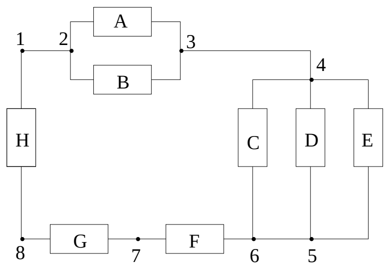
5.12 Applicazioni ed esercizi

Applicazione 1

1. Trovare il numero dei nodi e dei rami nel circuito in figura.

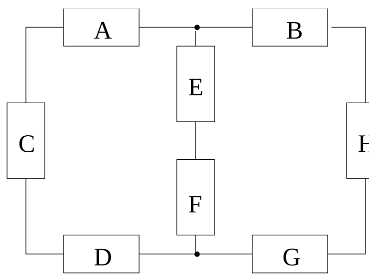


I punti 1 e 2 costituiscono un unico nodo; lo stesso per i punti 3 e 4, 5 e 6, compresi sempre i fili di giunzione. Il punto 7 e i due fili ai suoi lati sono un altro nodo; lo stesso per il punto 8 e i relativi fili. Abbiamo dunque cinque nodi. Ogni componente, da A ad H, è un ramo: otto rami in tutto.

2. Nella stessa figura, quali sono i componenti in serie e quali in parallelo?

   I componenti F, G, H sono in serie perchè conducono la stessa corrente; A e B, collegati su entrambi i teminali, risentono della stessa tensione e sono in parallelo. Lo stesso vale per C, D, E: sono in parallelo anche loro. Il gruppo in parallelo A, B è poi in serie con quello ugualmente in parallelo di C, D, E; entrambi i gruppi infine sono in serie con F, G, H.

3. Identificare anelli e maglie nel circuito in figura. Specificare anche quali componenti sono in serie e quali in parallelo.



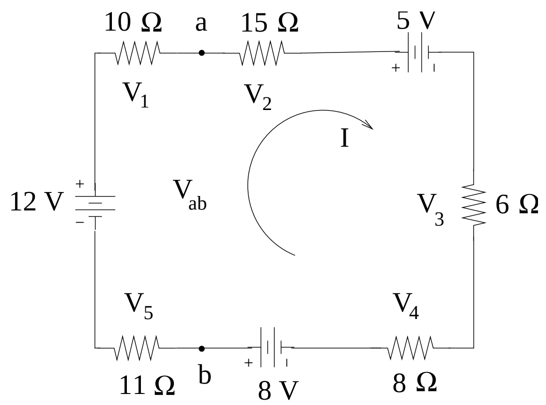
Abbiamo tre anelli: uno del componenti A, E, F, D, C; uno dei componenti B, H, F, G, E; un terzo di A, B, H, G, D, C. I primi due sono anche maglie, il terzo non lo è perchè i componenti E, F sono al suo interno. A, C, D sono in serie in quanto percorsi dalla stessa corrente. Per la stessa ragione sono in serie anche E ed F nonchè B, H, G. Non ci sono componenti in parallelo.

Applicazione 2

1. In un circuito serie una corrente esce dal terminale positivo di un generatore da 180 V e percorre due resistori, uno dei quali ha un valore di 30 Ω mentre l'altro è sotto una tensione di 45 V. Trovare la corrente e la resistenza incognita.

   Il resistore da 30 Ω risente di una tensione di 180 − 45 = 135 V ed è quindi attraversato da una corrente di 135/30 = 4.5 A. L'altra resistenza vale 45/4.5 = 10 Ω.

2. Trovare corrente e tensioni incognite nel circuito in figura.



   La resistenza totale è uguale alla somma delle resistenze: 10+15+5+8+11 = 50 Ω. La f.e.m. totale che deriva dai generatori di tensione in direzione di I vale 12–5 +8 = 15 V. La corrente I è uguale a questa tensione divisa per la resistenza totale: I = 15/50 = 0.3 A. Per la legge di Ohm $V_1 = 0.3{\times}10 = 3$ V; $V_2 = 0.3 \times 15 = 4.5$ V; $V_3 = 0.3 \times 6 = 1.8$ V; $V_4 = 0.3 \times 8 = 2.4$ V; $V_5 = 0.3 \times 11 = 3.3$ V;

3. Trovare la tensione V_{ab} nel circuito precedente.

   V_{ab} è la caduta di tensione tra il nodo a e il b pari a sua volta alla somma delle cadute di tensione ai capi dei componenti inseriti tra a e b, a destra o a sinistra del nodo a. Ci conviene scegliere il cammino di destra perchè è proprio questa la direzione della corrente I=0.3 A trovata nella soluzione del quesito precedente. Abbiamo così

   $$V_{ab} = (0.3 \times 15) + 5 + (0.3 \times 6) + (0.3 \times 8) - 8 = 5.7V$$

   Noteremo che la caduta IR è sempre positiva in direzione di I.

