

## 2.8 Strumenti per corrente alternata

Gli strumenti, voltmetri ed amperometri, usati per misure in regime continuo possono generalmente essere attraversati da corrente in un solo verso. Per poterli utilizzare anche nel caso di regime alternato é necessario modificare il circuito in modo da a) far passare per lo strumento la corrente solo quando ha un certo segno, (in questo caso la misura viene effettuata solo su mezza onda) oppure b) inserire lo strumento in modo che le correnti di segno opposto lo percorrano in senso inverso. I circuiti impiegati nei due casi, detti **circuiti raddrizzatori**, ricalcano gli schemi riportati nella figura 2.43 e sono, generalmente, implementati già all'interno del multimetro, quando si seleziona la modalità di misura in regime alternato. Strumenti con circuiti raddrizzatori di questo tipo misurano il valor medio della corrente o tensione raddrizzata; di solito sono però tarati in **valore efficace**.

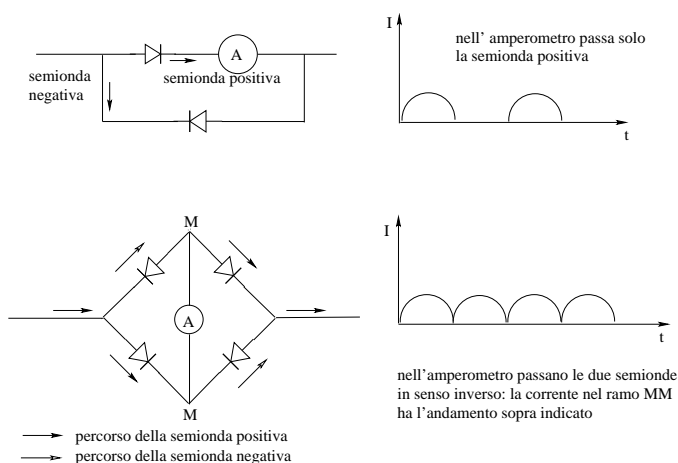


Figura 2.43:

### 2.8.1 L'oscilloscopio

L'oscilloscopio é uno strumento che permette di visualizzare delle forme d'onda sottoforma di tensioni variabili nel tempo (e al limite continue) applicate al suo ingresso; esso permette cioè di vedere lo sviluppo temporale della tensione applicata al suo ingresso per mezzo di un sistema basato sull'utilizzo di un pennello elettronico.

Uno schema dell'apparato é riportato in figura 2.44. Consiste di un tubo a vuoto contenente, nella configurazione base, il catodo (la sorgente di elettroni, emessi per emissione termoionica), due coppie di piastre deflettrici

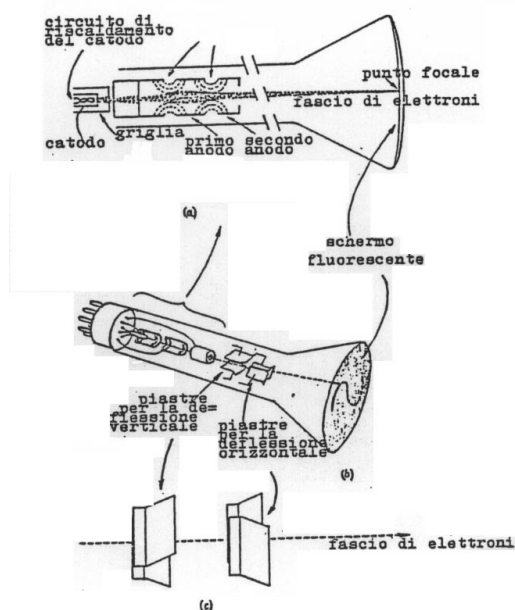


Figura 2.44:

e uno schermo fluorescente. Quest'ultimo é ricoperto da un *fosforo*, una sostanza che emette luce fosforescente visibile nel punto nel punto in cui é colpita da elettroni. L'intensità della luce dipende dal numero di elettroni per unità di tempo che arrivano su una data area dello schermo e può essere regolata facendo variare per mezzo di una griglia, tenuta a potenziale negativo rispetto al catodo, il numero di elettroni, ossia rallentandoli (o accelerandoli di meno) e diminuendo perciò il loro rateo.

Lo scopo é quello di produrre un sottile fascio di elettroni focalizzabile in un punto ben definito dello schermo fosforescente. Per ottenere questa focalizzazione gli elettroni vengono accelerati da due anodi tenuti a potenziale molto positivo rispetto al catodo e fatti a forma di cilindro cavo: gli elettroni che arrivano nel foro del primo cilindro con una direzione divergente sono costretti a convergere dal forte campo elettrostatico che trovano tra il primo e il secondo anodo, il quale, accelerandoli riduce lo spazio che essi possono percorrere il direzione perpendicolare a quella del fascio nel tempo impiegato a raggiungere lo schermo. Se il fascio non é ben focalizzato, cioè se colpisce lo schermo con una sezione non puntiforme, il fuoco può venire corretto variando il voltaggio di un anodo rispetto all'altro.

