Capitolo 4

Sistemi ottici

Si chiama **sistema ottico** un sistema di lenti e specchi, cioé dispositivi riflettenti e rifrangenti, quindi una successione di superfici riflettenti e rifrangenti che delimitano mezzi con indici di rifrazione differenti. Le superfici in questione sono lisce e regolari e, nei casi che verranno studiati, hanno forma sferica o piana (come limite di una superficie sferica quando il raggio di curvatura tende ad infinito). Quando tutti i centri di curvatura delle superfici si trovano sulla stessa retta, questa viene chiamata **asse ottico** e il sistema é detto **centrato**; in tale situazione le superfici piane eventualmente presenti sono perpendicolari all'asse. L'asse ottico e' asse di simmetria di rotazione del sistema; il punto di incontro dell'asse e una superficie riflettente o rifrangente viene chiamato **vertice**.

Come già accennato all'inizio del capitolo precedente, l'azione di una discontinuitá sulla propagazione della luce puó essere descritta convenientemente nell'ambito dell'Ottica Geometrica utilizzando il concetto di **raggio luminoso**; in un mezzo omogeneo, quali sono supposti essere i mezzi separati dalle superfici riflettenti e rifrangenti considerate, i raggi luminosi sono perpendicolari al fronte d'onda. Si consideri una sorgente luminosa (praticamente) puntiforme posta nel punto A; il fascio di raggi luminosi uscenti da A é omocentrico e A viene detto **punto oggetto** (o semplicemente **oggetto**): se, dopo aver attraversato il sistema ottico, il fascio risulta essere omocentrico, il suo centro A' viene chiamato **punto immagine** (o semplicemente **immagine**) di A. Quando i raggi emergenti dal sistema passano effettivamente per il centro A', questo é **immagine reale** e se si pone uno schermo in A' su di esso si forma una immagine luminosa; se, invece, i raggi emergenti divergono ma i loro prolungamenti passano tutti per il centro A', si ha un'**immagine virtuale**.

4.1 Superfici riflettenti: specchi

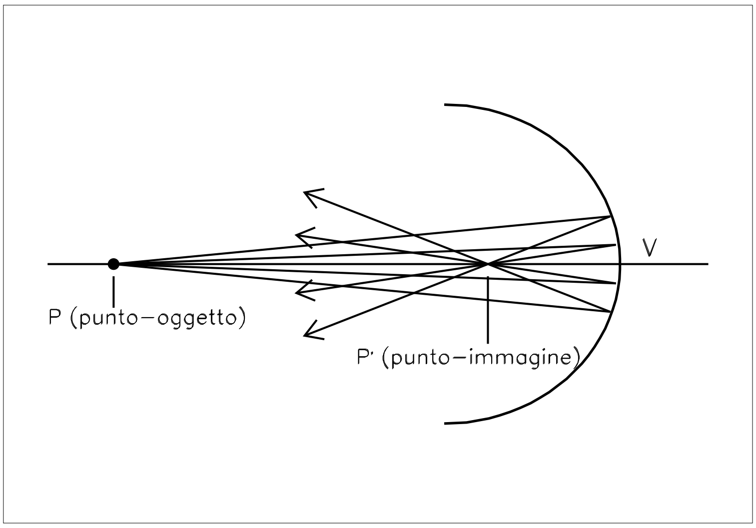

Figura 4.1:

La figura 4.1 mostra un fascio di raggi luminosi uscenti da una sorgente puntiforme P posta sull'asse di uno specchio sferico concavo: essi, dopo essersi riflessi sullo specchio, convergono nel punto immagine P' (immagine reale), per poi divergere come se in esso ci fosse un oggetto. Per ottenere una formula semplice che fornisca la posizione dell'immagine P' in funzione della posizione della sorgente e del raggio di curvatura dello specchio, applichiamo le leggi della riflessione ponendoci nella **approssimazione** (gaussiana) di **raggi parassiali**, cioé consideriamo solamente raggi luminosi che incidono sullo specchio sferico in punti vicini al vertice e formano con l'asse ottico degli angoli piccoli per i quali e' valida la approssimazione:

$$sin\ \alpha \ \sim \ \alpha \ \sim \ tg\ \alpha \tag{4.1}$$

(I raggi che incidono in punti lontani dall'asse, detti raggi *non parassiali* convergono in punti vicini al punto immagine e fanno apparire confusa o "sfuocata" l'immagine producendo un effetto detto **aberrazione di sfericitá** degli specchi).

La distanza dell'immagine (s'), misurata dal vertice V dello specchio a P', puó essere messa in relazione con la distanza dell'oggetto (s), misurata tra

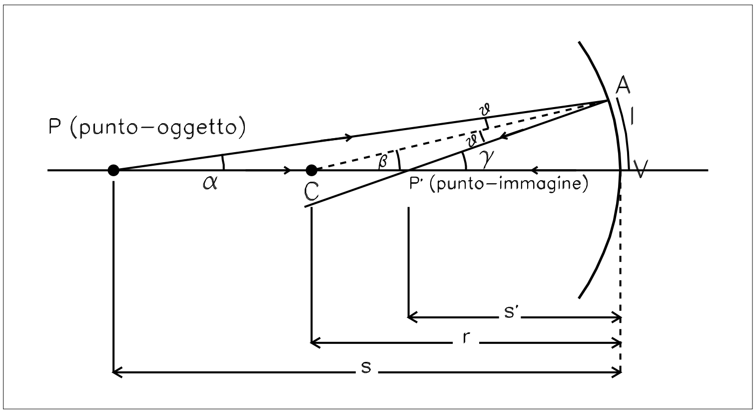

Figura 4.2:

il vertice V e il punto P, e il raggio di curvatura (r) dello specchio servendosi della geometria elementare. La costruzione é illustrata nella figura 4.2, per un generico raggio parassiale. Il punto C é il centro di curvatura dello specchio; il raggio incidente PA e il raggio riflesso AP' formano angoli uguali con la semiretta radiale CA che e' normale alla superficie riflettente nel punto di incidenza A. L'angolo β é un angolo esterno al triangolo PAC e perció e' uguale a:

$$\beta = \alpha + \theta \tag{4.2}$$

Analogamente dal triangolo PAP' si ottiene:

$$\gamma = \alpha + 2\theta \tag{4.3}$$

Eliminando θ tra queste due equazioni, si ottiene:

$$\gamma = \alpha + 2(\beta - \alpha) \tag{4.4}$$

$$2\beta = \alpha + \gamma \tag{4.5}$$

Usando le approssimazioni per i piccoli angoli, valide per raggi parassiali, $\alpha \sim l/s$, $\beta \sim l/r$, $\gamma \sim l/s'$, si ottiene:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \tag{4.6}$$

Questa formula é detta **formula degli specchi sferici**. Se la distanza dell'oggetto é molto grande rispetto al raggio r, ossia se s tende ad infinito, il termine 1/s puó essere trascurato e la distanza dell'immagine é: s' = r/2. Questa distanza é detta **distanza focale** *f* dello specchio e la formula degli specchi sferici si puó scrivere:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \tag{4.7}$$

Il **fuoco** o **punto focale** é il punto in cui vanno a convergere i raggi paralleli (= raggi provenienti da distanza infinita) che incidono sullo specchio. Viceversa, raggi uscenti da una sorgente puntiforme posta nel fuoco di uno specchio concavo si riflettono parallelamente all'asse; questa, come visto, e' una proprietá delle onde luminose nota come **invertibilitá del cammino luminoso**.