Applicazione 3

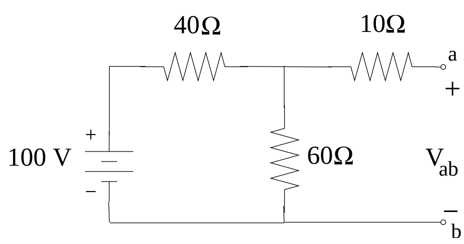
1. Un generatore da 90 V è in serie a cinque resistori aventi resistenze 4, 5, 6, 7, 8 Ω. Trovare la tensione ai capi del resistore da 6 Ω.

   Con la formula di partizione della tensione vediamo che in un circuito in serie il voltaggio ai capi di un resistore è uguale al prodotto della resistenza di quest'ultimo per la tensione applicata, diviso per la resistenza complessiva. Allora:
$$V_6 = \frac{6}{4+5+6+7+8} \times 90 = 18V$$

2. Trovare con il metodo della partizione della tensione il valore delle tensioni V_4 e V_5 nel circuito delll'applicazione precedente.

   La tensione totale ai capi dei resistori è uguale alla somma delle f.e.m. provenienti dai generatori di tensione, prese se possibile in senso orario: 12–5+8 = 15 V. La polarità di questa tensione netta sarà tale da produrre un flusso di corrente in senso orario. Nella somma 5 V è negativo perchè è una caduta di tensione; le f.e.m. sono aggiunte come positive. Vista in altro modo, la polarità del generatore da 5 V si oppone a quelle dei generatori da 12 e 8 V. La formula di partizione della tensione V_4 dovrà avere segno positivo, visto che V_4 è una caduta in senso orario; si oppone alla polarità della tensione netta applicata:
$$V_4 \times \frac{8}{10+15+6+8+11} \times 15 = \frac{8}{50} \times 15 = 2.4V$$
   La formula di partizione della tensione per V_5 richiede un segno negativo: sia V_5 che la tensione netta di generatore sono f.e.m. in senso orario:
$$V_5 = -\frac{11}{50} \times 15 = -3.3V$$

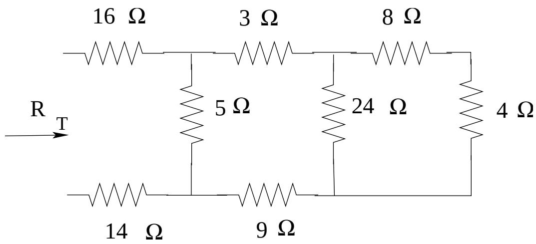
3. Trovare la tensione V_{ab} ai capi del circuito aperto in figura.



   Ai capi del resistore da 10 Ω la tensione è zero: in serie a un circuito aperto, in esso il flusso di corrente è nullo. La tensione V_{ab} allora è uguale alla caduta di tensione, andando dall'alto verso il basso, ai capi del resistore da 60 Ω. Con la partizione della tensione:
$$V_{ab} = \frac{60}{60+40} \times 100 = 60V$$

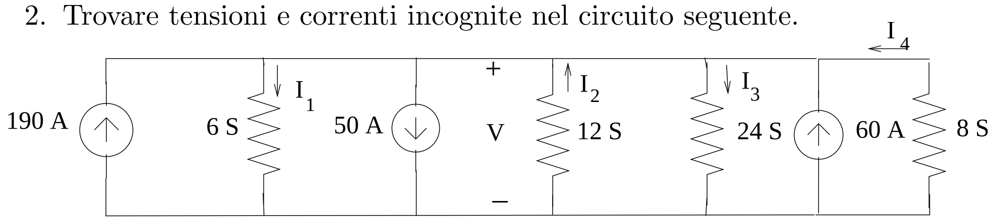
Applicazione 4

1. Trovare la resistenza equivalente R_T per la rete a scala in figura.



Quando si vuol trovare la resistenza equivalente di una rete a scala combinandone le resistenze, bisogna sempr partire dll'estremità opposta rispetto ai segnali di ingresso. A questo punto i resistori in serie da 4 e 8 Ω presentano una resistenza equivalente da 12 Ω. Questa si combina in parallelo con quella da 24 Ω: (24 × 12)/(24+12) = 8 Ω. Questa a sua volta si somma alle resistenze in serie da 3 e da 9 Ω e si ha la somma: 8+3+9 = 20 Ω. Quest'ultima resistenza si aggiunge ai 5 Ω in parallelo: (20 × 5) /(20+5) = 4 Ω. R_T corrisponde alla somma di quest'ultima resistenza con quelle in serie da 16 e da 14 Ω: R_T = 4+16+14 = 34 Ω.