Il fascio di elettroni passa poi tra la prima coppia di piastre deflettrici, montate in un piano orizzontale. Applicando una d.d.p. a queste piastre, gli

elettroni vengono deviati verso la piastra piú positiva e quindi si ha una deviazione lungo l'asse verticale. Poi il fascio passa attraverso due piastre montate perpendicolarmente alle precedenti e quindi, applicando una d.d.p., si ha una deflessione nel piano orizzontale.

Perció la posizione del fascio di elettroni (e quindi del punto luminoso sullo schermo) dipende, istante per istante, dalle d.d.p. applicate alle due coppie di piastre nell'intervallo di tempo in cui gli elettroni sono transitati attraverso di esse (per il Teorema dell'impulso e della quantità di moto).

Per la maggior parte delle applicazioni, il punto luminoso viene spostato orizzontalmente sullo schermo a velocità costante variando linearmente la tensione sulle piastre verticali (linear sweep = spazzamento lineare). Che questo spostamento avvenga con velocità costante é di fondamentale importanza perché fornisce una scala uniforme dei tempi (base tempi) in funzione della quale si può descrivere il voltaggio applicato all'altra coppia di piastre, come illustrato in figura 2.45.

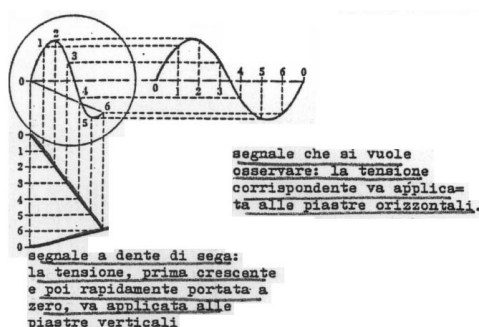


Figura 2.45:

Questa variazione lineare di tensione é generalmente realizzata con un segnale a “dente di sega”. Si usa dire che il fascio di elettroni “spazza” lo schermo a velocità costante e si chiama “sweep” il segnale a dente di sega. Alla fine di un segnale il fascio di elettroni viene portato rapidamente nella posizione iniziale, cioè la d.d.p. tra le piastre verticali, che nella prima parte del segnale era fatta crescere linearmente, viene riportata rapidamente a zero. Questo ritorno a zero richiede ovviamente un certo tempo ed é necessario interdire l'arrivo degli elettroni sullo schermo durante questo tempo per non vedere questa traccia di ritorno. Oltre al tubo a raggi catodici e al circuito che fornisce la base tempi, le componenti essenziali di un oscilloscopio sono:

- *amplificatore del segnale*: in genere vengono mandati all'oscilloscopio dei segnali il cui voltaggio non é sufficiente a deflettere in modo apprezzabile.

zabile il fascio di elettroni. Vengono allora usati degli amplificatori per aumentare il voltaggio al livello richiesto.

- *sincronizzatore*: é possibile vedere una forma d'onda ferma sullo schermo solo se il segnale é periodico ed é sincronizzato con la base tempi; in questo modo le figure descritte dal fascio di elettroni sullo schermo ad ogni periodo si sovrappongono esattamente. Il sincronismo é ottenuto variando la frequenza della base tempi.
- *trigger*: per fare delle misure di tempo e realizzare facilmente il sincronismo suddetto, la base tempi puó venire fatta partire a comando (“triggerata”) scegliendo il punto della forma d'onda in ingresso a cui far partire il segnale a dente di sega sulle piastre a deflessione orizzontale. Ogni volta che il segnale di ingresso ha un prefissato valore di tensione e segno della derivata, il fascio di elettroni si muove orizzontalmente sullo schermo. Completato il percorso sullo schermo, il fascio di elettroni ritorna nella posizione di partenza ed attende il prossimo comando. Il funzionamento del trigger é illustrato schematicamente in figura 2.46.
- *posizione orizzontale–verticale*: aumentando o diminuendo opportunamente la d.d.p. tra le piastre deflettrici, il fascio di elettroni, e quindi la traccia sullo schermo, puó venire spostata in alto, in basso, e a destra o a sinistra.