4.2 Costruzione grafica delle immagini formate dagli specchi

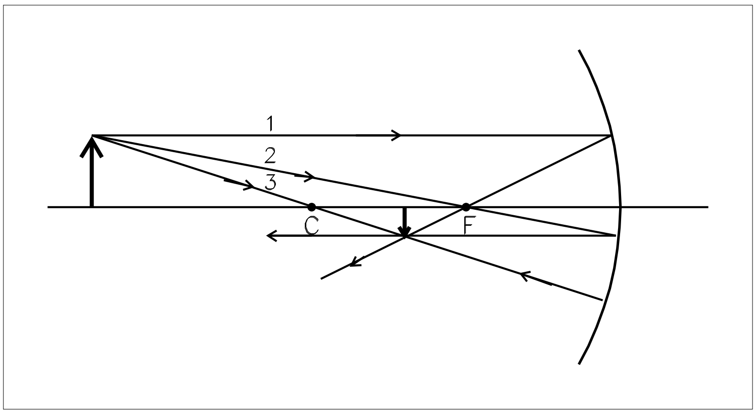

Figura 4.3:

Un metodo utile (anche se approssimato) per localizzare l'immagine formata da uno specchio é la **costruzione grafica** indicata in figura 4.3, in cui l'oggetto e' posto perpendicolarmente all'asse dello specchio. Si tracciano opportuni raggi uscenti dall'estremo superiore dell'oggetto (**raggi principali**) e dalla loro intersezione si ricava la posizione dell'immagine; i raggi principali per uno specchio sferico sono quattro:

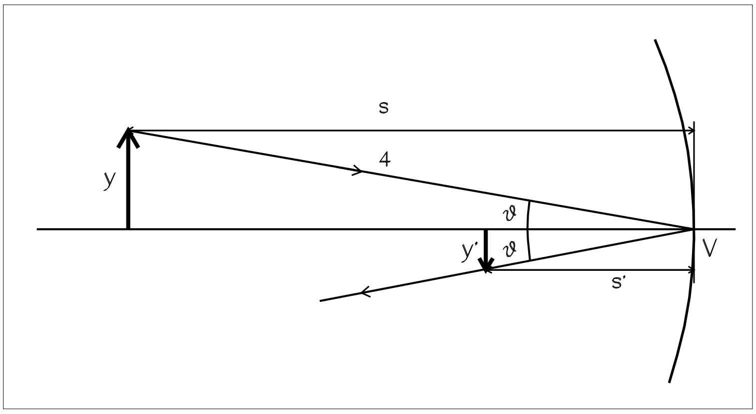

Figura 4.4:

1. il **raggio incidente parallelo all'asse** che si riflette passando per il fuoco;

2. il **raggio incidente passante per il fuoco** che si riflette parallelamente all'asse;

3. il **raggio incidente passante per il centro di curvatura** che si riflette su se' stesso dato che incide normalmente alla superficie;

4. il **raggio incidente passante per il vertice** (vedi figura 4.4) dello specchio che si riflette formando con l'asse un angolo uguale all'angolo di incidenza.

Dalle figure si vede che l'immagine é capovolta e non ha la stessa dimensione dell'oggetto. Il rapporto tra l'altezza dell'immagine (y') e l'altezza dell'oggetto (y) é l'**ingrandimento lineare trasverso** G_{lt} dell'immagine. Dalla figura 3.4 si puó facilmente ricavare che tg $\theta = y/s = y'/s'$ da cui $G_{lt} = y'/y = s'/s$.

Se l'oggetto é tra lo specchio e il fuoco, i raggi riflessi non convergono, ma sembrano provenire da un punto situato dietro lo specchio, come illustrato in figura 4.5: l'immagine é virtuale e diritta e, essendo s minore di $r/2$, dall'equazione (4.6) s' risulta negativo.

Le equazioni (4.6), (4.7) e la definizione di distanza focale possono essere applicate agli specchi convessi, concavi e piani adottando la seguente convenzione sui segni:

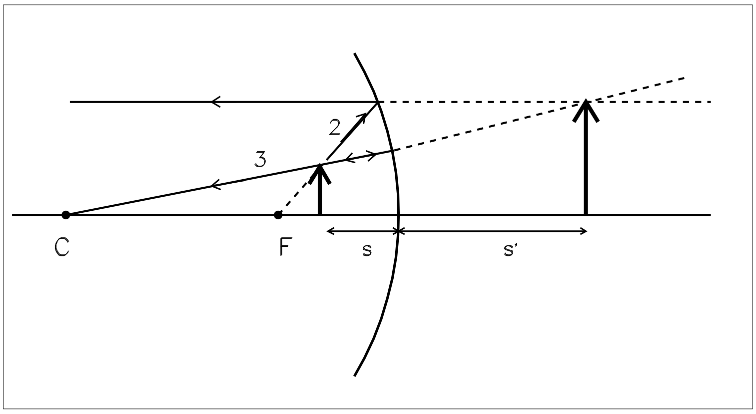

Figura 4.5:

s:	+ se l'oggetto é davanti allo specchio (oggetto reale) – se l'oggetto é dietro lo specchio (oggetto virtuale)
s':	+ se l'immagine é davanti allo specchio (immagine reale) – se l'immagine é dietro lo specchio (immagine virtuale)
r, f:	+ se il centro di curvatura é davanti allo specchio (specchio concavo) – se il centro di curvatura é dietro allo specchio (specchio convesso)

Le immagini reali si possono formare solo davanti allo specchio, nello **spazio di riflessione** che coincide con lo **spazio di incidenza**. Con queste convenzioni per i segni l'ingrandimento trasversale é dato da:

$$G_{lt} = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \tag{4.8}$$

Un ingrandimento negativo, che si ha quando sia s che s' sono positive, indica che l'immagine é capovolta.

4.3 Specchi piani

Nel caso degli specchi piani il raggio di curvatura r é infinito e pertanto anche la distanza focale risulta infinita. L'equazione (4.7) fornisce:

$$s' = -s$$

che indica che l'immagine e' virtuale (dietro lo specchio) ad una distanza uguale alla distanza dell'oggetto. L'ingrandimento (equazione (4.8)) vale:

$$G_{lt} = +1$$

che indica che l'immagine é diritta ed ha la stessa altezza dell'oggetto. Inoltre l'immagine formata da uno specchio piano é affetta da una **inversione di profonditá** dovuta al fatto che lo specchio trasforma un sistema di coordinate destrorso per il quale vale la relazione tra i versori degli assi: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, in uno sinistrorso per il quale $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{k}$.