2. Trovare tensioni e correnti incognite nel circuito seguente.

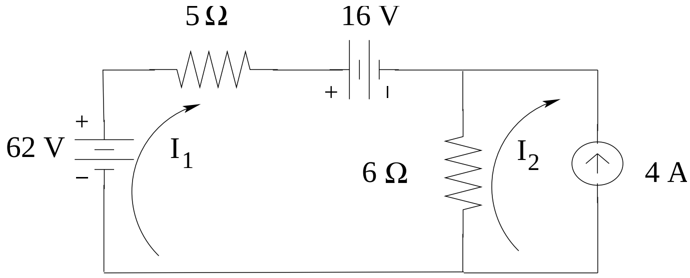


Sia nella linea superiore che in quella inferiore, i nodi, che sembrerebbero parecchi, si riducono a uno solo perchè tutti i punti in giunzione sono allo stesso potenziale. Abbiamo quindi due nodi ed una tensione V. La conduttanza equivalente dei resistori collegati in parallelo è G = 6+12+24+8 S = 50 S. La corrente complessiva che dai generatori entra nel nodo superiore è di 190–50+60 = 200 A. Possiamo usare questi valori nella formula della legge di Ohm espressa in funzione della conduttanza: I = GV ricavando così la tensione: V=I/G=200/50=4 V. Essendo questa la tensione ai capi di ogni resistore, le relative correnti sono: $I_1 = 6 \times 4 = 24$ A, $I_2 = -12 \times 4 = -48$ A, $I_3 = 24 \times 4 = 96$ A e $I_4 = -8 \times 4 = -32$ A. I segni negativi sono dovuti ai riferimenti non associati. Naturalmente tutte le correnti escono dal nodo superiore.

L'effetto dei generatori di correnti in parallelo è come quello di un unico generatore, la cui corrente è pari alla somma algebrica delle correnti dei singoli generatori.

Applicazione 5: analisi di maglia

1. Trovare le correnti di maglia nel circuito in figura.



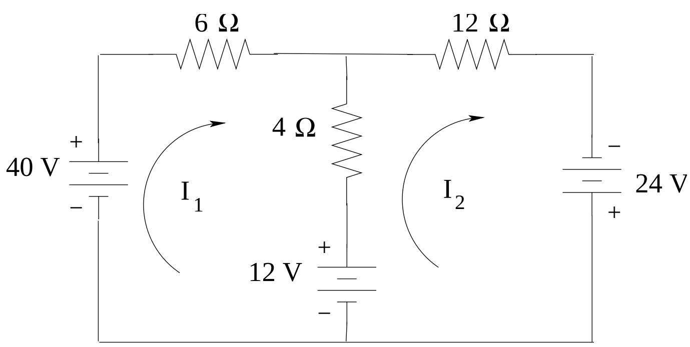
Per ricavare le equazioni di maglia è sempre meglio far uso delle autoresistenze e delle resistenze mutue. Nella maglia 1 l'autoresistenza vale 5+6 = 11 Ω; la resistenza mutua con la maglia 2 è invece di 6 Ω. La somma delle f.e.m. di generatore nella direzione di I_1 š 62–16 = 46 V. Dunque l'equazione della LTK per la maglia 1 è $11I_1$–$6I_2$= 46.

Per la maglia 2 non ci serve alcuna equazione LTK, visto che l'unica corrente che percorre il generatore da 4 A è I_2, col risultato che I_2= –4 A. La corrente I_2 è negativa perchè la sua direzione di riferimento è opposta a quella del generatore. Incidentalmente, non si può scrivere una equazione LTK per la maglia 2 senza introdurre una variabile per la tensione, incognita, ai capi del generatore di corrente.

Sostituiamo I_2= –4 A nell'equazione della maglia 1 e otteniamo:

$$11I_1 - 6(-4) = 46 e i_1 = \frac{22}{11} = 2A$$

2. Risolvere il circuito di figura rispetto alle correnti di maglia



L'autoresistenza della maglia 1 è 6+4 = 10 Ω; la resistenza mutua con la maglia 2 è di 4 Ω; la somma delle f.e.m. di generatore nella direzione di I_1 è 40–12 = 28 V. Allora l'equazione della maglia 1 è, con la legge LTK: $10I_1 - 4I_2 = 28$.

Allo stesso modo l'autoresistenza della maglia 2 è 4+12 = 16 Ω; la resistenza mutua è 4 Ω e la sommadelle f.e.m. da generatori di tensione è 24+12 = 36 V. Abbiamo allora un'equazione LTK per la maglia 2: $-4I_1 + 16I_2 = 36$.

