$

Il valore di R che rende massima P si ottiene ponendo uguale a zero la derivata di P rispetto a R e risulta R $= r$. É facile verificare che il valore r corrisponde proprio alla resistenza equivalente di Thevenin del generatore, cosí come vista dal carico resistivo esterno: $r \; = \; R_{Th}$. La potenza massima corrispondente é $P_{max} \; = \; E^2 \; / \; 4r$ e in tal caso si dice che il generatore é **adattato per il massimo trasferimento di potenza**.

La potenza totale sviluppata nell'intero circuito é:

$$P_{tot} \; = \; i \; E \; = \; \frac{E^2}{(r \; + \; R)}$$

e in corrispondenza al valore R=r si ha $P_{tot} = E^2/2r$, cioé metá potenza viene sviluppata nella resistenza esterna mentre l'altra metá é dissipata nell'interno del generatore. Se R$\neq r$ la maggior parte della potenza viene dissipata sulla resistenza interna del generatore, che dovrá pertanto essere munito di un opportuno sistema di raffreddamento.

- **Teorema di Norton**

  Un circuito A contenente sorgenti di tensione é equivalente, se visto da due terminali a e b, ad un generatore di corrente I_{eq} di resistenza interna infinita (cioé ideale), con in parallelo una resistenza equivalente R_{eq}, dove I_{eq} é la corrente di corto circuito (vedi figura 5.16), cioé la corrente che passerebbe in un conduttore di resistenza nulla che collega il punto a al punto b mentre R_{eq} é la resistenza totale del circuito A tra i punti a e b, con generatori cortocircuitati (cioé la resistenza equivalente di Thevenin).

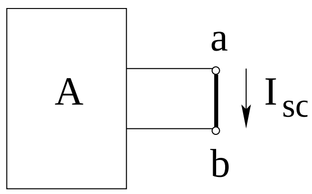


Figura 5.16:

Il teorema si puó anche esprimere analiticamente:

$$V_{a\;b} \; = \; I_{eq} \; R_{eq}$$

Di fondamentale importanza é la applicazione del teorema al caso di un circuito costituito da un solo generatore di tensione con una resistenza in serie, vedi figura 5.17.

Cortocircuitando A e B, il generatore E eroga una corrente di valore E/R; la resistenza tra A e B con E cortocircuitato, vale R. Quindi:

$$I_{eq} \; = \; E/R \qquad R_{eq} \; = \; R$$

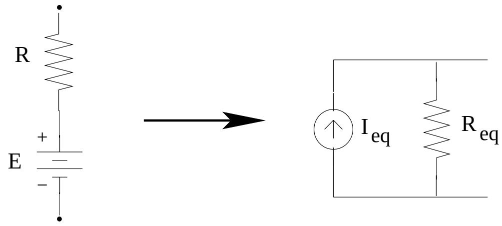


Figura 5.17:

Viceversa, dato un circuito costituito da un generatore di corrente, I, e un resistore, R, composti in parallelo, applicando il teorema di Thevenin rispetto ai due capi del parallelo, si ricava facilmente che il circuito equivalente é costituito da un generatore di tensione $V_{Th} = I \cdot R$ con un resistore in serie $R_{Th} = R$ (la resistenza interna di un generatore ideale di corrente tende ad infinito !). Concludendo:

in un circuito generatori di tensione e corrente sono intercambiabili, con l'avvertenza che una resistenza in serie rispetto al generatore di tensione (per esempio la sua resistenza interna) diventa in parallelo rispetto al generatore di corrente.

Questo teorema é utile per sostituire eventuali generatori di corrente con generatori di tensione prima di applicare l'analisi di maglia; si veda l'applicazione 6 al fondo del capitolo, seconda parte.

L'operazione equivalente al cortocircuito del generatore di tensione é la sostituzione del generatore di corrente con un circuito aperto.