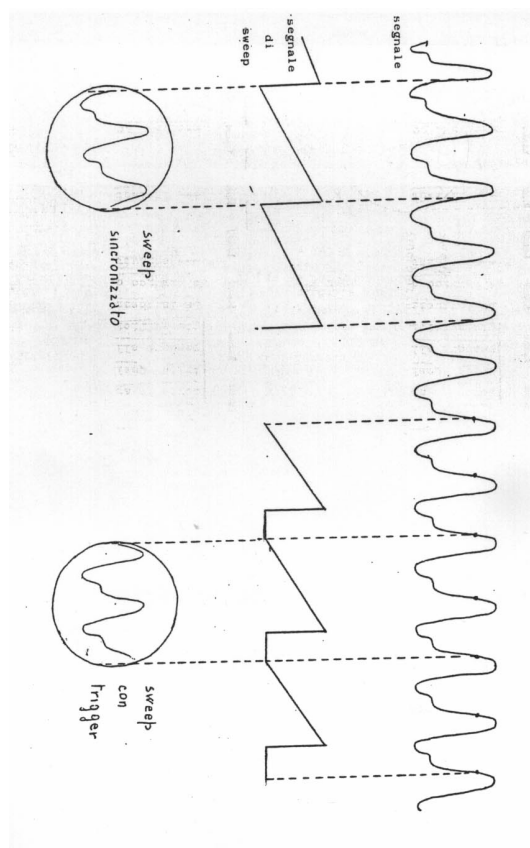


Figura 2.46:

## 2.9 Circuiti oscillanti – Facoltativo

Consideriamo un circuito costituito dalla composizione in serie di un condensatore di capacità  $C$  ed un induttore di induttanza  $L$  e dotato di un interruttore che permette di interrompere il circuito, come indicato in figura 2.47. Si supponga che all'istante di chiusura dell'interruttore, scelto come tempo  $t=0$ , su ciascuna delle armature del condensatore si trovi una carica  $Q_0$ ; la corrente sarà ovviamente nulla,  $i(0)=0$ , essendo il circuito aperto. Da  $t=0$  in poi, per la LTK ad ogni istante dovrà essere:

$$V_C + V_L = 0$$

ovvero:

$$\frac{Q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$$

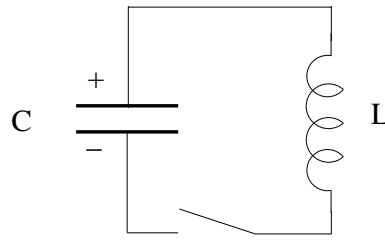


Figura 2.47:

ed anche

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

Introducendo il coefficiente  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  si ottiene l'equazione:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_0^2 Q = 0$$

Questa é una equazione differenziale lineare, del secondo ordine e a coefficienti costanti; la sua soluzione generale é una qualunque combinazione lineare di due soluzioni particolari, quali, ad esempio, le funzioni:

$$e^{j\omega_0 t} \quad \text{e} \quad e^{-j\omega_0 t}$$

come si può verificare sostituendole nell'equazione. La soluzione generale avrà la forma:

$$Q(t) = K_1 e^{j\omega_0 t} + K_2 e^{-j\omega_0 t}$$

dove  $K_1$  e  $K_2$  sono due costanti, generalmente complesse, che dipendono dalle condizioni iniziali del problema. Nel nostro caso le condizioni iniziali sono:

$$Q(0) = Q_0 \quad \text{e} \quad i(0) = 0$$

che si traducono in:

$$Q(0) = Q_0 \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 = Q_0$$

e

$$i(0) = 0 \quad \rightarrow \quad j\omega_0(K_1 - K_2) = 0$$

Risolvendo queste equazioni si ricava:  $K_1 = K_2 = \frac{Q_0}{2}$  e perciò:

$$Q(t) = \frac{Q_0}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) = Q_0 \cos \omega_0 t$$

Di conseguenza  $V_C$ ,  $i$  e  $V_L$  saranno dati da:

$$V_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_0}{C} \cos \omega_0 t$$

$$i = \frac{dQ}{dt} = -Q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t$$

$$V_L = L \frac{di}{dt} = -L Q_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t$$

L'andamento di queste grandezze é riportato in figura 2.48: la carica  $Q$  oscilla tra le due armature del condensatore con andamento cosinusoidale di pulsazione  $\omega_0$ , che prende pertanto il nome di **pulsazione propria del circuito**; la tensione ai capi del condensatore é in ritardo di  $\pi/2$  rispetto alla corrente  $i$  mentre la tensione ai capi dell'induttore é in anticipo di  $\pi/2$  rispetto alla corrente. In questo caso ideale, privo di elementi dissipativi, il moto delle cariche non si arresta, cosí come avviene nel caso di una molla compressa e lasciata libera di oscillare attorno alla sua posizione di equilibrio in assenza di attrito: infatti l'equazione differenziale che descrive l'andamento della carica é analoga all'equazione di una molla, dove si sostituisca a  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$   $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , con  $k$  costante elastica della molla ed  $m$  massa della molla: é come se il condensatore si comportasse come una molla nei confronti della carica elettrica, esercitando su di essa una forza di richiamo proporzionale al suo valore.

## 2.10 Oscillazioni smorzate in un circuito RLC in serie – Facoltativo

Nella realtà, dato che ad ogni induttanza é sempre associata una resistenza che puó essere pensata come un elemento circuitale posto in serie, il circuito considerato nel paragrafo precedente non rappresenta che una pura astrazione, mentre il circuito effettivamente realizzabile é quello di figura 2.49, comprendente tre elementi in serie: una capacità  $C$ , un'induttanza  $L$  ed una resistenza  $R$ . Si indichi sempre con  $Q_0$  la carica inizialmente presente sulle armature del condensatore e sia ancora  $t=0$  l'istante della chiusura dell'interruttore.