Se esaminiamo il sistema delle due equazioni di maglia notiamo la simmetria dei coefficienti (–4) rispetto alla diagonale principale, dovuta alla comune resistenza mutua:

$$\begin{aligned} 10I_1 - 4I_2 &= 28 \\ -4I_1 + 16I_2 &= 36 \end{aligned}$$

Un buon metodo di soluzione è qui di sommare alla seconda la prima equazione, moltiplicata per 4; in tal modo si elimina I_2. Risultato:

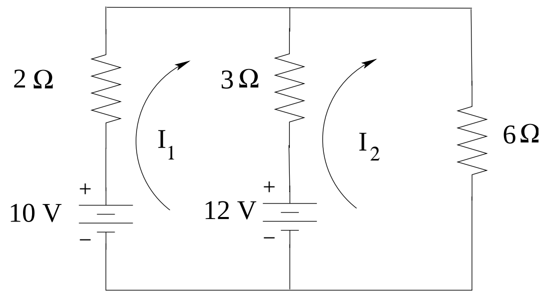
$$40I_1 - 4I_1 = 112 + 36 \quad \text{da cui} \quad I_1 = \frac{148}{36} = 4.11A$$

Sostituendo nella seconda equazione:

$$-4(4.11) + 16I_2 = 36 \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{52.44}{16} = 3.28A$$

Applicazione 6: analisi di maglia

1. Trovare nel circuito in figura le correnti che fluiscono dai terminali positivi di batteria. L'autoresistenza della maglia 1 è 2+3 = 5 Ω; la resistenza mutua



vale 3 Ω, la tensione netta collaborante di generatore vale 10–12 = –2 V. Per la maglia 2 l'autoresistenza è 6+3 = 9 Ω, la resistenza mutua è 3 Ω, la tensione netta collaborante di generatore vale 12 V. Allora le equazioni di maglia sono le seguenti:

$$\begin{aligned} 5I_1 - 3I_2 &= -2 \\ -3I_1 + 9I_2 &= 12 \end{aligned}$$

Moltiplicando la prima per 3 e sommandola alla seconda eliminiamo I_2:

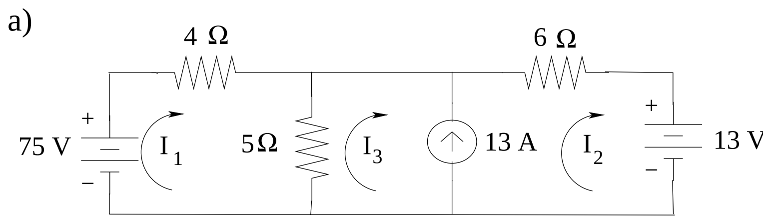
$$15I_1 - 3I_1 = -6 + 12 \quad \text{da cui} \quad I_1 = \frac{6}{12} = 0.5A$$

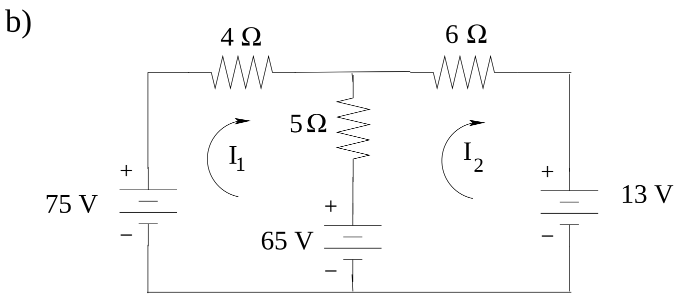
Sostituiamo nella seconda equazione ed abbiamo:

$$I_2 = \frac{12 + 3(0.5)}{9} = 1.5A$$

La corrente che esce dal polo positivo della batteria da 10 V è $I_1 = 0.5$ A. La corrente analoga della batteria da 12 V è invece: $I_2 - I_1 = 1.5 - 0.5 = 1$ A.

2. Trovare le correnti di maglia nel circuito in figura a.





Per prima cosa convertiamo il generatore di corrente da 13 A e il resistore da 5 Ω in parallelo in un generatore di tensione, come si vede nel circuito della figura b.

L'autoresistenza della maglia 1 è 4+5 = 9 Ω, quella della maglia 2 è 6+5 = 11 Ω. La resistenza mutua è 5 Ω. Le f.e.m. dei generatori sono: 75–65 = 10 V per la maglia 1 e 65–13 = 52 V per la 2. Le corrispondenti equazioni di maglia sono:

$$\begin{aligned} 9I_1 - 5I_2 &= 10 \\ -5I_1 + 11I_2 &= 52 \end{aligned}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per 5, la seconda per 9 e sommiamo, eliminando I_1:

$$-25I_2 + 99I_2 = 50 + 468 \quad \text{da cui} \quad I_2 = \frac{518}{74} = 7A$$