5.8 Circuiti a ponte

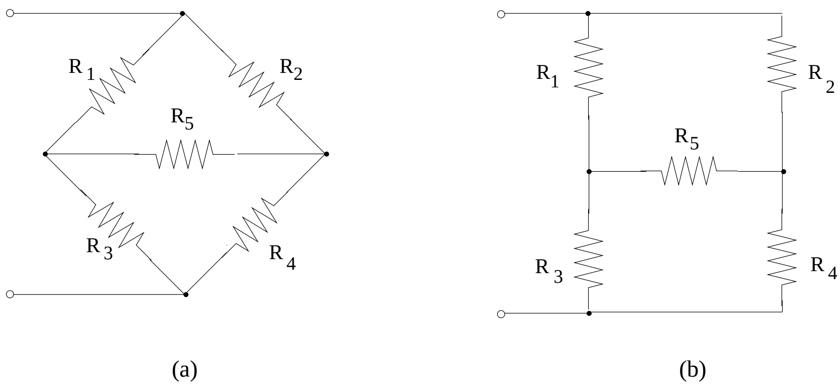


Figura 5.18:

Un circuito di resistori a ponte é costituito da due triangoli con un ramo in comune, come rappresentato in figura 5.18 a sinistra. Anche se il

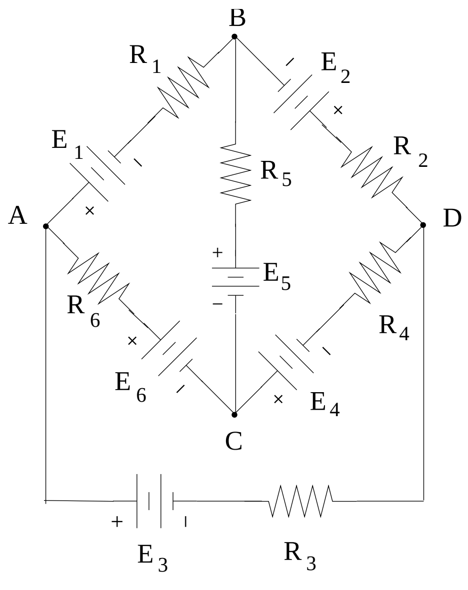


Figura 5.19:

circuito si presenta di solito in questa forma, anche quella della parte destra é abbastanza comune. Se si pensa di chiudere gli estremi del circuito con un ramo contenente un generatore di tensione (ed una resistenza) si ottiene un circuito a tre maglie, come in figura 5.19, che puó essere facilmente risolto con il metodo della analisi di maglia, come nell'applicazione 8 al fondo del capitolo: nella prima forma del circuito le tre maglie sono costituite dai due triangoli e da quella contenente il generatore di tensione.

I circuiti a ponte possono essere agevolmente risolti anche applicando il teorema di Thevenin. Si calcoli, ad esempio, la corrente nella resistenza R_g del circuito mostrato in figura 5.20.

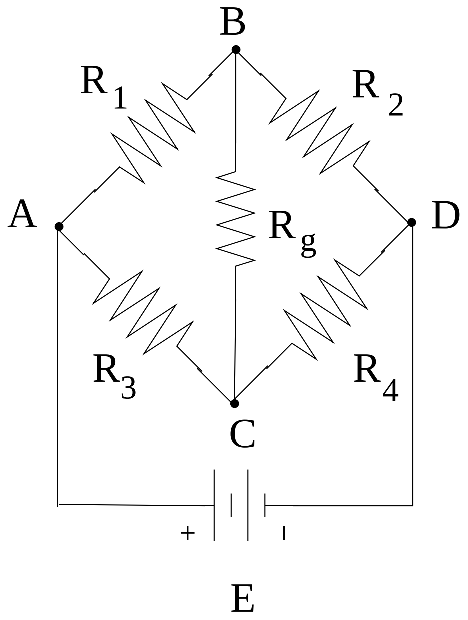


Figura 5.20:

La d.d.p. tra B e C quando la resistenza R_g viene tolta é:

$$V_{BC} = V_B - V_C = \left(E - R_1 \frac{E}{R_1 + R_2}\right) - \left(E - R_3 \frac{E}{R_3 + R_4}\right) =$$

$$\left(\frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) E$$

La resistenza tra B e C, con R_g tolta e il circuito reso passivo é:

$$R_{BC} = \frac{R_1 \, R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 \, R_4}{R_3 + R_4}$$

quindi la corrente che percorre la resistenza R_g ha intensitá:

$$i_g = \frac{V_{BC}}{R_{BC} + R_g}$$

Un circuito ponte serve anche per la misura di precisione delle resistenze; il *ponte di Wheatstone*, figura 5.21, ha il ramo centrale costituito da un sensibile indicatore di corrente, quale puó essere un galvanometro.