4.4 Specchi convessi

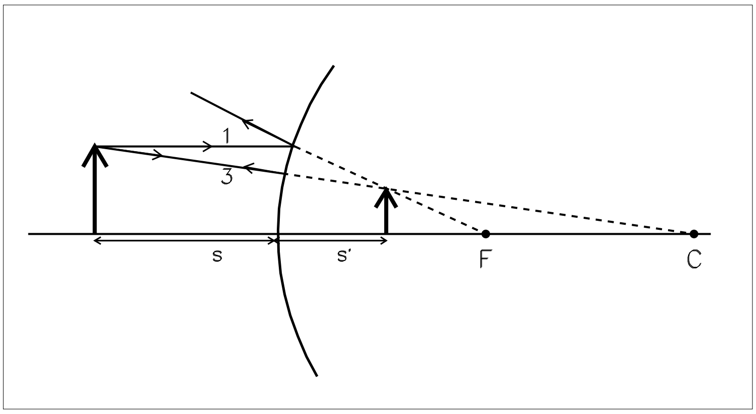

Figura 4.6:

La figura 4.6 mostra la costruzione grafica dell'immagine di un oggetto data da uno specchio sferico convesso. Il raggio passante per il centro di curvatura C é perpendicolare allo specchio e si riflette su se' stesso. Il raggio parallelo all'asse si riflette come se provenisse dal fuoco F posto dietro lo specchio. Si puó vedere che l'immagine si forma dietro lo specchio ed é pertanto virtuale. Risulta essere diritta e rimpicciolita.

4.5 Riassunto

Dalle formule (4.7) e (4.8) si possono trarre le seguenti conclusioni sulle immagini fornite dagli specchi sferici e piani:

specchio concavo $r > 0,\ f > 0$	specchio convesso $r < 0,\ f < 0$	specchio piano $r = \infty,\ f = \infty$
$s > r/2$: $s' > 0$ $G_{lt} < -1$ se $2f > s > f$ $-1 < G_{lt} < 0$ se $s > 2f$ $s < r/2$: $s' < 0$ e $\mid s' \mid > s$, $G_{lt} > +1$	$s' < 0$, $0 < G_{lt} < 1$	$s' = -s$, $G_{lt} = +1$

4.6 Superfici rifrangenti: diottro sferico

Consideriamo ora il caso di raggi emessi da una sorgente puntiforme che incidono su una superficie sferica che separa due mezzi con indici di rifrazione diversi n_1 e n_2: ciascuno di questi raggi subisce una rifrazione e si propaga al di lá della supeficie secondo una direzione diversa da quella di incidenza.

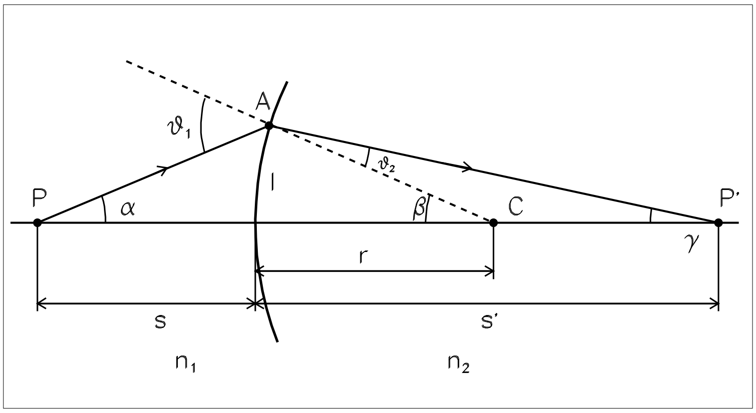

Figura 4.7:

Anche in questo caso i raggi parassiali convergono tutti in un punto posto dietro (davanti) la superficie che prende il nome immagine reale (virtuale). La formazione delle immagini per rifrazione su tale superficie puó essere derivata considerando la figura 4.7: in essa $n_2 > n_1$ e pertanto la luce si propaga piú lentamente nel secondo mezzo. Applicando ai raggi parassiali la seconda legge di Snellius–Descartes e le approssimazioni per i piccoli angoli si puó dedurre un'equazione che fornisce la distanza dell'immagine a partire dalla distanza dell'oggetto, dal raggio di curvatura e dagli indici di rifrazione.

Nella figura viene considerato un raggio parassiale generico; gli angoli θ_1 e θ_2 sono legati dalla seconda legge di Descartes:

$$n_1 \; sin \; \theta_1 \;\; = \;\; n_2 \; sin \; \theta_2 \tag{4.9}$$

che nel caso di piccoli angoli diventa:

$$n_1 \; \theta_1 \;\; = \;\; n_2 \; \theta_2 \tag{4.10}$$

Dal triangolo ACP' si ottiene:

$$\beta = \theta_2 + \gamma = \frac{n_1}{n_2} \; \theta_1 + \gamma \tag{4.11}$$

e dal triangolo PAC:

$$\theta_1 = \alpha + \beta \tag{4.12}$$

Eliminando θ_1 si ottiene:

$$n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta \tag{4.13}$$

Usando le approssimazioni per i piccoli angoli, valide per raggi parassiali, $\alpha \sim l/s$, $\beta \sim l/r$, $\gamma \sim l/s'$, si ottiene:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \tag{4.14}$$

che é nota come **formula di Gauss**. Nella rifrazione, le immagini reali si formano dietro la superficie rifrangente, nello **spazio di trasmissione**, mentre le immagini virtuali si formano davanti alla superficie rifrangente, nello **spazio di incidenza**. Le convenzioni per i segni usate per la rifrazione sono riportate nella tabella seguente.

s:	+ se l'oggetto é davanti la superficie (spazio di incidenza) – se l'oggetto é dietro la superficie (spazio di trasmissione)
s':	+ se l'immagine é dietro la superficie (spazio di trasmissione) – se l'immagine é davanti la superficie (spazio di incidenza)
r, f:	+ se il centro di curvatura é nello spazio di trasmissione – se il centro di curvatura é nello spazio di incidenza

Confrontando queste convenzioni con quelle per la riflessione si puó osservare che s', r, f sono positivi se l'immagine o il centro di curvatura si trovano nello spazio in cui si propagano la luce rifratta o riflessa rispettivamente.

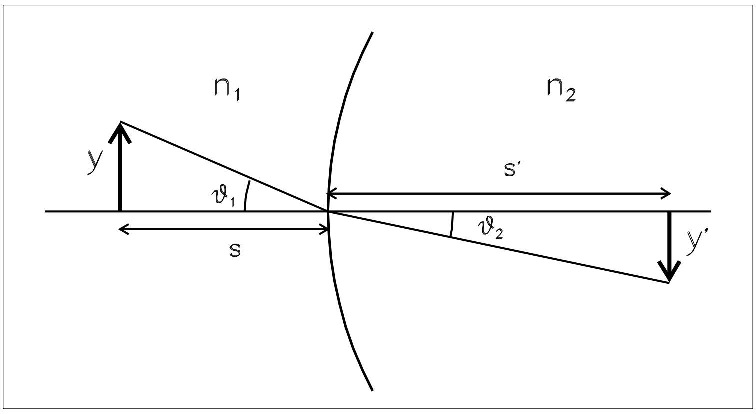

Figura 4.8:

Per l'ingrandimento lineare trasversale, consideriamo la figura 4.8: il raggio tracciato a partire dall'estremo superiore dell'oggetto nel mezzo 1 si rifrange nel mezzo 2 avvicinandosi alla normale dato che $n_2 > n_1$; vale sempre:

$$n_1 \; sin \; \theta_1 \;\; = \;\; n_2 \; sin \; \theta_2 \tag{4.15}$$

ma si vede anche che:

$$tg \; \theta_1 = \frac{y}{s} \tag{4.16}$$

$$tg \; \theta_2 = -\frac{y'}{s'} \tag{4.17}$$

(notiamo che y' é negativa). Per piccoli angoli $sin \; \alpha \;\; \sim \;\; tg \; \alpha$ perció la seconda legge di Snellius diventa:

$$n_1 \; \frac{y}{s} = n_2 \; \frac{-y'}{s'} \tag{4.18}$$

e per l'ingrandimento lineare trasversale:

$$G_{lt} = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \tag{4.19}$$

La formula (4.14) puó essere usata per calcolare la distanza apparente di un oggetto immerso in acqua (n_1=1.33) quando l'osservatore si trova sulla verticale passante per l'oggetto ($n_2 = 1$). In questo caso la superficie rifrangente é piana ed ha perció raggio di curvatura infinito; dalla (4.14) si ha allora:

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = 0 \tag{4.20}$$

Perció la profonditá apparente risulta:

$$s' = -\frac{n_2}{n_1}s$$

Il segno negativo indica che l'immagine é virtuale e si forma dalla stessa parte della superficie rifrangente dove si trova l'oggetto. L'ingrandimento lineare é:

$$G_{lt} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = +1$$

La profonditá apparente é uguale alla profonditá reale divisa per l'indice di rifrazione dell'acqua e l'immagine mantiene le dimensioni dell'oggetto.

Esempio:

Un pesce è in una vaschetta sferica di vetro piena di acqua di indice di rifrazione 1.33. Il raggio della vaschetta è 15 cm. Il pesce guarda attraverso la vaschetta e vede un gatto accucciato sul tavolocon il naso a 10 cm dalla vaschetta. Dove si forma l'immagine del naso del gatto e quanto vale il suo ingrandimento lineare trasversale? Si trascuri ogni effetto della parete sottile di vetro della vaschetta.

La distanza dell'oggetto, misurata tra il gatto e la vaschetta, è 10 cm. Gli indici di rifrazione sono n_1=1 e n_2=1.33. Il raggio di curvatura è +15 cm. Quindi, per l'equazione (4.14), la distanza dell'immagine è:

$$\frac{1.00}{10\ cm} + \frac{1.33}{s'} = \frac{1.33 - 1.00}{15\ cm} \tag{4.21}$$

Risolvendo rispetto a s', si ottiene:

$$s' = -17.1\ cm \tag{4.22}$$

Il fatto che la distanza dell'immagine è negativa significa che l'immagine è virtuale e si forma davanti alla superficie rifrangente, nello spazio in cui si trova l'oggetto.

L'ingrandimento lineare trasversale dell'immagine è:

$$G_{lt} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} = -\frac{-17.1\ cm}{1.33\ 10\ cm} = 1.29 \tag{4.23}$$

Perciò il gatto appare più lontano e un po' più grande

4.7 Lenti sottili

Le equazioni ottenute nel paragrafo precedente per il diottro sferico possono essere usate per determinare il percorso di un raggio parassiale attraverso varie superfici rifrangenti e ottenere così la posizione e le dimensioni dell'immagine di un oggetto formato da un sistema ottico. Un sistema ottico semplice e di particolare interesse é la **lente sottile**, cioé una successione di due diottri sferici. Per determinare la posizione dell'immagine prodotta da una lente sottile si considera separatamente la rifrazione a ciascuna superficie rifrangente per ottenere un'equazione che metta in relazione la distanza dell'immagine con quella dell'oggetto, i due raggi di curvatura e l'indice di rifrazione della lente (che si suppone normalmente immersa in aria, anche se, in generale, i mezzi a destra e a sinistra della lente avranno indici di rifrazione diversi).

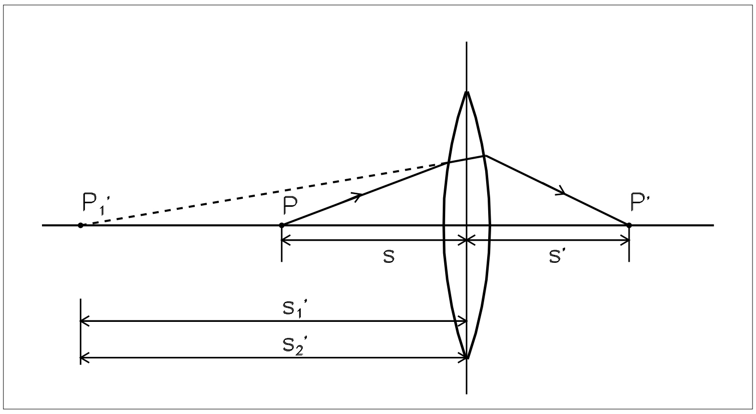

Figura 4.9:

Consideriamo la figura 4.9, in cui, come di solito, si considera un generico raggio parassiale emesso da una sorgente (oggetto) puntiforme posta sull'asse ottico di una lente molto sottile con indice di rifrazione n, immersa in aria, e con raggi di curvatura r_1 e r_2. Se l'oggetto si trova a distanza s dalla prima superficie la distanza s_1' dell'immagine P_1' formata dalla rifrazione a questa é data da:

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s_1'} = \frac{n-1}{r_1} \tag{4.24}$$

e risulta negativa, cioé l'immagine é virtuale e si trova nello spazio di incidenza del primo diottro. Questa immagine non si forma perché la luce viene rifratta di nuovo alla seconda superficie ma diventa l'oggetto per la seconda rifrazione: i raggi rifratti dalla prima superficie incidono sulla seconda sotto gli stessi angoli sotto cui inciderebbero se ci fosse un oggetto in questo punto immagine. Dato che la lente ha spessore trascurabile la distanza dell'oggetto é uguale in valore assoluto a s'_1 ma é positiva, dato che si trova nello spazio di incidenza del secondo diottro: $s_2 = -s'_1$. Per la seconda superficie vale l'equazione:

$$\frac{n}{-s'_1} + \frac{1}{s'} = \frac{1-n}{r_2} \tag{4.25}$$

dalle (4.24) e (4.25) si ottiene:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{4.26}$$

Come nel caso degli specchi la distanza focale di una lente sottile é per definizione la distanza dell'immagine quando l'oggetto é a distanza infinita; ponendo s=∞ ed indicando con f la distanza dell'immagine s', si ottiene:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{4.27}$$

che é detta **equazione dei fabbricanti di lenti**; sostituendo nella (4.26) si ha:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \tag{4.28}$$

che é la **formula per le lenti sottili**. Anche nel caso della lente sottile tutti i raggi parassiali provenienti dal punto oggetto vengono fatti convergere nel punto immagine, se l'immagine é reale, o paiono divergere da esso, se l'immagine é virtuale.

Nel caso delle lenti la distanza dell'immagine s' é positiva se l'immagine si forma nello spazio di trasmissione della lente, cioé dalla parte opposta allo spazio di incidenza della luce; il raggio, come nel caso della rifrazione ad una singola superficie, é positivo se il centro di curvatura si trova nello spazio di trasmissione, negativo se si trova nello spazio di incidenza.

Poiché l'indice di rifrazione n é sempre maggiore di 1, nel caso di una **lente biconvessa** che é una lente **convergente** (vedi figura 4.10 sinistra) $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ e la distanza focale risulta positiva e la lente é detta anche positiva. Ogni lente che é piú spessa al centro che al bordo é una lente convergente. Al contrario, una lente biconcava (vedi figura 4.10 destra), che é piu' sottile al centro che al bordo, é una lente **divergente**, $r_1 < 0,\ r_2 > 0$ e la distanza focale risulta negativa: la lente é detta anche negativa.