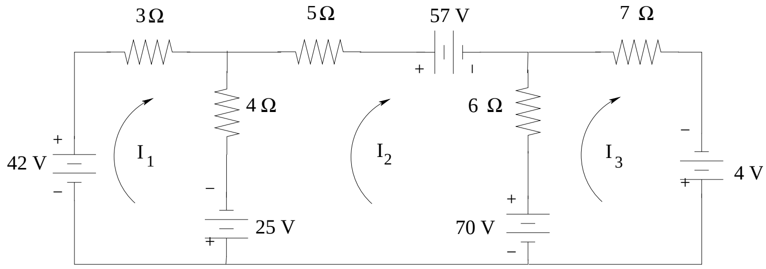
che sostituita nella prima equazione ci da:

$$9I_1 + 5(7) = 10 \quad \text{ovvero} \quad I_1 = \frac{10+35}{9} = 5A$$

Nel circuito originale la corrente di generatore è $I_2 - I_3 = 13$ A. Quindi $I_3 = I_2 - 13 = 7 - 13 = -6$ A.

Applicazione 7

Risolvere il circuito rispetto alle correnti di maglia.



Le autoresistenze sono: 3+4 = 7 Ω per la maglia 1; 4+5+6 = 15 Ω per la 2; 6+7 = 13 Ω per la maglia tre. Le resistenze mutue sono: 4 Ω per le maglie 1 e 2, 6 Ω per la 2 e la 3, 0 Ω per la 1 e la 3. Le tensioni di generatore collaboranti sono: 42+25 = 67 V per la maglia 1; –25–57–70 = –152 per la 2; 70+4 = 74 V per la maglia 3. Dunque le equazioni di maglia sono:

$$\begin{aligned} 7I_1 - 4I_2 - 0I_3 &= 67 \\ -4I_1 + 15I_2 - 6I_3 &= -152 \\ -0I_1 - 6I_2 + 13I_3 &= 74 \end{aligned}$$

Notare la simmetria dei coefficienti di resistenza mutua rispetto alla diagonale principale. Sono le resistenze mutue comuni che danno regolarmente luogo a questa simmetria. Si vede anche che in ogni maglia l'autoresistenza è uguale o maggiore alla somma delle resistenze mutue, dato che la prima comprende le seconde.

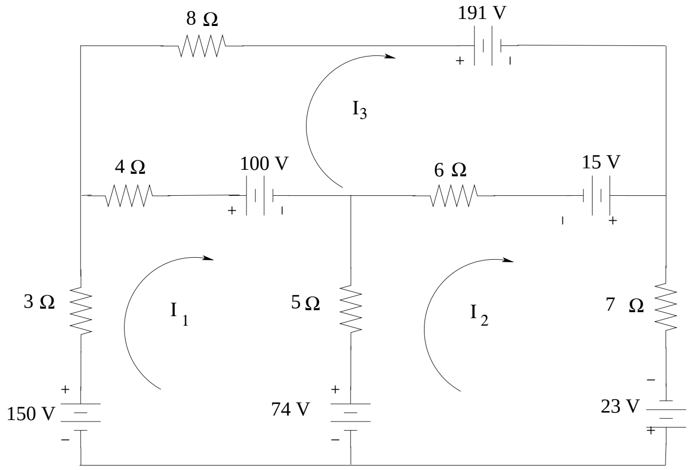
Con la regola di Cramer:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 67 & -4 & 0 \\ -152 & 15 & -6 \\ 74 & -6 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 15 & -6 \\ - & -6 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{4525}{905} = 5A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 67 & 0 \\ -4 & -152 & -6 \\ 0 & 74 & 13 \end{vmatrix}}{905} = \frac{-7240}{905} = -8A$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 67 \\ -4 & 15 & -152 \\ 0 & -6 & 74 \end{vmatrix}}{905} = \frac{-1810}{905} = 2A$$

Applicazione 8
Trovare le correnti di maglia nel seguente ciruito.



Le autoresistenze sono: 3+4+5 = 12 Ω per la maglia 1; 5+6+7 = 18 Ω per la 2; 6+4+8 = 18 Ω per la maglia tre. Le resistenze mutue valgono: 5 Ω per le maglie 1 e 2, 6 Ω per la 2 e la 3, 4 Ω per la 1 e la 3. Le tensioni di generatore collaboranti sono: 150–100–74 = –24 V per la maglia 1; 74+15+23 = 112 per la 2 e 100–191–15 = –106 V per la maglia 3. Le equazioni di maglia sono allora:

$$\begin{aligned} 12I_1 - 5I_2 - 4I_3 &= -24 \\ -5I_1 + 18I_2 - 6I_3 &= 112 \\ -4I_1 - 6I_2 + 18I_3 &= - - 106 \end{aligned}$$

Notare, come verifica, la simmetria dei coefficienti di resistenza mutua rispetto alla diagonale principale.