Per  $t>0$  la LTK si scriverá:

$$V_C + V_L + V_R = 0$$

ovvero:

$$\frac{Q}{C} + L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

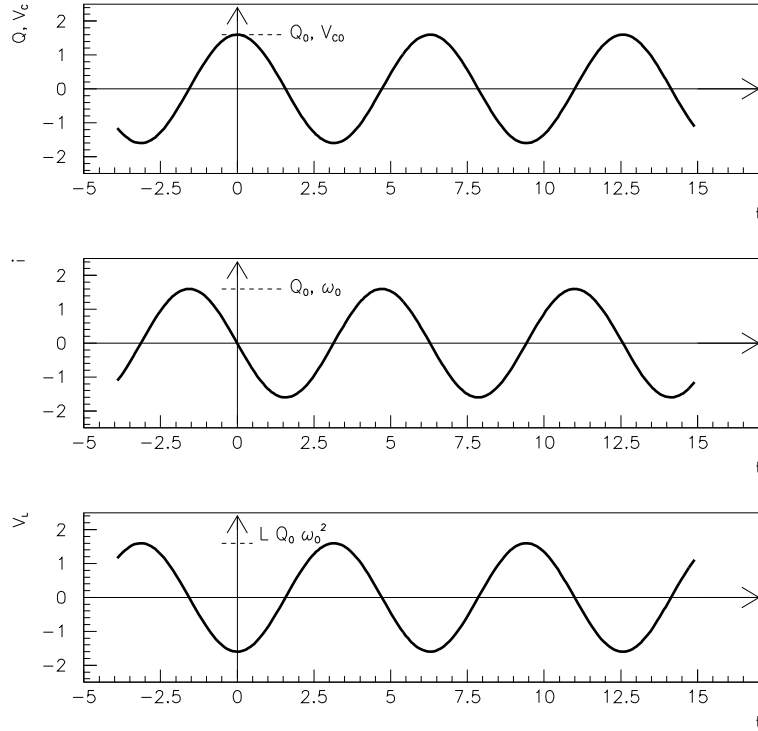


Figura 2.48:

ed anche

$$\frac{Q}{C} + L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} = 0$$

ovvero

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\alpha \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0$$

avendo di nuovo introdotto la pulsazione propria del circuito  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  ed anche la costante  $\alpha = \frac{R}{2L}$ . L'equazione ottenuta é del tutto simile all'equazione differenziale che si ottiene nello studio delle oscillazioni compiute da un punto materiale soggetto ad una forza di richiamo elastica (termine dovuto alla capacità) ed a una forza di tipo viscoso (termine dovuto alla resistenza).

Una soluzione particolare dell'equazione ha la forma  $Q(t) = ke^{\gamma t}$ , dove la costante  $k$  viene determinata a partire dalle condizioni iniziali. Sostituendo si ottiene:

$$Q_0 \gamma^2 e^{\gamma t} + 2\alpha Q_0 \gamma e^{\gamma t} + \omega_0^2 Q_0 e^{\gamma t} = 0$$



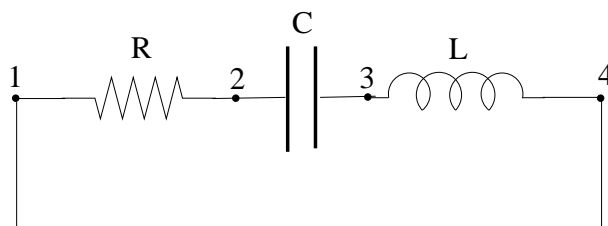


Figura 2.49:

che si riduce facilmente a

$$\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$$

equazione che prende il nome di *equazione caratteristica associata all'equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine*. Risolvendo quest'ultima equazione si ottengono i valori di  $\gamma$  per i quali la funzione  $Q(t) = ke^{\gamma t}$  é soluzione dell'equazione differenziale:

$$\gamma_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Si presentano tre casi differenti:

1.  $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$ , cioè  $R^2 > \frac{4L}{C}$ : le radici dell'equazione caratteristica,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , sono reali ed entrambe negative; la soluzione generale dell'equazione differenziale é la somma di due esponenziali decrescenti:

$$Q(t) = K_1 e^{-|\gamma_1|t} + K_2 e^{-|\gamma_2|t}$$

dove  $K_1$  e  $K_2$  sono determinati a partire dalle condizioni iniziali:

$$Q(0) = Q_0 \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 = Q_0$$

e

$$i(0) = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 (-|\gamma_1|) + K_2 (-|\gamma_2|) = 0$$

In questo caso si é in presenza di un **forte smorzamento**:  $R^2 > \frac{4L}{C}$ , cioè la resistenza  $R$  é sufficientemente grande per impedire ogni oscillazione di carica.