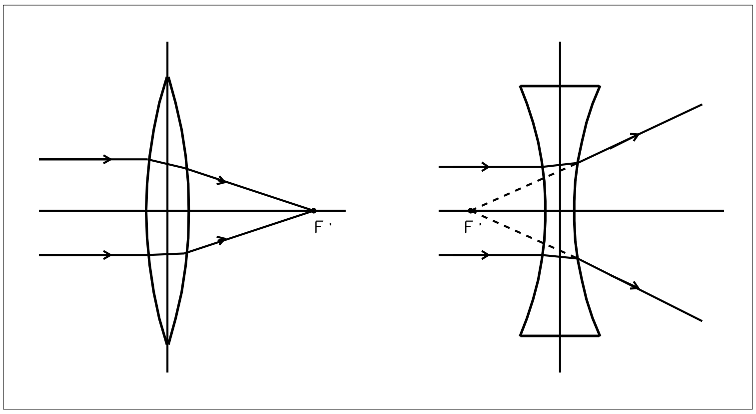

Figura 4.10:

Se si inverte la direzione orientata di propagazione della luce incidente sulla lente l'ordine delle superfici si inverte ma la distanza focale resta invariata. Se un fascio parallelo di luce incide sulla lente da sinistra esso viene fatto convergere in un punto posto ad una distanza pari ad f a destra della lente; se un fascio parallelo incide da destra esso viene fatto convergere in un punto posto ad una distanza pari ad f a sinistra della lente. Entrambi questi punti sono fuochi della lente.

Per l'invertibilitá del cammino luminoso la luce emergente da un fuoco e incidente sulla lente emergerá dalla lente sotto forma di un fascio parallelo. In particolare, se si specifica la direzione orientata di propagazione della luce, il punto oggetto per cui la luce emerge sotto forma di fascio parallelo é detto **primo fuoco** F e il punto in cui un fascio parallelo incidente viene fatto convergere é detto **secondo fuoco** della lente. Per una lente convergente il primo fuoco é nello spazio di incidenza, il secondo nello spazio di trasmissione; l'opposto vale per una lente divergente. Se il fascio parallelo incide sulla lente sotto un piccolo angolo con l'asse, esso viene fatto convergere in un punto giacente nel **piano focale**, posto a distanza f dalla lente e perpendicolare all'asse ottico.

4.8 Costruzione grafica delle immagini formate dalle lenti

Per localizzare le immagini formate dalle lenti conviene usare un metodo grafico (anche se e' piú approssimato). Si suppone che i raggi luminosi deviino quando incontrano il piano centrale della lente sottile: come per gli specchi la costruzione viene data dalla intersezione dei raggi principali.

Lente convergente

I raggi principali per la lente convergente sono i seguenti:

1. il **raggio incidente parallelo all'asse** che emerge dalla lente passando per il secondo fuoco;

2. il **raggio incidente passante per il centro** che emerge dalla lente senza essere deviato (le facce della lente sono parallele in questo punto e il raggio pertanto emerge nella stessa direzione solo lievemente spostato);

3. il **raggio incidente passante per il primo fuoco** che emerge dalla lente parallelamente all'asse.

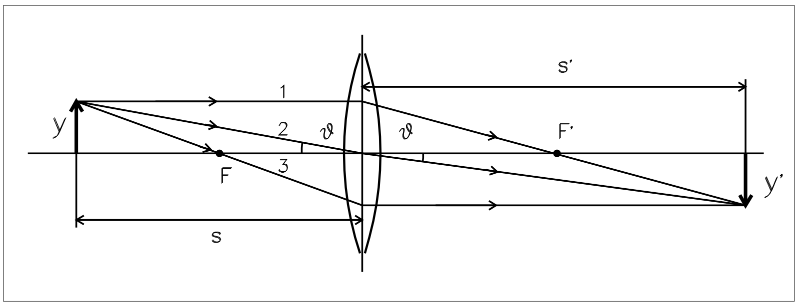

Figura 4.11:

I tre raggi convergono nel punto immagine, come illustrato in figura 4.11, che mostra un caso in cui l'immagine é capovolta. Dalla figura si puó vedere che:

$$tg\ \theta = y/s = -y'/s' \tag{4.29}$$

e perció l'ingrandimento lineare trasversale risulta:

$$G_{lt} = y'/y = -s'/s \tag{4.30}$$

come per gli specchi.

Lente divergente

I raggi principali per la lente convergente sono i seguenti:

1. il **raggio incidente parallelo all'asse** che diverge dalla lente come se uscisse dal secondo fuoco;

2. il **raggio incidente passante per il centro** che emerge dalla lente senza essere deviato;

3. il **raggio incidente passante per il primo fuoco** che emerge dalla lente parallelamente all'asse.

La costruzione é illustrata in figura 4.12.

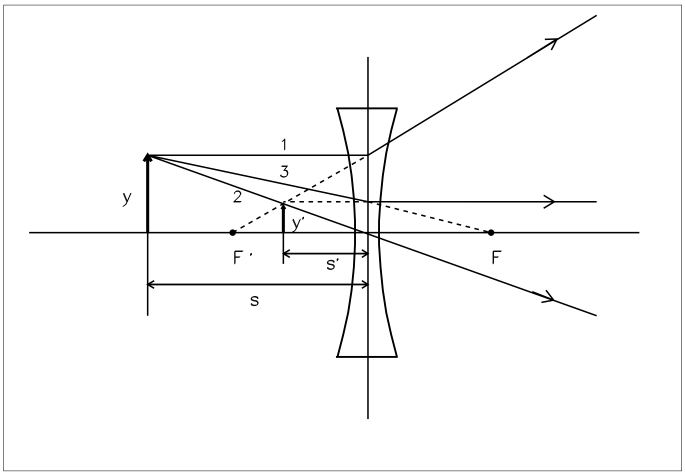

Figura 4.12:

4.9 Riassunto

Dalle formule (4.28) e (3.27), che riscriviamo qui come:

$$s' = -\frac{fs}{f-s} \tag{4.31}$$

$$G_{lt} = y'/y = -s'/s = \frac{f}{f-s} \tag{4.32}$$

si puó ricavare per le immagini formate da lenti sottili la seguente tabella riassuntiva (si suppone che l'oggetto sia reale, cioé che sia s >0):

lente convergente ($s < f$)	s'<0; |s'| >s	$G_{lt} > +1$
lente convergente ($s > f$)	$s' > 0$; $\|s'\| > s$	$G_{lt} < -1$ se $2f > s > f$ $-1 < G_{lt} < 0$ se $s > 2f$
lente divergente	$s' < 0$; $\|s'\| < s$	$0 < G_{lt} < 1$