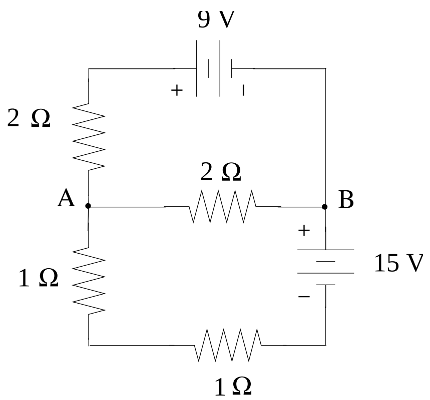
Con la regola di Cramer:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} -24 & -5 & -4 \\ 112 & 18 & -6 \\ -106 & -6 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -5 & -4 \\ -5 & 18 & -6 \\ -4 & -6 & 18 \end{vmatrix}} = \frac{-4956}{2478} = -2A$$

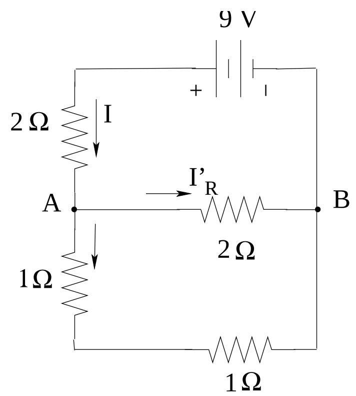
$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -24 & -4 \\ -5 & 122 & -6 \\ -4 & -106 & 18 \end{vmatrix}}{2478} = \frac{9912}{2478} = 4A$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -5 & 24 \\ -5 & 18 & 112 \\ -4 & -6 & -106 \end{vmatrix}}{2478} = \frac{-12390}{2478} = -5A$$

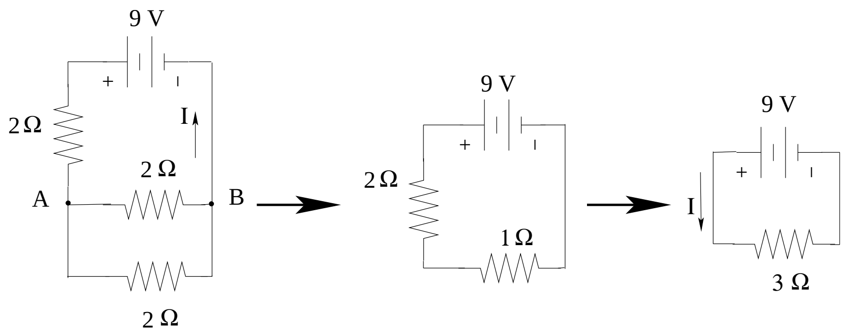
Esercizio 7a – Teorema della Sovrapposizione
Calcolare la differenza di potenziale tra i punti A e B nel circuito in figura.



La corrente dovuta al generatore da 9 V si trova considerando il circuito

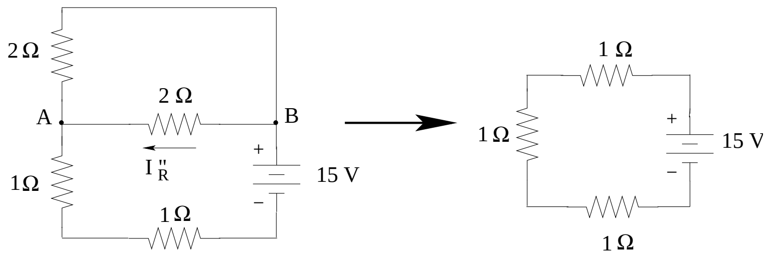


equivalente ai seguenti:



dove I=3 A. La corrente I si suddivide nel punto A in due parti uguali. Quindi: $I'_R = 1.5$ A da A verso B.

La corrente dovuta all'altro generatore è, in modo analogo:



I = 5 A e $I_R^{''} = 2.5$ A da B verso A.
Infine:

$$I = I_R^{'} + I_R^{''} = 1\ A \quad \text{da B verso A}$$

e perciò

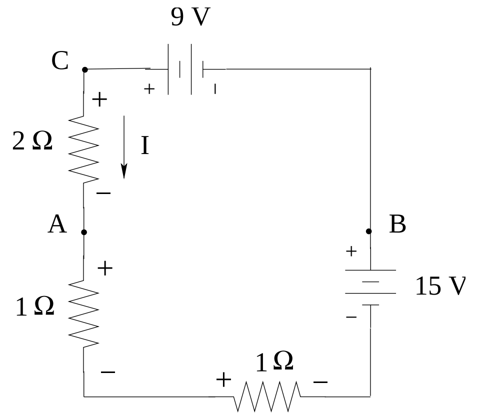
$$V_A - V_B = 2\Omega \cdot I_R = -2V$$

Esercizio 8a – Teorema di Thevenin

Calcolare, nel circuito dell'esercizio 7a, il valore di $V_A - V_B$.