2.  $\alpha^2 - \omega_0^2 < 0$ , cioè  $R^2 < \frac{4L}{C}$ : le radici dell'equazione caratteristica,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , sono complesse; indicando con

$$-\Omega^2 = \alpha^2 - \omega_0^2$$

si avrà:

$$\gamma_1 = -\alpha + j\Omega^2 \quad \text{e} \quad \gamma_2 = -\alpha - j\Omega^2$$

da cui:

$$Q(t) = e^{-\alpha t} (K_1 e^{j\Omega t} + K_2 e^{-j\Omega t})$$

che, insieme alle condizioni iniziali:

$$Q(0) = Q_0 \quad \rightarrow \quad K_1 + K_2 = Q_0$$

e

$$i(0) = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 - K_2 = 0$$

fornisce come soluzione:

$$Q(t) = e^{-\alpha t} \frac{Q_0}{2} (e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t}) = e^{-\alpha t} Q_0 \cos \Omega t$$

Questa funzione é una **sinusoide smorzata** dal fattore  $e^{-\alpha t}$ , dove la costante  $\alpha$  prende il nome di **costante di smorzamento del circuito**. In questo caso, inoltre, la carica oscilla tra le armature del condensatore con una frequenza pari a:

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

che risulta inferiore alla frequenza propria  $\omega_0$  che caratterizza, come visto, le oscillazioni nel caso ideale, in assenza di resistenza. La frequenza di oscillazione  $\Omega$  approssima il valore ideale  $\omega_0$  tanto meglio quanto piú  $R$  é piccola, cioè quanto piú l'induttore é prossimo ad un elemento ideale. L'effetto dell'inserimento della resistenza consiste pertanto sia in una riduzione della frequenza propria del sistema, sia in uno smorzamento dell'ampiezza dell'oscillazione: entrambi gli effetti dipendono, infatti, dal valore di  $R$  e sono tanto piú trascurabili quanto piú  $R$ , e di conseguenza  $\alpha$ , é piccola.

3.  $\alpha^2 - \omega_0^2 = 0$ , cioè  $R^2 = \frac{4L}{C}$ : le radici della equazione caratteristica coincidono:

$$\gamma_1 = \gamma_2 = -\alpha = -\omega_0$$

In tal caso la soluzione dell'equazione differenziale omogenea ha la forma:

$$Q(t) = e^{-\alpha t} (K_1 + K_2 t)$$

e si dice che si é in presenza di uno **smorzamento critico**, dovuto alla presenza della resistenza  $R$ .

## 2.10. OSCILLAZIONI SMORZATE IN UN CIRCUITO RLC IN SERIE – FACOLTATIVO127

Come si può vedere dai tre casi ora esaminati, la presenza della resistenza produce uno smorzamento delle oscillazioni che diventa il fenomeno dominante per  $R^2 \geq \frac{4L}{C}$ .

In condizioni di smorzamento debole, cioè per  $R^2 \ll \frac{4L}{C}$ , ossia  $\alpha \ll \omega_0$  e perciò  $\Omega \simeq \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$  e si può scrivere:

$$Q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} Q_0 \cos \Omega t$$

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = -Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \left( \frac{R}{2L} \cos \Omega t + \Omega \sin \Omega t \right)$$

$$\simeq -Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \frac{1}{\sqrt{LC}} \sin \Omega t = -Q_0 \omega_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \Omega t$$

avendo approssimato  $\Omega$  ad  $\omega_0$ . L'andamento della corrente, é riportato in figura 2.50.

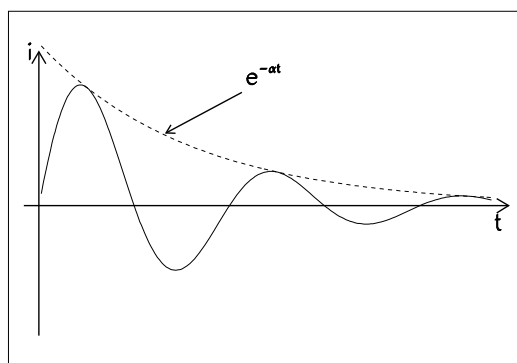


Figura 2.50:

Consideriamo ora l'energia immagazzinata nel sistema. L'energia elettromagnetica posseduta ad ogni istante é pari alla somma dell'energia immagazzinata nella capacità e dell'energia immagazzinata nell'induttanza:

$$E_{em} = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}CV_C^2 = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

dove  $i$  e  $V_C$  rappresentano i valori istantanei delle corrispondenti grandezze. La variazione per unità di tempo dell'energia, ovvero la potenza spesa durante il moto della carica all'interno del sistema é:

$$\frac{dE_{em}}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} \frac{dQ}{dt} = Li \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} i$$