4.10 Esempi

1. **L'occhio**

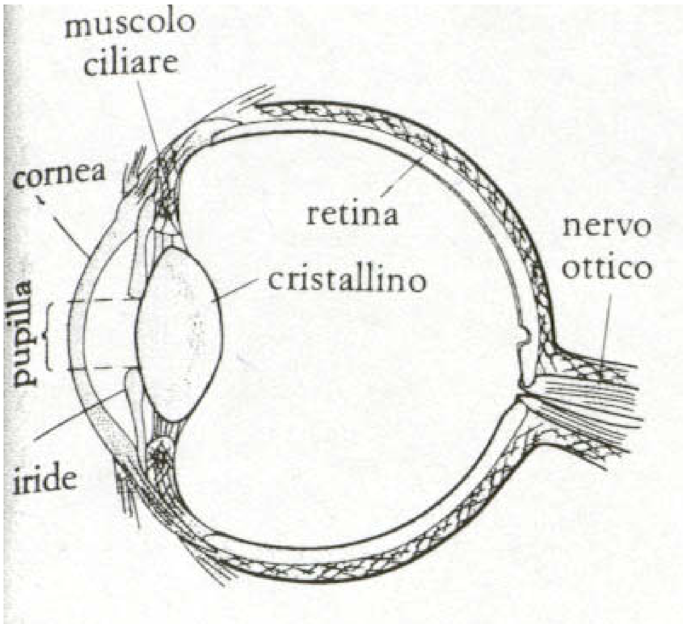

Figura 4.13:

La figura 4.13 rappresenta una sezione dell'occhio: la luce entra nell'occhio attraverso un'apertura variabile, la pupilla, e viene fatta convergere dal sistema ottico cornea–cristallino (lente convergente) sulla retina. La curvatura del cristallino puó venire leggermente modificata dall'azione del muscolo ciliare; quando l'occhio osserva un oggetto lontano, il muscolo ciliare é rilassato e il sistema cornea–cristallino ha la massima lunghezza focale, pari a circa 2.5 cm , cioé la distanza tra la cornea e la retina. Se l'oggetto si avvicina il muscolo ciliare diminuisce leggermente il raggio di curvatura del cristallino (r_2) facendo pertanto diminuire la distanza focale in modo che l'immagine si formi ancora sulla retina (é il caso della riga 2 della tabella precedente). Questo processo é detto

accomodamento. Se l'oggetto é troppo vicino all'occhio, il cristallino non riesce piú a formare un'immagine nitida sulla retina e ne risulta un'immagine sfuocata. Il punto piú vicino di cui il cristallino riesce a formare un'immagine nitida sulla retina é detto **punto prossimo**; in condizioni di riposo l'occhio normale é accomodato all'infinito, ma esso puó senza fatica rimanere accomodato a lungo alla distanza di 25 cm, detta **distanza della visione distinta**.

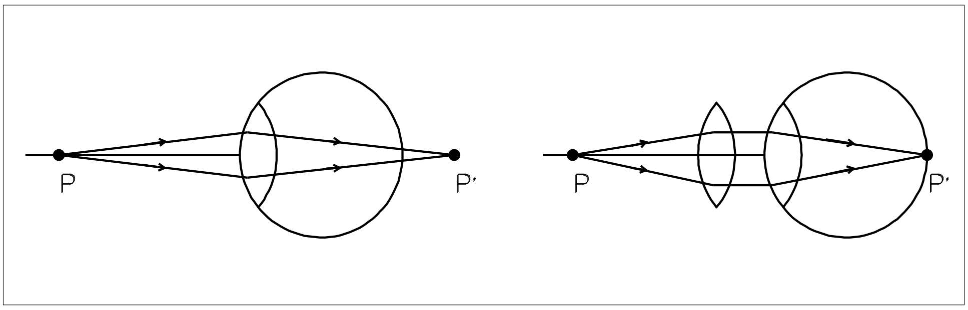

Figura 4.14:

Se la convergenza dell'occhio é insufficiente, le immagini degli oggetti vicini si formano dietro la retina e l'occhio é detto **ipermetrope**. Una persona ipermetrope é capace di vedere distintamente gli oggetti lontani, per la cui visione é richiesta una convergenza piccola, ma ha difficoltá nel vedere distintamente gli oggetti vicini. L'ipermetropia puó essere corretta con una lente convergente (vedi figura 4.14).

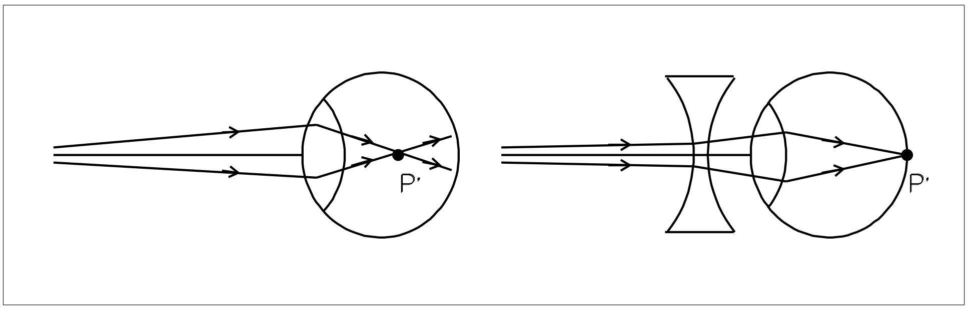

Figura 4.15:

Se, invece, la convergenza dell'occhio é eccessiva le immagini degli oggetti lontani si formano davanti alla retina e l'occhio é **miope** (vedi figura 4.15); una persona miope vede, invece, distintamente gli oggetti vicini perché i raggi che escono con una grande divergenza possono essere fatti convergere sulla retina. La miopia si corregge con una lente divergente.

La grandezza apparente di un oggetto é determinata dalla grandezza dell'immagine sulla retina: questa é maggiore per un oggetto vicino che per uno lontano, come mostrato in figura 4.16; pertanto anche se l'altezza di un oggetto non varia, la sua grandezza apparente dipende dalla sua distanza dall'occhio. Una misura conveniente della grandezza dell'immagine sulla retina é l'angolo visuale θ sotto cui l'occhio vede l'oggetto:

$$\theta \simeq \frac{y'}{2.5\ cm} \tag{4.33}$$

$$\theta \simeq \frac{y}{s_1} \tag{4.34}$$

e perció:

$$y' = (2.5\ cm)\theta = (2.5\ cm)\ \frac{y}{s_1} \tag{4.35}$$

cioé l'altezza dell'immagine é direttamente proporzionale all'altezza dell'oggetto e inversamente proporzionale alla distanza tra l'oggetto e l'occhio

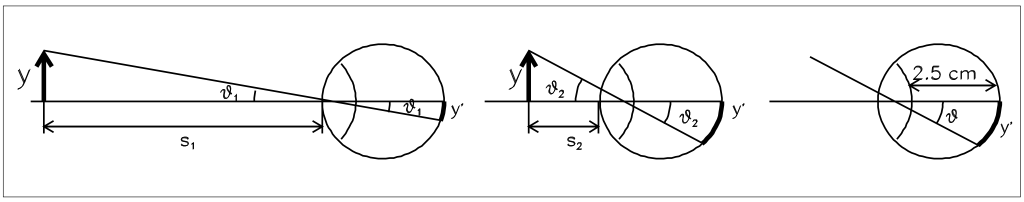

Figura 4.16:

2. La lente di ingrandimento

   Per aumentare la grandezza apparente di un oggetto si puó diminuire la sua distanza dall'occhio fino a portarlo piú vicino del punto prossimo usando una lente convergente che crei una immagine virtuale dell'oggetto ad una distanza infinita. Tale lente convergente é detta **lente di ingrandimento** o **microscopio semplice**. Il suo funzionamento é illustrato in figura 4.17: un oggetto di altezza y si trova nel punto prossimo dell'occhio, ad una distanza x_{pp}. L'altezza dell'immagine sulla retina é proporzionale all'angolo visuale θ_0 sotto cui l'occhio vede l'oggetto:

$$\theta_0 = \frac{y}{x_{pp}} \tag{4.36}$$

Se davanti all'occhio si pone una lente convergente con distanza focale f minore di x_{pp} (s<f nella tabella riassuntiva) e l'oggetto viene posto (circa) nel primo fuoco della lente, i raggi che emergono da essa sono (quasi) paralleli e l'immagine virtuale é a distanza infinita davanti alla lente; tali raggi vengono fatti convergere sulla retina dall'occhio rilassato, posto tra la lente e il suo secondo fuoco. Se la lente é addossata all'occhio l'angolo visuale é ora:

$$\theta = \frac{y}{f} \tag{4.37}$$

Il rapporto θ/θ_0 é detto **ingrandimento visuale G_0 della lente**:

$$G_0 = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{x_{pp}}{f} \tag{4.38}$$

Con una lente semplice si arriva a valori di G_0 dell'ordine di 3 (f = 8 cm); per ingrandimenti maggiori bisogna usare lenti composte (corrette per le aberrazioni) e si raggiungono valori di G_0 compresi tra 10 e 20.

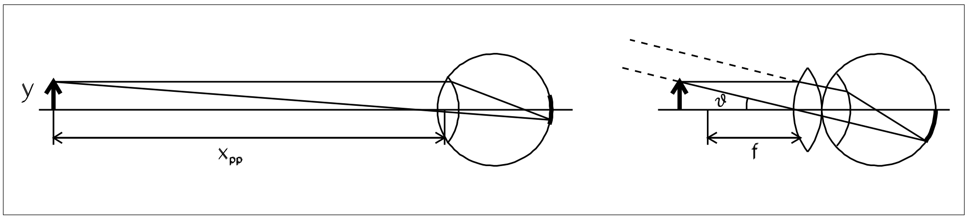

Figura 4.17:

4.11 Sistemi di lenti

Se si ha un sistema costituito da due o piú lenti, si puó localizzare l'immagine finale formata dal sistema trovando la distanza dell'immagine fornita dalla prima lente e usandola insieme alla distanza tra le lenti per trovare la distanza dell'oggetto dalla seconda lente: si considera ogni immagine, reale o meno, come oggetto per la lente successiva.

Si considerino due lenti sottili, di distanze focali f_1 e f_2, addossate. Si dimostri che la distanza focale equivalente del sistema, f, è data da:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \tag{4.39}$$

Sia s la distanza dell'oggetto per la prima lente (e, perciò, per il sistema di lenti) e sia $s_1^{'}$ la distanza dell'immagine. Applicando la formula delle lenti sottili alla prima lente, si ottiene:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s_1^{'}} = \frac{1}{f_1} \tag{4.40}$$

Poichè le due lenti sono addossate, la distanza dell'oggetto per la seconda lente è l'opposto della distanza dell'immagine formata dalla prima lente, cosicchè $s_2 = -s_1^{'}$. Denotando con $s^{'}$ la distanza dell'immagine finale, si ottiene per la seconda lente:

$$\frac{1}{-s_1^{'}} + \frac{1}{s^{'}} = \frac{1}{f_2} \tag{4.41}$$

Sommando membro a membro queste due equazioni per eliminare $s_1^{'}$, si ottiene:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s^{'}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f} \tag{4.42}$$

Si può dunque concludere che quando due lenti sono addossate (o a breve distanza relativa), i reciproci delle loro distanze focali si sommano. Il reciproco della distanza focale è edtto **potere diottrico** (o **potenza** o **vergenza**) **di una lente** (o di un sistema ottico in generale). Se la distanza focale è espressa in metri, il potere diottrico D è espresso in metri alla meno uno (m^{-1}), un'unità di misura chiamata **diottria** (D):

$$P = \frac{1}{f} \tag{4.43}$$

Il potere diottrico di una lente misura la sua capacità di far convergere un fascio parallelo di raggi luminosi in un punto a breve distanza dalla lente:

minore è la distanza focale, maggiore è il potere diottrico. Per esempio, una lente avente la distanza focale di 25 cm = 0.25 m ha il potere diottrico di 4.0 D. Una lente avente la distanza focale di 10 cm = 0.1 m ha il potere diottrico di 10 D. Poichè la distanza focale di una lente divergente è negativa, anche il potere diottrico è negativo. (La vergenza prende il nome di convergenza se positiva, di divergenza se negativa.)

4.12 Esempi

1. **Il microscopio**

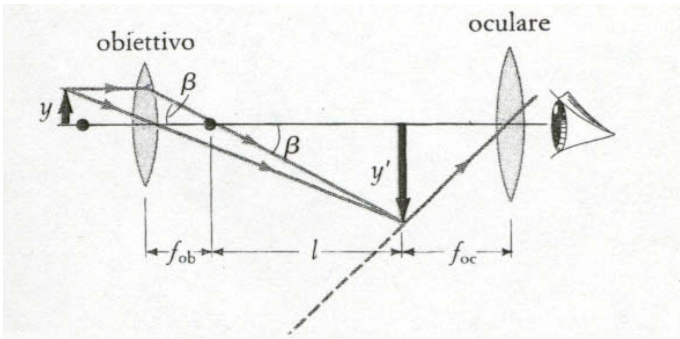

Figura 4.18:

Il microscopio é usato per osservare oggetti molto piccoli posti a distanze piccole. Nella sua forma piú semplice é costituito da due lenti convergenti (vedi figura 4.18): la lente piú vicina all'oggetto, detta **obiettivo**, forma un'immagine reale dell'oggetto che é ingrandita e capovolta ; la lente piú vicina all'occhio, detta **oculare**, é usata come lente di ingrandimento per osservare l'immagine dell'obiettivo. L'oculare é collocato in una posizione tale che l'immagine formata dall'obiettivo cada nel suo primo fuoco; cosí la luce emerge dall'oculare sotto forma di raggi paralleli, come se venissero "dall'infinito"; lo scopo dell'oculare é quello di permettere di vedere l'immagine ingrandita fornita dall'obiettivo nonostante che questa si trovi ad una distanza dall'occhio minore del punto prossimo. Siccome l'immagine data da una lente di ingrandimento, quale é l'oculare, é diritta, l'immagine finale formata dalle due lenti risulta capovolta. La distanza tra il secondo fuoco dell'obiettivo e il primo fuoco dell'oculare é detta **lunghezza ottica del tubo** l e il suo valore é tipicamente fissato a 16 cm. L'oggetto viene posto ad una distanza lievemente maggiore della distanza del primo fuoco dell'obiettivo in modo che si formi un'immagine ingrandita nel primo fuoco dell'oculare, alla distanza l+f_{ob}, dove f_{ob} é la distanza focale dell'obiettivo. Per l'ingrandimento lineare trasversale si ha:

$$tg\ \beta = \frac{y}{f_{ob}} = \frac{-y'}{l} \tag{4.44}$$

$$G_{lt,ob} = \frac{y'}{y} = -\frac{l}{f_{ob}} \tag{4.45}$$

L'ingrandimento visuale dell'oculare é:

$$G_{\theta,oc} = \frac{x_{pp}}{f_{oc}} \tag{4.46}$$

dove f_{oc} é la distanza focale dell'oculare e x_{pp} é la distanza del punto prossimo dell'occhio dell'osservatore. L'ingrandimento visuale del microscopio composto é dato da:

$$G_{\theta} = G_{\theta,ob}G_{lt,ob} = -\frac{x_{pp}}{f_{oc}}\frac{l}{f_{ob}} \tag{4.47}$$