Facciamo riferimento alla prima figura dell'esercizio 7a.

Conviene far corrispondere al circuito B della figura 5.14 la resistenza tra i punti A e B e al circuito A della figura 5.14 il resto del circuito di partenza, come indicato nella figura seguente:



La tensione equivalente di Thevenin, V_{Th}, è la tensione $V_A - V_B$ della figura precedente.

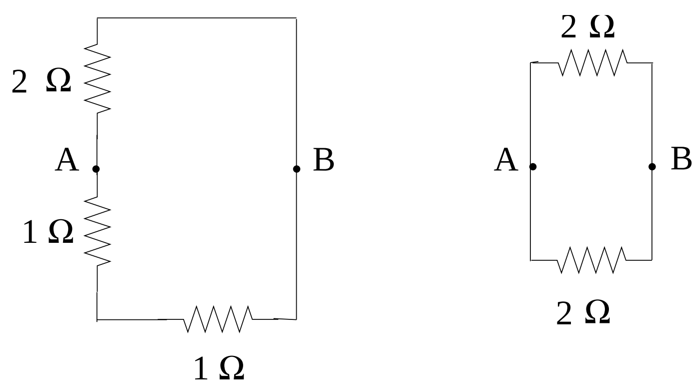
La corrente I si ricava (Kirchhoff) da:

$$15 + 9 - 2I - I - I = 0$$

e risulta I=6 A. Allora $V_C - V_A$=12 V e

$$V_{Th} = V_A - V_B = (V_A - V_C) + (V_C - V_B) = -12 + 9 = -3V$$

La resistenza equivalente di Thevenin, R_{Th}, è la resistenza totale del circuito della figura precedente, con i generatori in corto circuito: Infine si ha:

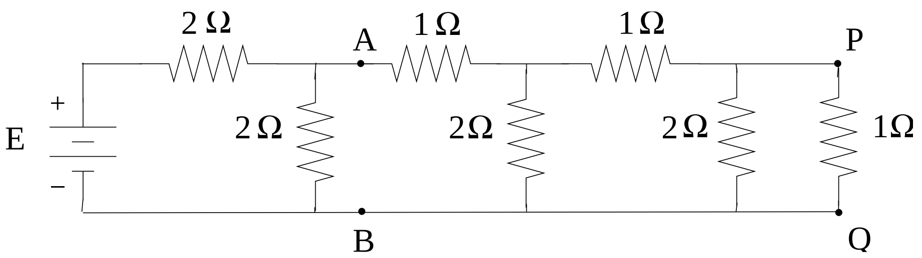


$$I_R = V_{Th}/(R + R_{Th}) = -3/3 = -1\ A$$

$$V_A - V_B = -2\ V$$

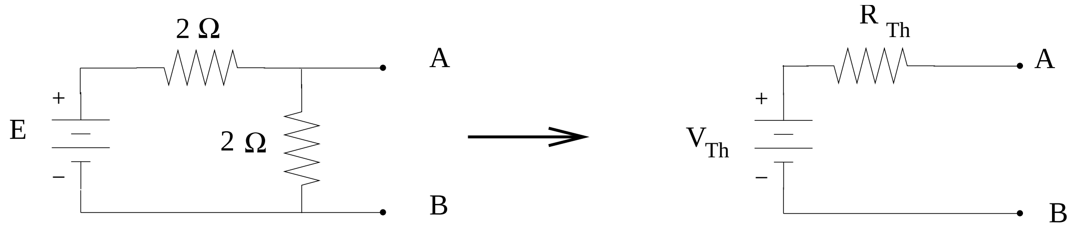
Esercizio 8b – Teorema di Thevenin

Calcolare la corrente che fluisce nell'ultima resistenza a destra del circuito in figura.



Conviene applicare ripetutamente il teorema di Thevenin.

Il circuito a sinistra dei punti A e B è equivalente al seguente:

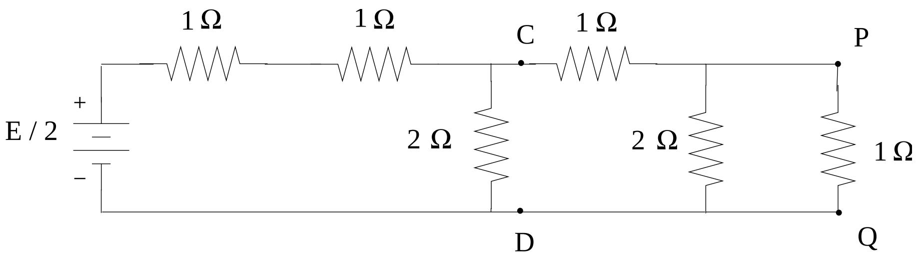


con

$$V_{Th} = V_{AB} = I \cdot 2 = E/(2+2) \cdot 2 = E/2$$

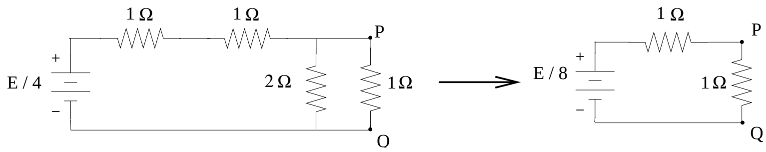
$$R_{Th} = (2 \cdot 2)/(2+2) = 1\Omega$$