Si può dimostrare che tale variazione é pari alla potenza dissipata per effetto Joule sulla resistenza R: infatti scrivendo la LTK

$$L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} + iR = 0$$

e moltiplicandola per  $-i$  si ottiene:

$$-Li \frac{di}{dt} - \frac{Q}{C} i = Ri^2$$

ovvero

$$-\frac{dE_{em}}{dt} = Ri^2$$

che ci dice che la diminuzione per unitá di tempo della energia posseduta dal sistema é pari alla potenza spesa per far attraversare la resistenza dalla corrente  $i$ ; in altri termini, si ha una graduale trasformazione di energia elettromagnetica in calore, a spese dell'energia del sistema e perciò della ampiezza e frequenza dell'oscillazione della carica. Ponendoci in condizioni di piccolo smorzamento possiamo calcolare la potenza dissipata:

$$P_{dis} = Ri^2 \simeq R Q_0^2 \omega_0^2 e^{-\frac{R}{L}t} \sin^2 \Omega t$$

Si vede pertanto che la potenza ha un andamento oscillatorio la cui ampiezza si riduce esponenzialmente nel tempo in modo che dopo un intervallo pari a  $\tau = L/R$  in suo valore é  $1/e$  volte quello iniziale. Si definisce **fattore di qualità,  $Q^*$  del circuito oscillante** il numero di oscillazioni complete, moltiplicato per  $2\pi$ , che l'oscillatore compie nel tempo  $\tau$  in cui la sua potenza si riduce di  $1/e$ :

$$Q^* = 2\pi\nu\tau = \omega\tau \simeq \omega_0 \frac{L}{R}$$

$Q^*$  é un indicatore di quanto il circuito oscillante, ovvero un qualunque oscillatore sia smorzato:  $Q^*$  grande significa oscillatore poco smorzato e, nel nostro caso, una resistenza R piccola, ovvero una induttanza tendente ad un comportamento ideale; per questo motivo  $Q^*$  viene anche detto **fattore di qualità dell'induttanza**.

## 2.11 Oscillazioni forzate in un circuito RLC: circuiti risonanti – Facoltativo

Consideriamo ora un circuito RLC in serie nel quale venga inserito un generatore di tensione alternata, come indicato in figura 2.51.

2.11. OSCILLAZIONI FORZATE IN UN CIRCUITO RLC: CIRCUITI RISONANTI – FACOLTATIVI

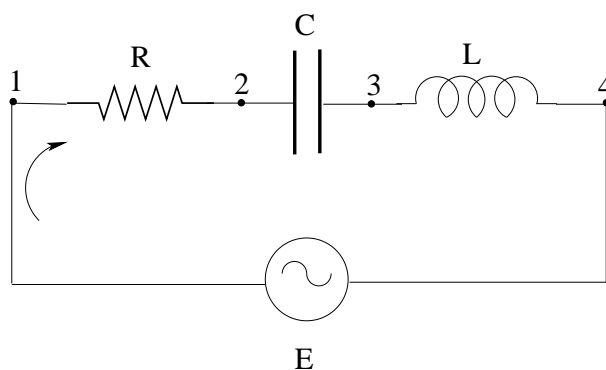


Figura 2.51:

In questo caso la LTK ci fornisce l'equazione:

$$E \sin \omega t = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C}$$

dove  $\omega$  indica la pulsazione del generatore e i tre termini a destra del segno di uguale sono le cadute di tensione sui tre elementi L, R e C in serie; ordinando i termini:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = \frac{E}{L} \sin \omega t$$

equazione che é del tutto simile all'equazione differenziale che si ottiene nello studio delle oscillazioni compiute da un punto materiale soggetto ad una forza elastica (termine della capacitá), ad una forza di tipo viscoso (termine della resistenza) e ad un'altra forza, in generale periodica (termine del generatore) che é responsabile delle oscillazioni forzate del punto materiale.

Determiniamo la corrente che fluisce nel circuito utilizzando la legge di Ohm generalizzata. L'impedenza equivalente del circuito é data da:

$$z_{eq} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Il suo modulo vale:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}{\omega C}\right)^2}$$

la sua fase vale:

$$\operatorname{tg} \phi_{eq} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega CR} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}{\omega CR}$$

che implica:

$$\begin{aligned}\phi_{eq} &= -\frac{\pi}{2} \quad \text{per } \omega \rightarrow 0 \\ \phi_{eq} &= \frac{\pi}{2} \quad \text{per } \omega \rightarrow \infty\end{aligned}$$

In particolare, per  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  la fase si annulla,  $\text{tg } \phi_{eq} = 0$  e il modulo dell'impedenza equivalente assume il suo valore minimo,  $Z = R$ : si é cioè in condizioni di reattanza nulla,  $X = 0$ .