2. Il telescopio

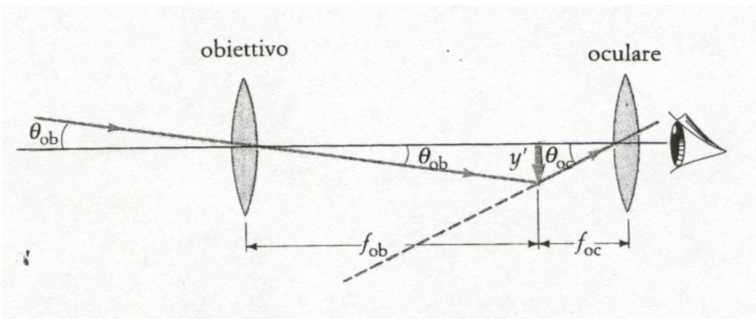

Figura 4.19:

Il telescopio (o cannocchiale) é usato per osservare oggetti molto lontani e spesso molto grandi. Il suo scopo é quello di avvicinare l'immagine dell'oggetto, cioé, di aumentare l'angolo visuale sotto cui l'occhio vede l'immagine in modo che l'oggetto appaia piú grande; é costituito da due lenti convergenti (vedi figura 4.19): un obiettivo che forma un'immagine reale capovolta e un oculare usato come lente di ingrandimento per osservare quell'immagine. Poiché l'oggetto é molto lontano, l'immagine formata dall'obiettivo giace nel suo fuoco ad una distanza f_{ob}; siccome la distanza dell'oggetto é molto maggiore di f_{ob}, l'immagine é molto piú piccola: lo scopo dell'obiettivo non é, infatti, quello di ingrandire l'oggetto, ma di formare un'immagine tanto vicina da poter essere osservata con l'oculare. Questa immagine si trova nel secondo fuoco dell'obiettivo e nel primo fuoco dell'oculare per cui la distanza tra obiettivo ed oculare sara' $f_{ob}+f_{oc}$.

L'ingrandimento visuale del cannocchiale é dato da θ_{oc}/θ_{ob}. Siccome valgono le seguenti formule:

$$tg\ \theta_{ob} = -\frac{y'}{f_{ob}} \tag{4.48}$$

$$tg\ \theta_{oc} = \frac{y'}{f_{oc}} \tag{4.49}$$

si ha:

$$G_\theta = \frac{\theta_{oc}}{\theta_{ob}} = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} \tag{4.50}$$

da cui si vede che per avere un grande ingrandimento é necessario avere un obiettivo con una grande distanza focale ed un oculare con una piccola distanza focale.

4.13 Aberrazioni delle lenti

Se i raggi uscenti da un oggetto puntiforme non vengono fatti convergere tutti in un singolo punto immagine, la conseguente confusione dell'immagine é detta **aberrazione**.

Se si considerano dei raggi paralleli all'asse di una lente avente superfici sferiche, i raggi che incidono su di essa in punti lontani dall'asse vengono deviati piú di quelli che incidono in punti vicini all'asse; pertanto, non passano per il fuoco definito per i raggi parassiali e, di conseguenza, non tutti i raggi vengono fatti convergere in un singolo punto, come illustrato in figura 4.20: al crescere della distanza tra il raggio e l'asse, il raggio viene deviato troppo e la posizione A dell'intersezione del raggio rifratto con l'asse si allontana sempre piú dal fuoco parassiale F. Per un generico raggio la distanza AF misura la **aberrazione sferica longitudinale** mentre la distanza BF

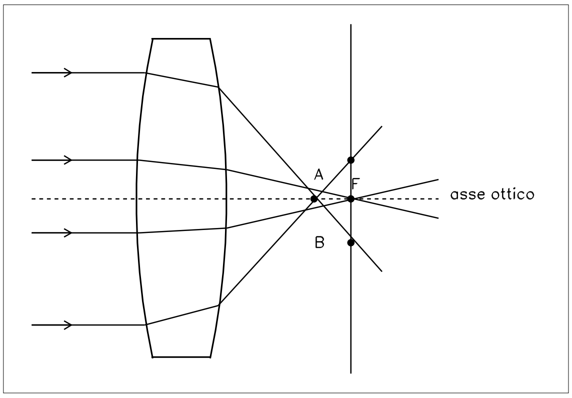

Figura 4.20:

misura la **aberrazione sferica trasversale**. L'immagine di un punto luminoso, formata da una lente con aberrazione di sfericitá, appare come una macchia circolare luminosa circondata da un alone di luce. Questo macchia circolare ha il diametro minimo in un punto dove prende il nome di **cerchio di minima confusione**. Questo tipo di aberrazione é simile alla aberrazione di sfericità degli specchi.

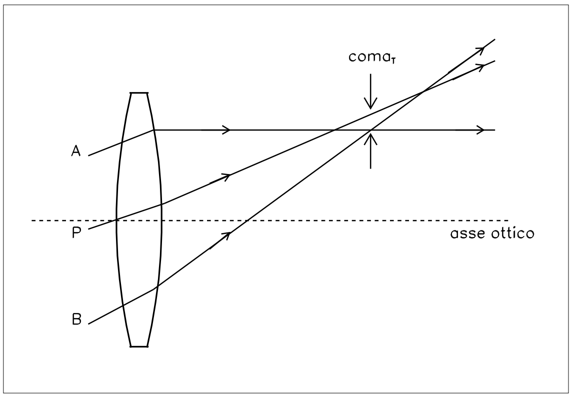

Figura 4.21:

Aberrazioni simili, ma piú complicate, dette **coma** e **astigmatismo** si hanno se gli oggetti sono fuori dell'asse. In particolare, si considerino, come indicato in figura 4.21, dei raggi tra di loro paralleli ma inclinati rispetto all'asse della lente: i raggi rifratti non si incontrano tutti nello stesso punto, come conseguenza della curvatura della lente, la cui superficie puó essere approssimata con un piano solo in zona parassiale. Siano A, B e P i raggi passanti per gli estremi ed il centro della lente: la distanza tra il raggio P e l'intersezione dei raggi rifratti A e B é il **coma tangenziale** della lente. L'immagine di un punto fuori asse, formata da una lente con coma, ricorda la forma di una cometa (da ció il nome della aberrazione).

L'aberrazione della forma dell'immagine di un oggetto esteso dovuta al fatto che l'ingrandimento dipende dalla distanza del punto oggetto dall'asse prende il nome di **distorsione**.

Un'aberrazione importante, da cui sono affette le lenti ma non gli specchi, é l'**aberrazione cromatica**, che é dovuta alla variazione dell'indice di rifrazione al variare della lunghezza d'onda: la distanza focale di una lente dipende dal suo indice di rifrazione e, perció, é diversa per lunghezze d'onda diverse. Poiché n é lievemente maggiore per la luce blu che per la luce rossa, la distanza focale per la luce blu sará minore di quella per la luce rossa.