Il circuito diventa:



Il circuito a sinistra di CD è identico a quello a sinistra di AB, con generatore di tensione dimezzato. Quindi: $V_{Th} = E \quad R_{Th} = 1\Omega$

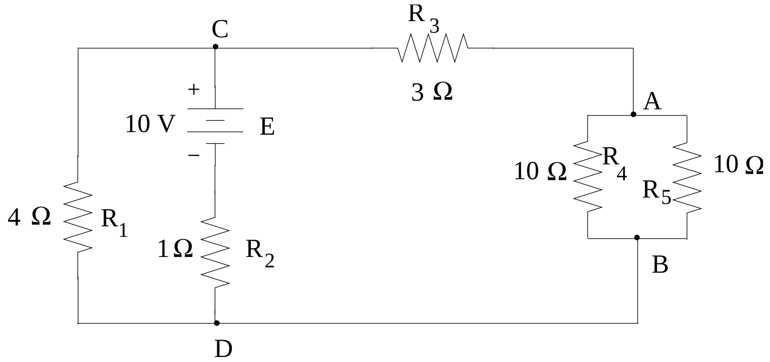
Il circuito diventa, in sequenza:



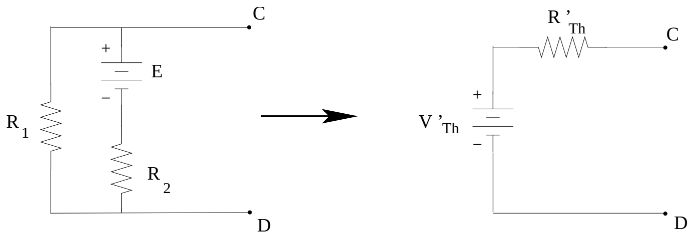
La corrente cercata vale: $(E/8) \cdot (1/2) = E/16\ A$

Esercizio 8c – Teorema di Thevenin

Calcolare la caduta di tensione ai terminali della resistenza R_4 nel circuito



La parte di circuito a sinistra di CD equivale a:

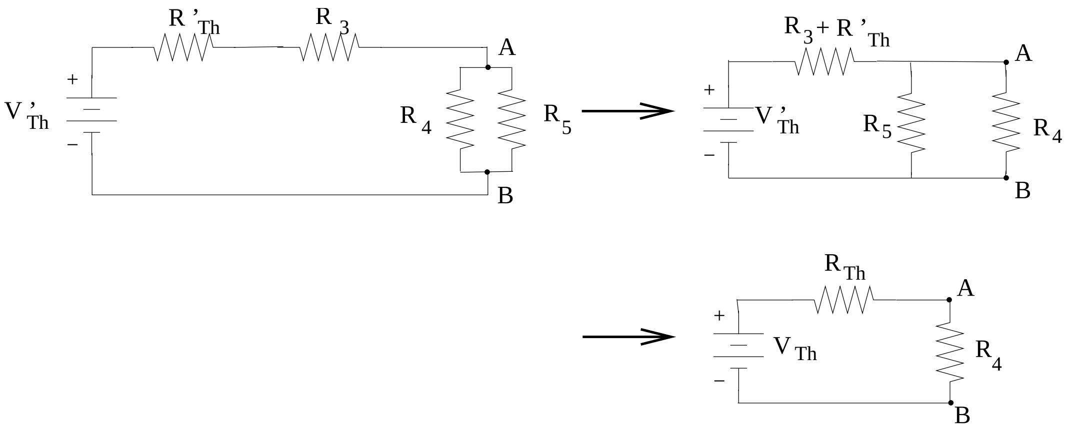


con:

$$R'_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0.8\Omega$$

$$V'_{Th} = E - R_2 \frac{E}{R_1 + R_2} = 8V$$

Applicando di nuovo il teorema di Thevenin al circuito così ottenuto



con

$$V_{Th} = V_{AB} = R_5 \frac{V'_{Th}}{R_3 + R'_{eq} + R_5} = 5.8V$$

$$R_{Th} = \frac{R_5(R_3 + R_{eq}^{'})}{R_3 + R_{eq}^{'} + R_5} = 2.75\Omega$$

da cui

$$V_4 = I_4 R_4 = R_4 \frac{V_{Th}}{R_4 + R_{Th}} = 4.55V$$