La corrente  $i$  sará data da  $i = \frac{v}{z_{eq}}$  e pertanto risulterà:

$$I = \frac{E}{Z} \quad \text{e} \quad \phi_i = -\phi_{eq}$$

che possono anche essere scritte nella forma:

$$I = \frac{V}{R\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 L^2}{R^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{V}{R\sqrt{1 + Q^{*2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\text{tg } \phi_i = -\text{tg } \phi_{eq} = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1}{\omega C R} = Q^* \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

Allora, per  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  l'ampiezza della corrente risulterà essere massima,  $I = \max$ , e la corrente sará in fase con la tensione applicata,  $\text{tg } \phi_i = 0$ . Questa particolare situazione di fase prende il nome di **risonanza**. L'andamento della fase  $\phi_i$  in funzione della pulsazione del generatore,  $\omega$ , é riportato in figura 2.52. In figura 2.53 é riportato l'andamento del modulo della corrente in funzione della pulsazione del generatore,  $\omega$ . Dalla espressione del modulo della corrente segue che il valore di  $I$  alla risonanza é maggiore del valore per  $\omega \neq \omega_0$  ed é tanto maggiore quanto piú  $Q^*$  é grande: tenute costanti  $L$  e  $C$  la risonanza é tanto piú pronunciata quanto piú  $R$  é piccola (e quindi quanto piú é grande  $Q^*$ ): tolti dal circuito i resistori, l'unico limite a ulteriori riduzioni della resistenza del circuito é costituito dall'inevitabile resistenza ohmica della induttanza. Dalla stessa espressione segue anche che il valore di  $I$  viene diminuito per un fattore  $1/\sqrt{2}$  rispetto al valore della risonanza quando:

$$Q^* \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1}\right) = -1$$

$$Q^* \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2}\right) = 1$$

2.11. OSCILLAZIONI FORZATE IN UN CIRCUITO RLC: CIRCUITI RISONANTI – FACOLTATIVI

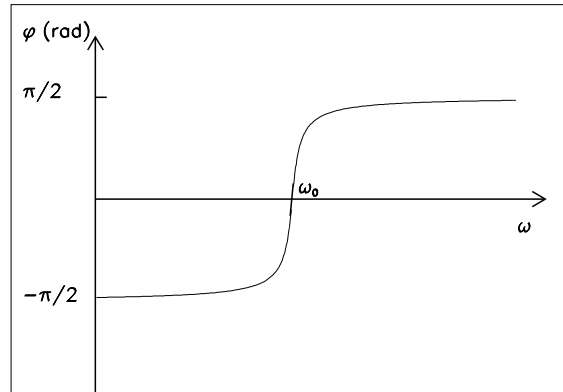


Figura 2.52:

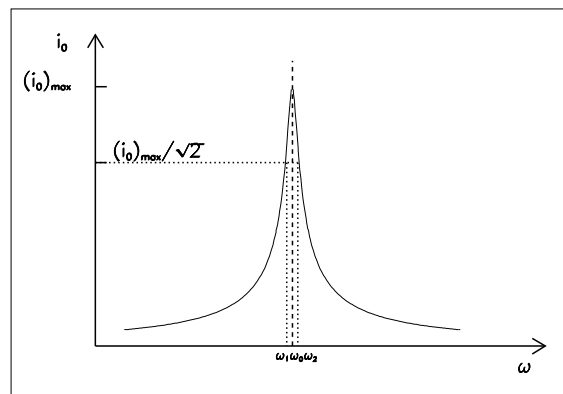


Figura 2.53:

cioé, sommando e sottraendo membro a membro queste due equazioni, per i valori  $\omega_1$  e  $\omega_2$  tali che:

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q^*}$$

L'intervallo di pulsazioni per le quali il valore di  $I$  e la potenza sviluppata nel circuito sono apprezzabili ha ampiezza  $\omega_2 - \omega_1$  e, dalla ultima relazione, si vede che questa ampiezza diminuisce al crescere di  $Q^*$ , ossia il circuito si comporta come un filtro che seleziona una banda di frequenze centrata su  $\omega_0$  e con una larghezza, che rappresenta la selettività del filtro, data da  $\omega_2 - \omega_1$ . Come si può vedere, tanto la bontà del filtro (ossia la ampiezza della corrente) quanto la sua selettività migliorano al crescere di  $Q^*$ .

Consideriamo adesso una diversa disposizione di resistenza, capacità e

induttanza, quale quella illustrata in figura 2.54: tale circuito prende il nome di circuito risonante in parallelo o **circuito antirisonante**.