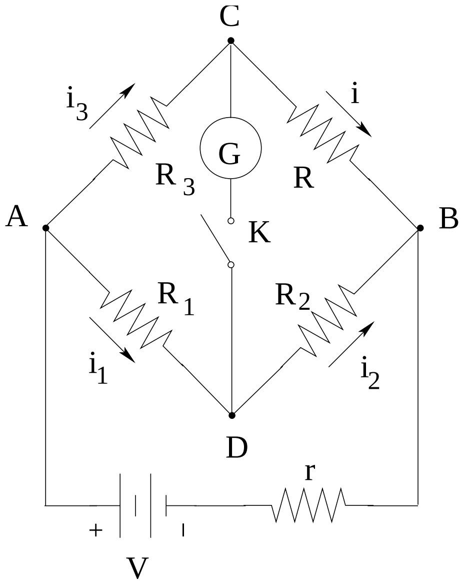


Figura 5.21:

Degli altri rami, tre sono resistori di precisione, uno dei quali variabile, ad esempio R_2; il quarto ramo é il resistore di cui si vuole misurare la resistenza incognita R. La misura si effettua regolando la resistenza R_2 del resistore variabile finché, quando l'interruttore sul ramo centrale K viene chiuso, l'indice del galvanometro non subisce deflessione. Questa mancanza di deflessione vuol dire che ai capi del galvanometro la tensione é zero e che anche a interruttore aperto la tensione su R_1 é uguale a quella su R_3 e la tensione su R é uguale a quella su R_2. In queste condizioni si dice che il ponte é *bilanciato* e con la partizione di tensione si ha:

$$\frac{R_1\ V}{R_1\ +\ R_2} = \frac{R_3\ V}{R_3\ +\ R} \quad \text{e} \quad \frac{R\ V}{R_3\ +\ R} = \frac{R_2\ V}{R_1\ +\ R_2}$$

Il rapporto delle due equazioni ci da l'*equazione di bilanciamento del ponte*:

$$R\ =\ \frac{R_2\ R_3}{R_1}$$

Per ricordare l'equazione di bilanciamento del ponte basta uguagliare i prodotti delle resistenze dei rami opposti: $R_1\ R_2\ =\ R_3\ R$. Per calcolare R si puó anche usare una resistenza fissa e conosciuta R_3 e per le resistenze R_1 e R_2 un unico filo metallico di sezione costante e lunghezza totale nota, il cui punto D di collegamento col galvanometro possa essere variato lungo il filo mediante un contatto mobile (figura 5.22): le resistenze R_1 e R_2 sono proporzionali alle lunghezze l_1 e l_2 dei due tratti di filo individuati dal contatto

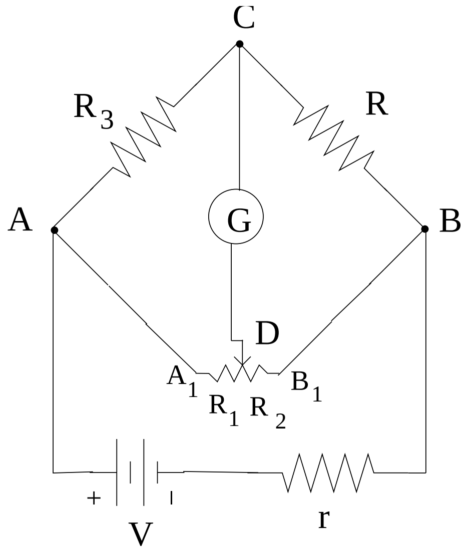


Figura 5.22:

mobile. Quando il ponte é bilanciato:

$$R = \frac{l_2 \; R_3}{l_1}$$