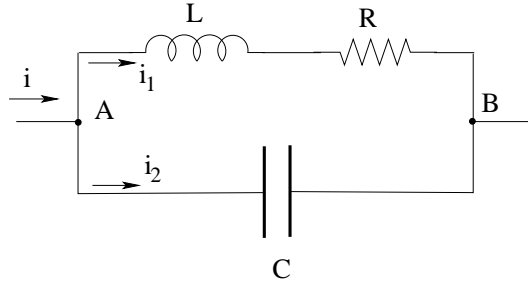


Figura 2.54:

I due rami della composizione in parallelo hanno impedenze complesse:

$$z_1 = R + j\omega L$$

$$z_2 = \frac{1}{j\omega C}$$

e quindi l'impedenza totale tra i punti A e B é data dalla relazione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_{eq}} &= \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\omega C = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \left( \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right) \end{aligned}$$

Il modulo di  $1/z_{eq}$  e la fase di  $1/z_{eq}$  (ovvero della corrente  $i = v \cdot 1/z_{eq}$ ) sono dati da:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \sqrt{\left( \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left( \omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2} \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{(R^2 + \omega^2 L^2)\omega C - \omega L}{R} \end{aligned}$$

Nel caso particolare

$$\omega^2 = \omega_P^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{1}{Q_0^{*2}} \right)$$

dove  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  e il coefficiente  $Q_0^* = \omega_0 L/R$  é il fattore di qualità della induttanza alla frequenza  $\omega_0$ , la impedenza equivalente risulta reale e pertanto la corrente risulta in fase con la tensione del generatore: in tale circostanza



## 2.11. OSCILLAZIONI FORZATE IN UN CIRCUITO RLC: CIRCUITI RISONANTI – FACOLTATIVI

si dice che il circuito é in uno stato antirisonante o risonante in parallelo e si ha:

$$I = \frac{RE}{R^2 + \omega_p^2 L^2} = \frac{CRE}{L}$$

L'intensitá di corrente é tanto minore quanto piú la resistenza R dell'induttanza é piccola mentre, corrispondentemente,  $Q_0^*$  risulta grande ed é  $\omega_p^2 \simeq \omega_0^2$ : per questo valore della pulsazione il valore di Z é massimo, quindi lo stato antirisonante si verifica ad una frequenza prossima alla frequenza di risonanza del circuito con R, L e C in serie; alla risonanza si ha inoltre:

$$I \simeq \frac{RE}{\omega_p^2 L^2}$$

ossia un valore assai piccolo: nel limite di una induttanza ideale ( $R=0$ ) risulta  $I=0$  e il circuito antirisonante impedisce totalmente il passaggio di corrente. Per questo motivo il circuito viene anche detto **trappola di frequenza**. In figura 1.55 é riportata la dipendenza di I dalla pulsazione per diversi valori di R e per C ed L fissati.

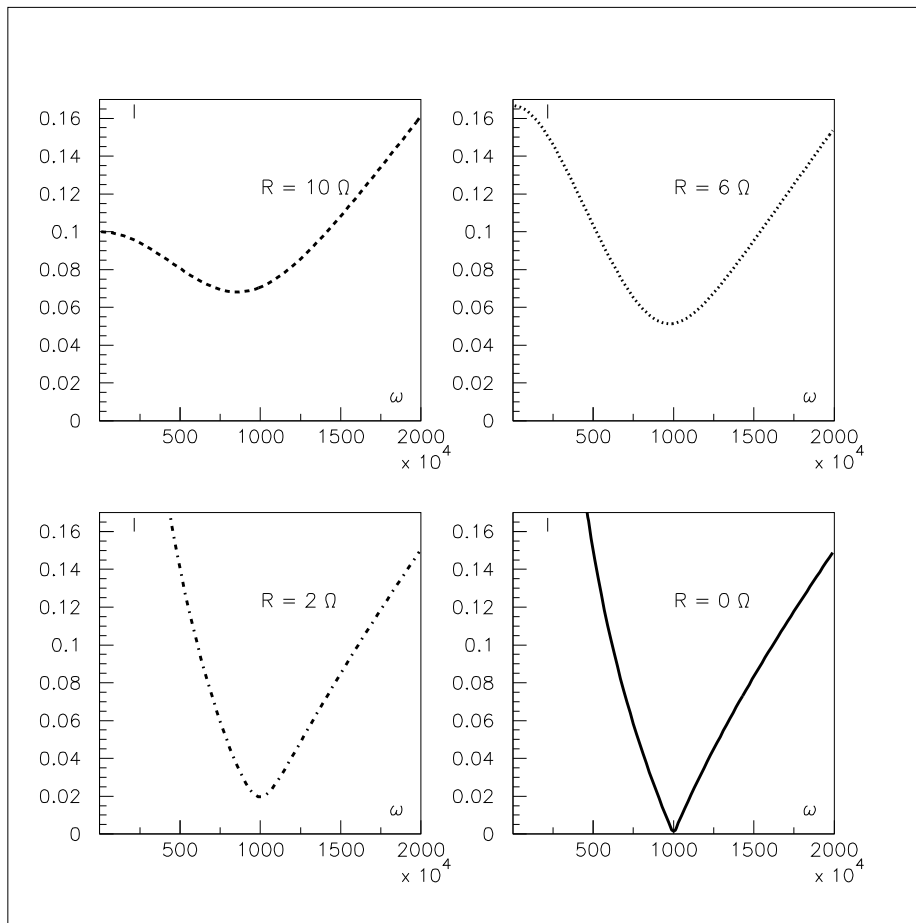


Figura 2.55: