

**Parte II**  
**Elementi di Ottica**

Testi per la consultazione:

P. Mazzoldi, M. Nigro, C. Voci – Elementi di Fisica – Ottica

L. Lovitch, S. Rosati – Fisica Generale II

Halliday, Resnick, Krane – Fisica 2

Tipler – Corso di Fisica Volume 2

## Capitolo 3

# Spettro della radiazione elettromagnetica

Ricordiamo brevemente le diverse teorie che furono sviluppate nel corso dei secoli per interpretare la natura della luce e comprenderne il comportamento sperimentale.

Isaac Newton cercò di spiegare le proprietà della luce con l'ipotesi che questa fosse costituita da particelle estremamente piccole emesse dai corpi luminosi (**teoria corpuscolare della luce**) e soggette alle leggi della meccanica; Huygens, invece, cercò di spiegare i fenomeni luminosi interpretandoli sotto l'ipotesi di una natura ondulatoria della luce (**teoria ondulatoria della luce**); questo approccio trovò conferma verso la fine dell'Ottocento quando Maxwell, studiando le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo, trovò delle soluzioni aventi le proprietà di *onde trasversali* che si propagano con una velocità che coincide, entro gli errori, col valore sperimentale della velocità della luce (il valore oggi accettato per la velocità della luce è  $c = 299792458 \text{ m/s}$  ed è una delle costanti fondamentali della Fisica). Nella teoria ondulatoria della luce le onde associate vengono quindi considerate di natura elettromagnetica ed i campi elettrici e magnetici relativi devono essere soluzioni delle equazioni di Maxwell.

La figura 3.1 rappresenta in modo schematico lo spettro elettromagnetico oggi conosciuto. Vediamone, a grandi linee, le componenti principali.

Le **onde a frequenza radio** hanno frequenza da pochi Hz fino a  $10^9$  Hz e comprendono le radiazioni da linee elettriche, le onde radio AM e FM e le onde TV.

Le **microonde** vanno da circa  $10^9$  Hz a circa  $3 \times 10^{11}$  Hz, corrispondenti a lunghezze d'onda da 1 mm a 30 cm circa, e comprendono onde usate per telecomunicazioni (telefonini) e onde radar.

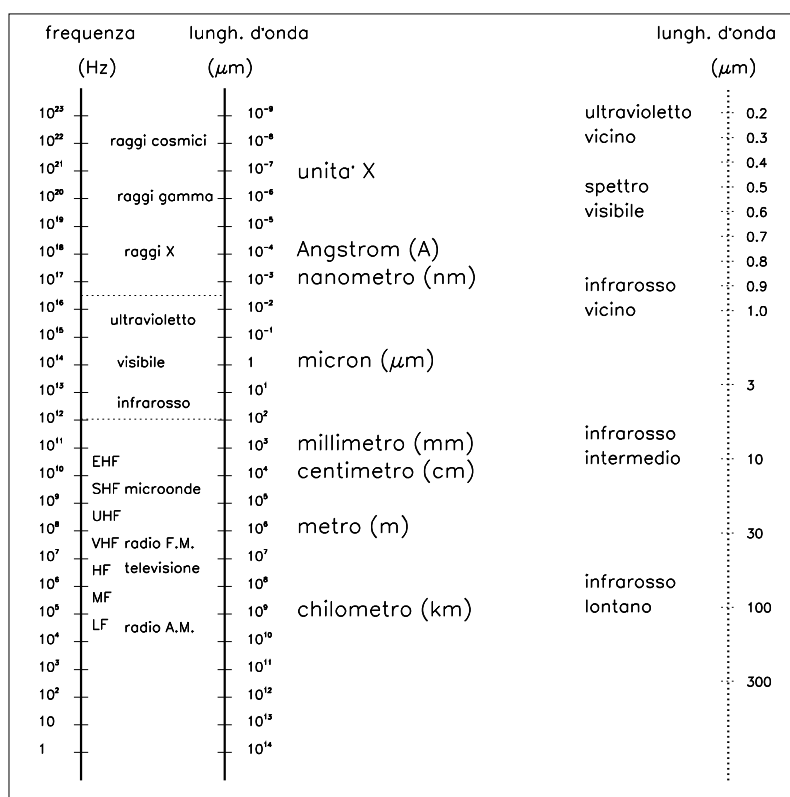


Figura 3.1:

L'**infrarosso** é compreso nella banda di frequenze da circa  $3 \times 10^{11}$  Hz a  $4 \times 10^{14}$  Hz.

La **luce** comprende una zona assai ristretta dello spettro elettromagnetico, con lunghezze d'onda da 780 nm a 380 nm, anche se, in realtà, l'occhio umano può spesso coprire un campo leggermente più ampio. Nella tabella 3.1 sono riportate le frequenze e le lunghezze d'onda associate ai vari colori.

L'**ultravioletto** si estende al di là del violetto da una frequenza di circa  $7.7 \times 10^{14}$  Hz fino a circa  $3 \times 10^{17}$  Hz. La radiazione solare contiene ultravioletto in frazione piuttosto notevole; essa viene, però, assorbita in larga misura negli strati più alti dell'atmosfera terrestre.

I **raggi X**, scoperti da Roentgen nel 1895, occupano la banda seguente all'ultravioletto fino a circa  $5 \times 10^{19}$  Hz; al di là di questi raggi si hanno i **raggi gamma**.

La teoria ondulatoria risulta adeguata per tutti i problemi di trasmissione della luce (propagazione in mezzi omogenei e comportamento all'in-

Colore	lunghezza d'onda nel vuoto (nm)	Frequenza ( $10^{12}$ Hz)
Rosso	780–622	384–482
Arancione	622–597	482–503
Giallo	597–577	503–520
Verde	577–492	520–610
Azzurro	492–455	610–659
Violetto	455–380	659–769

Tabella 3.1:

terfaccia tra mezzi diversi), tuttavia, come é stato stabilito dallo sviluppo della Teoria Quantistica, l'emissione e l'assorbimento della luce avvengono attraverso “pacchetti d'onde” con energia ed impulso definiti, chiamati *quanti di luce o fotoni*. Nella maggioranza dei casi il comportamento della radiazione elettromagnetica é quello tipico ondulatorio; viceversa, in certi fenomeni le proprietà corpuscolari dei fotoni risultano predominanti. Questo comportamento particolare é noto col nome di **dualismo onda–corpuscolo**.

## Capitolo 4

# Propagazione della radiazione luminosa

La teoria ondulatoria della luce permette di descrivere accuratamente la propagazione della luce in un mezzo isotropo, i fenomeni della riflessione e della rifrazione e perciò anche la propagazione attraverso una successione di diversi mezzi materiali a contatto. Tuttavia, lo studio di un buon numero di situazioni di notevole importanza pratica può semplificarsi notevolmente utilizzando le idee dell'**Ottica geometrica** basate sul concetto di **raggio luminoso**. Da un punto di vista formale si può osservare che lo studio della propagazione della luce in un mezzo isotropo può farsi in termini delle normali ai fronti d'onda in luogo dei fronti d'onda stessi: *quando la luce si propaga in un mezzo isotropo, le traiettorie ortogonali ai fronti d'onda vengono chiamate raggi luminosi*. Da un punto di vista pratico un raggio di luce può realizzarsi con buona approssimazione utilizzando fasci laser o facendo arrivare un fascio di luce su di uno schermo opaco sul quale sia stato praticato un piccolo foro: al limite, per un foro puntiforme si potrebbe pensare di produrre un singolo raggio luminoso. Questo, però, non avviene mai perché quando un'onda piana luminosa di lunghezza d'onda  $\lambda$  attraversa un foro di diametro  $d$ , il fascio di luce emergente presenta una dilatazione angolare  $\phi$  dell'ordine di  $\lambda/d$  (diffrazione). Solo nel caso limite  $\lambda = 0$  non si verificherebbe alcuno sparpagliamento angolare e si potrebbe parlare di raggio luminoso come di una retta luminosa.

Pertanto l'impiego del concetto di raggio luminoso, e quindi la validità dell' Ottica geometrica, restano ben giustificati solo nei casi in cui i diaframmi e gli ostacoli incontrati dalla luce hanno dimensioni lineari assai grandi rispetto alla lunghezza d'onda  $\lambda$ ; quando tale condizione non è soddisfatta i fenomeni di diffrazione e interferenza hanno un ruolo dominante e per la loro interpretazione è necessario l'impiego dell'Ottica ondulatoria.

## 4.1 Leggi sperimentali della propagazione luminosa

Sperimentalmente la propagazione della luce attraverso un mezzo isotropo ed il suo comportamento alla superficie di separazione tra mezzi isotropi differenti sono descritti da tre leggi:

1. Legge della propagazione rettilinea
2. Leggi della riflessione
3. Leggi della rifrazione

É noto sperimentalmente fino dall'antichità che la luce si propaga secondo traiettorie rettilinee per portarsi da un punto A ad un punto B immersi nello stesso mezzo otticamente omogeneo (aria, acqua, ..) o in mezzi otticamente omogenei diversi. Infatti é molto semplice osservare nella pratica il comportamento della radiazione luminosa in un mezzo omogeneo, per esempio considerando la traiettoria della luce emessa da una lampada ad incandescenza immersa in aria, quando essa venga intercettata da uno schermo sul quale sia praticato un foro che permetta solamente ad una porzione del fascio luminoso di estendersi dietro di esso. É anche semplice convincersi che la traiettoria di un raggio luminoso che viene emesso da una sorgente in aria e che si propaga fino ad un punto in acqua attraversando la superficie di separazione tra i due mezzi é data da una linea spezzata. Per quanto detto sopra a proposito del concetto di raggio luminoso, la propagazione rettilinea della luce é verificabile solamente fintanto che essa non incontri lungo il suo cammino degli ostacoli con dimensioni lineari confrontabili con la sua lunghezza d'onda, allorché la natura ondulatoria diventa dominante.

Se un fascio luminoso incide sulla superficie di separazione di due mezzi diversi esso si divide in due parti di modo che una parte dell'energia luminosa si riflette indietro nel primo mezzo, dando il fenomeno della **riflessione**, ed una parte entra nel secondo mezzo, dando il fenomeno della **rifrazione**. Le leggi sperimentali che governano i due fenomeni possono essere enunciate nel modo seguente:

- **Leggi della riflessione**

1. Raggio incidente, raggio riflesso e normale nel punto di incidenza alla superficie di separazione, piana o curva che essa sia, giacciono nello stesso piano.

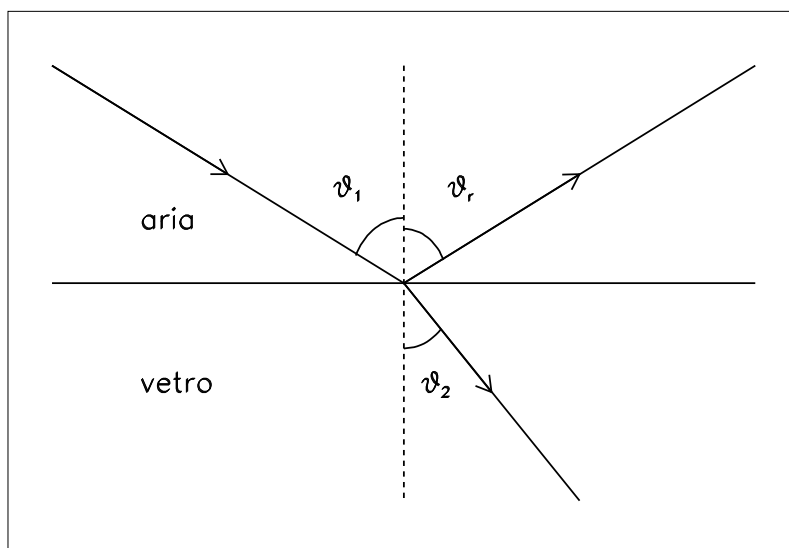


Figura 4.1:

La figura 4.1 rappresenta un raggio luminoso che incide su una superficie aria–vetro lucida. L'angolo  $\theta_1$  tra il raggio incidente e la normale alla superficie nel punto di incidenza viene detto **angolo di incidenza** e il piano definito da queste due rette é detto **piano di incidenza**. Il raggio riflesso giace nel piano di incidenza e forma con la normale un angolo  $\theta_r$  detto **angolo di riflessione**.

2. L'angolo di incidenza e l'angolo di riflessione sono uguali:

$$\theta_1 = \theta_r \quad (4.1)$$

Nel caso particolare di incidenza normale il raggio riflesso torna indietro su se' stesso.

3. Il percorso raggio incidente–raggio riflesso é invertibile esattamente.

Va osservato che una superficie può presentare vari gradi di levigatezza e quindi riflettere la luce in modi diversi: se la superficie é levigata con cura e perciò presenta irregolarità che, nella maggior parte dei casi, hanno dimensioni piccole rispetto alla lunghezza d'onda della luce incidente, si ha **riflessione regolare o speculare**; se invece le irregolarità hanno dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda, anche se si suppone che le leggi della riflessione geometrica siano verificate da ogni raggio, i raggi riflessi viaggiano poi in varie direzioni: si parla in questo caso di **riflessione diffusa**.



Il meccanismo della riflessione della luce si può spiegare mediante l'assorbimento e la riemissione della luce ad opera degli atomi del mezzo riflettente. Quando la luce che si propaga nell'aria incide su una superficie di vetro, gli atomi del vetro assorbono la luce e la rimettono alla stessa frequenza (oscillazioni forzate) in tutte le direzioni; le onde emesse all'indietro dagli atomi del vetro "interferiscono", cioè si sovrappongono, costruttivamente sotto un angolo uguale all'angolo di incidenza per produrre l'onda riflessa. La frazione di energia luminosa riflessa su una superficie di separazione dipende dall'angolo di incidenza, dalla direzione del vettore intensità del campo elettrico  $\mathbf{E}$  associato all'onda e dalla velocità relativa della luce nel primo e nel secondo mezzo. La velocità della luce in un mezzo è caratterizzata dall'**indice di rifrazione**  $n$ , definito come il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto  $c$  e la velocità nel mezzo  $v$ :

$$n = \frac{c}{v} \quad (4.2)$$

- **Leggi della rifrazione** Quando un raggio luminoso incide sulla superficie di separazione tra due mezzi, la variazione della direzione di propagazione del raggio luminoso che entra nel secondo mezzo è detta **rifrazione**. Valgono le seguenti leggi sperimentali:

1. Raggio incidente, raggio rifratto e normale alla superficie rifrangente nel punto di incidenza giacciono nello stesso piano.
2. Legge di Snellius–Descartes. Il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza  $\theta_1$  (vedi figura 4.1) e il seno dell'**angolo di rifrazione**  $\theta_2$ , formato dal raggio rifratto con la normale, è dato da  $n_2/n_1$ , ovvero:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (4.3)$$

3. Il percorso raggio incidente–raggio rifratto è invertibile esattamente.

Dalla legge di Snellius–Descartes si vede che se l'indice di rifrazione del secondo mezzo è maggiore dell'indice di rifrazione del primo mezzo l'angolo di rifrazione risulta minore dell'angolo di incidenza (si noti che entrambi gli angoli sono definiti tra 0 e  $\pi/2$ ), cioè il raggio rifratto si avvicina alla normale, come in figura 4.1; al contrario, se l'indice di rifrazione del secondo mezzo è minore dell'indice di rifrazione del primo mezzo, l'angolo di rifrazione è maggior dell'angolo di incidenza e il raggio rifratto si allontana dalla normale. In questo secondo caso,

4.1. LEGGI SPERIMENTALI DELLA PROPAGAZIONE LUMINOSA 145

al crescere dell'angolo di incidenza, l'angolo di rifrazione cresce finché non si raggiunge un angolo di incidenza limite  $\theta_{1L}$  per cui l'angolo di rifrazione vale  $\pi/2$ :

$$\sin \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1 \quad (4.4)$$

$$\sin \theta_2 = \sin \pi/2 = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_{1L} \rightarrow \sin \theta_{1L} = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.5)$$

Per angoli di incidenza maggiori di  $\theta_{1L}$  non esiste raggio rifratto (matematicamente, per  $n_2 < n_1$  l'equazione (4.4) non ammette soluzioni per  $\theta_1 > \theta_{1L}$ , dato che il seno di un angolo non può essere maggiore di 1): questo fenomeno è detto **riflessione totale**. La riflessione totale si

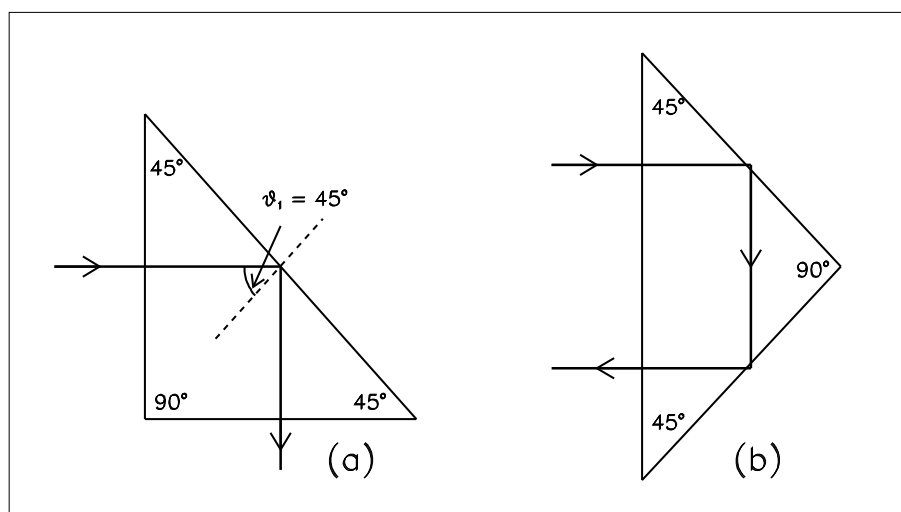


Figura 4.2:

produce soltanto quando la luce passa da un mezzo più rifrangente ad un altro meno rifrangente, come nel caso vetro-aria ( $n_2/n_1 \simeq 1/1.5$ ,  $\theta_{1L} \simeq 41.8^\circ$ ) o acqua-aria ( $n_2/n_1 \simeq 1/1.333$ ,  $\theta_{1L} \simeq 48.6^\circ$ ). Esempi di riflessione totale da parte di un prisma di vetro di una interfaccia vetro-aria sono riportati nella figure 4.2 (a) e (b) e nella figura 4.3.

Viceversa, se  $n_2 > n_1$ ,  $\theta_2 < \theta_1$  e, al crescere dell'angolo di incidenza  $\theta_1$  da 0 a  $\pi/2$ , l'angolo di rifrazione  $\theta_2$  crescerà da 0 fino ad un valore

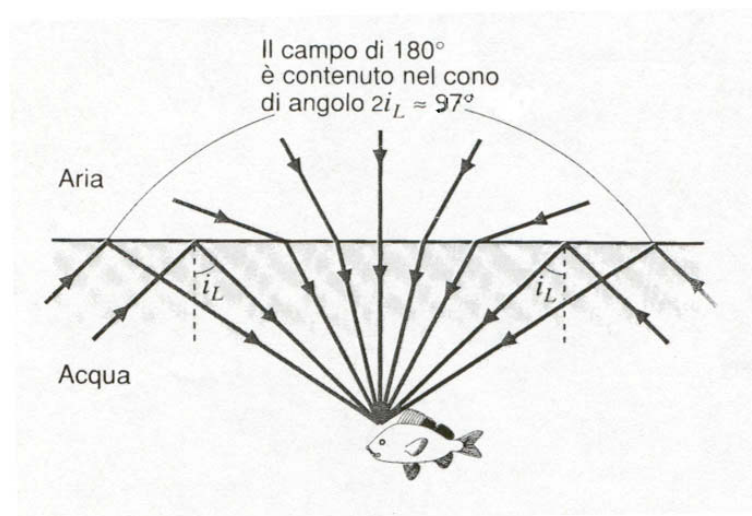


Figura 4.3:

massimo dato dalla relazione:

$$n_2 \sin \theta_{2L} = n_1 \sin \pi/2 \rightarrow \sin \theta_{2L} = \frac{n_1}{n_2}$$

il cui valore coincide con quello dell'angolo limite per il cammino invertito.

Nel fenomeno della rifrazione della luce l'onda trasmessa è generata dalla sovrapposizione dell'onda incidente e dell'onda prodotta dall'assorbimento e dalla riemissione dell'energia luminosa per opera degli atomi del secondo mezzo. Nel caso della luce che entra in un mezzo provenendo dall'aria c'è un ritardo di fase tra l'onda riemessa e l'onda incidente, dovuto al meccanismo di assorbimento-riemissione; c'è anche un ritardo di fase tra l'onda risultante e l'onda incidente, per cui in un dato intervallo di tempo l'onda trasmessa percorre nel mezzo un cammino più corto di quello dell'onda incidente iniziale: cioè, la velocità dell'onda trasmessa è minore di quella dell'onda incidente. Perciò l'indice di rifrazione del secondo mezzo è maggiore di 1 (per l'aria  $n = c/v = 1.0003$ , per il ghiaccio  $n = c/v = 1.31$ ).

Poiché la frequenza della luce nel secondo mezzo è uguale a quella della luce incidente, ma la sua velocità di propagazione è diversa, la lunghezza d'onda della luce trasmessa è (leggermente) diversa da quella

#### 4.1. LEGGI SPERIMENTALI DELLA PROPAGAZIONE LUMINOSA 147

della luce incidente. Se  $\lambda$  é la lunghezza d'onda della luce nel vuoto, la lunghezza d'onda  $\lambda'$  in un mezzo di indice di rifrazione  $n$  é:

$$\lambda' = \frac{v}{\nu} = \frac{c/n}{\nu} = \frac{\lambda}{n} \quad (4.6)$$

La velocità di propagazione nel mezzo, sempre minore di quella nel vuoto, é poi una funzione della frequenza dell'onda luminosa a causa dei diversi tempi di riemissione della luce assorbita da parte degli atomi del mezzo a seconda della frequenza stessa. Ne segue che anche l'indice di rifrazione dipende dalla frequenza:

$$n(\nu) = \frac{c}{v(\nu)} \quad (4.7)$$

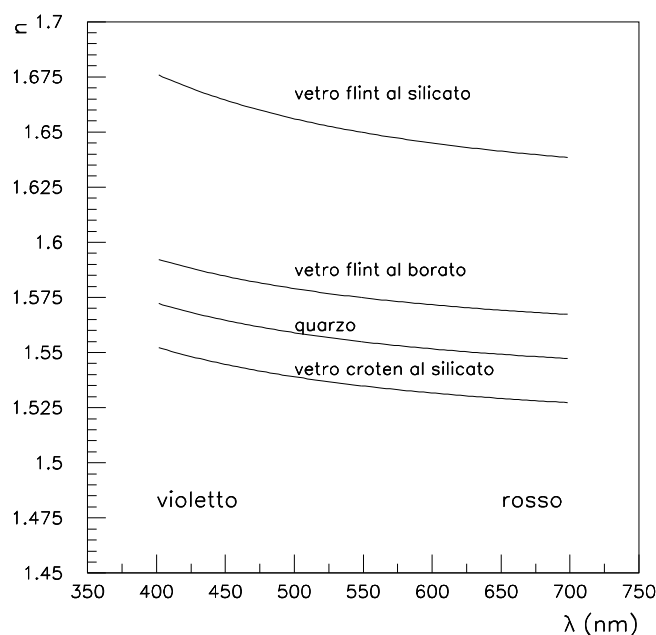


Figura 4.4:

In particolare  $n$  risulta decrescere lievemente al diminuire della frequenza; generalmente, però, la variazione dell'indice di rifrazione viene indicata in funzione della lunghezza d'onda della luce nel vuoto: un esempio é riportato in figura 4.4 per alcuni tipi di vetro e per il quarzo. La dipendenza dell'indice di rifrazione dalla lunghezza d'onda (e

perció da  $\nu$ ) é detta **dispersione**: se un fascio di luce bianca incide sotto un certo angolo sulla superficie di separazione tra aria e vetro, ad esempio, l'angolo di rifrazione per le lunghezza d'onda minori, verso l'estremo violetto dello spettro visibile, é lievemente minore di quello per le lunghezza d'onda maggiori, verso l'estremo rosso dello spettro, come conseguenza del lieve aumento del valore di  $n$  dal rosso al viola. Perció il fascio di luce bianca entrando in un mezzo con un indice di rifrazione diverso da quello del mezzo in cui é stato emesso viene scomposto o disperso nei colori, ossia nelle lunghezze d'onda, da cui é composto.

Come esempio di dispersione della luce, si consideri la figura 4.5. Un raggio luminoso incide sulla faccia di una lamina a facce piane e parallele con indice di rifrazione  $n_2$ , immersa in un mezzo con indice  $n_1$ : l'angolo di incidenza sia  $i_1$ . Se si traccia il percorso del raggio nella lamina e

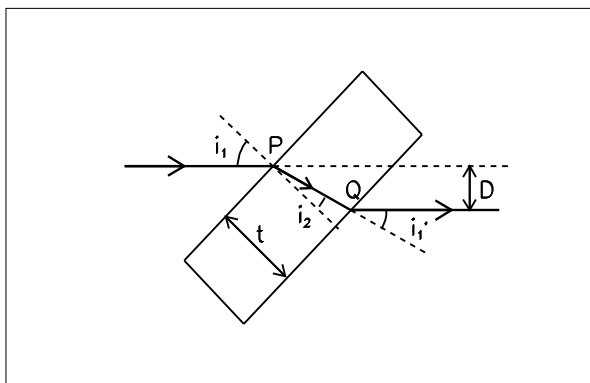


Figura 4.5:

il successivo raggio rifratto uscente, si verifica facilmente che quest'ultimo é parallelo al raggio iniziale, ma spostato di una distanza  $D$ . Infatti, per la legge di Snellius, l'angolo  $i_2$  formato dal raggio rifratto nella lamina con la normale é fissato dalla relazione  $\sin i_2 = (n_1/n_2) \sin i_1$ ; il raggio rifratto incontra la seconda faccia con angolo di incidenza  $i_2$  e l'angolo di rifrazione  $i'_1$  é dato da  $\sin i'_1 = (n_2/n_1) \sin i_2$ , cosicché risulta  $i_1 = i'_1$ . Se  $t$  é lo spessore della lamina, dalla figura si ricava che:

$$D = \overline{PQ} \sin (i_1 - i_2) = \frac{t}{\cos i_2} \sin (i_1 - i_2) = t (\sin i_1 - \cos i_1 \tan i_2)$$

$$= t \sin i_1 \left( 1 - \sqrt{\frac{1 - \sin^2 i_1}{(n_2/n_1)^2 - \sin^2 i_1}} \right)$$

Per angoli  $i_1$  piccoli é  $D \simeq t (1 - n_1/n_2) i_1$ ; poiché l'indice di rifrazione ( $n_2$ ) dipende dalla lunghezza d'onda della luce impiegata, colori diversi subiranno spostamenti diversi; in particolare, dato che  $n_2$  per il viola é maggiore di  $n_2$  per il rosso, é facile vedere, sia nella formula approssimata che in quella esatta, che la deviazione  $D$  per il viola é maggiore di quella per il rosso; la differenza tra gli spostamenti risulta:

$$D_v - D_r = t \cos i_1 (\tan i_{2r} - \tan i_{2v})$$

Un altro esempio di dispersione della luce si ha quando un fascio di luce bianca incide sotto un certo angolo sulla superficie di un prisma di vetro; l'angolo di rifrazione per le lunghezza d'onda minori, é lievemente minore di quello per le lunghezza d'onda maggiori e la luce di lunghezza d'onda minore viene deviata piú di quella di lunghezza d'onda maggiore: anche in questo caso il fascio di luce bianca viene scomposto o disperso nei colori, ossia nelle lunghezze d'onda, da cui é composto, come mostrato in figura 4.6.

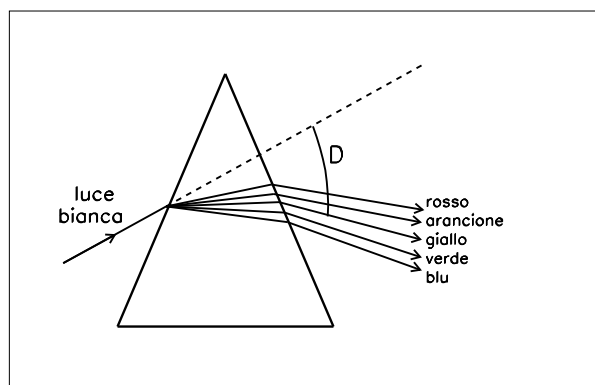


Figura 4.6:

## 4.2 Deviazione di un prisma

Consideriamo in dettaglio la deviazione prodotta da un prisma di vetro sulla direzione di propagazione di un raggio luminoso di lunghezza

d'onda  $\lambda$ ; facciamo riferimento alla figura 4.7. Si considera una sezione principale di un prisma triangolare, data da un piano perpendicolare allo spigolo del prisma stesso: l'angolo al vertice della sezione,  $\alpha$ , viene chiamato **angolo rifrangente**. Un raggio di luce monocromatica incide sulla prima faccia del prisma formando un angolo  $i_1$  con la normale nel punto di incidenza; una parte di esso viene rifratta all'interno del prisma, formando un angolo  $i'_1$  con la stessa normale: dato che l'indice di rifrazione del prisma (1.5–1.7) é maggiore di quello dell'aria il raggio rifratto risulterà avvicinarsi alla normale rispetto al raggio incidente. Il raggio rifratto raggiunge poi la seconda faccia del prisma e vi incide con un angolo  $i_2$  rispetto alla normale ed esce dal prisma con un angolo  $i'_2$  dopo aver subito una seconda rifrazione. L'angolo  $D$  tra la direzione di incidenza sulla prima faccia del prisma e la direzione con cui il raggio rifratto emerge dalla seconda faccia del prisma prende il nome di **angolo di deviazione**. Si vuole ricavare una relazione che permetta di esprimere tale angolo in funzione dell'indice di rifrazione  $n$  del prisma, del suo angolo rifrangente  $\alpha$  e degli angoli (misurabili) di incidenza  $i_1$  e di uscita  $i'_2$ .

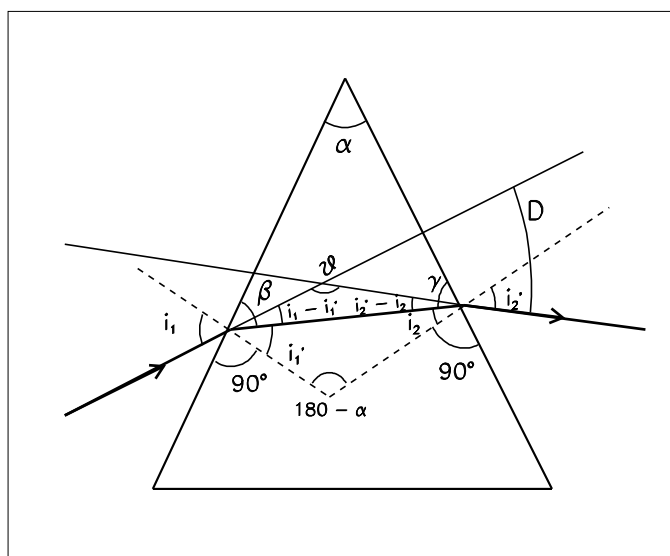


Figura 4.7:

Osserviamo che, in base a considerazioni di geometria elementare sui triangoli (e sugli angoli esterni ai triangoli) valgono le seguenti relazioni:

$$\theta = \pi - (i_1 - i'_1) - (i'_2 - i_2) \quad (4.8)$$

$$D = \pi - \theta = (i_1 - i'_1) + (i'_2 - i_2) \quad (4.9)$$

Siccome

$$\beta + i'_1 = \pi/2 \quad (4.10)$$

$$\gamma + i_2 = \pi/2 \quad (4.11)$$

ed anche

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \quad (4.12)$$

risulta

$$\alpha = i'_1 + i_2 \quad (4.13)$$

e perciò

$$D = i_1 + i'_2 - \alpha \quad (4.14)$$

che esprime l'angolo di deviazione  $D$  in funzione di angoli misurabili:  $\alpha$ ,  $i_1$  e  $i'_2$ . Questi ultimi due angoli non sono indipendenti ma risultano legati dalla seconda legge della rifrazione:

$$\sin i'_1 n = \sin i_1 \quad (4.15)$$

da cui

$$\sin i'_1 = \sin i_1 / n \quad (4.16)$$

e

$$\sin i'_2 = n \sin i_2 = n \sin (\alpha - i'_1) = n (\sin \alpha \cos i'_1 - \cos \alpha \sin i'_1) \quad (4.17)$$

da cui, per la (4.16)

$$\sin i'_2 = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} - \cos \alpha \sin i_1 \quad (4.18)$$

Pertanto l'angolo di deviazione  $D$  può essere espresso come:

$$D = i_1 - \alpha + \arcsin (\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1} \sin \alpha - \sin i_1 \cos \alpha) \quad (4.19)$$

dove tutti gli angoli che compaiono sono direttamente misurabili. Un raggio incidente riesce ad attraversare il prisma se  $i_2 < \theta_L$  e contemporaneamente



$i'_1 < \theta_L$  per il cammino inverso; poiché  $\alpha = i'_1 + i_2$ , le due condizioni precedenti possono scriversi nella forma:

$$\alpha - \theta_L < i'_1 < \theta_L$$

In particolare da queste disuguaglianze risulta  $\alpha < 2\theta_L$ , condizione (necessaria) perché il raggio venga deviato dal prisma.

Viceversa, dalla misura dell'angolo di deviazione  $D$  è possibile ricavare l'indice di rifrazione del mezzo del prisma: infatti risolvendo l'ultima equazione in funzione di  $n$  si ottiene:

$$n = \sqrt{(\sin(D + \alpha - i_1) + \sin i_1 \cos \alpha)^2 \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \sin^2 i_1} \quad (4.20)$$

che è di nuovo valutabile a partire da quantità misurabili direttamente.

Una situazione particolare si ha quando l'angolo di incidenza  $i_1$  è tale da produrre una deviazione  $D$  minima; in questo caso differenziando le (4.15) e (4.17) si ha:

$$\cos i_1 di_1 = n \cos i'_1 di'_1 \quad (4.21)$$

e

$$n \cos i_2 di_2 = \cos i'_2 di'_2 \quad (4.22)$$

Dalla (4.22):

$$di'_2 = \frac{n \cos i_2 di_2}{\cos i'_2} \quad (4.23)$$

e poiché  $i_2 = \alpha - i'_1$ , che implica  $di_2 = -di'_1$ , dalla (4.21) si ricava:

$$di_2 = -\frac{\cos i_1 di_1}{n \cos i'_1} \quad (4.24)$$

che, sostituita nella (4.23) fornisce:

$$di'_2 = -\frac{\cos i_2 \cos i_1 di_1}{\cos i'_2 \cos i'_1} \quad (4.25)$$

Per il differenziale dell'angolo di deviazione  $D = i_1 + i'_2 - \alpha$  si ha:

$$dD = di_1 + di'_2 = di_1 \left( 1 - \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos i'_2 \cos i'_1} \right) \quad (4.26)$$

la derivata:

$$\frac{dD}{di_1} = 1 - \frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos i_2' \cos i_1'} \quad (4.27)$$

fornisce la variazione di D per variazione unitaria di  $i_1$ . In condizioni di minima deviazione

$$\frac{dD}{di_1} = 0$$

$$\frac{\cos i_2 \cos i_1}{\cos i_2' \cos i_1'} = 1$$

che risulta verificato se  $i_1' = i_2$  e  $i_2' = i_1$ , cioè se si è in condizioni di simmetria per cui il raggio si propaga nel prisma parallelamente alla base. Allora, dato che per l'angolo di deviazione minima vale (4.14):  $D_M = 2i_1 - \alpha$  e (4.13)  $\alpha = 2i_1'$ , considerando la prima rifrazione si può scrivere:

$$n = \frac{\sin i_1}{\sin i_1'} = \frac{\sin \left( \frac{D_M + \alpha}{2} \right)}{\sin \alpha/2}$$

e perciò:

$$n(\lambda) = \frac{\sin i_1}{\sin i_1'(\lambda)} = \frac{\sin \left( \frac{D_M(\lambda) + \alpha}{2} \right)}{\sin \alpha/2}$$

che permette di determinare l'indice di rifrazione del mezzo per le varie lunghezze d'onda che compongono il fascio incidente dalla misura dell'angolo di deviazione minima. La dispersione del prisma consiste appunto nella dipendenza della deviazione D dalla lunghezza d'onda e resta misurata, per definizione, da  $dD/d\lambda$ ; dalle (4.16), (4.17) e (4.19) segue:

$$\frac{dD}{d\lambda} = \frac{dD}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{\cos i_2 \tan i_1' + \sin i_2}{\cos i_2'} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

Per la maggior parte dei mezzi trasparenti e non colorati vale una relazione tipo:

$$n(\lambda) = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

come illustrato in figura 4.4.

### 4.3 Principi di Fermat e di Huygens–Fresnel – Facoltativo

La velocità  $v$  di un raggio di luce monocromatica in un mezzo omogeneo, isotropo e con indice di rifrazione  $n$ , è legata alla velocità della luce nel vuoto,  $c$ , dalla relazione:  $v = c/n$ . Se la luce in un tempo  $\Delta t$  percorre nel mezzo materiale un tratto  $l$ , in tale tempo percorrerebbe nel vuoto un tratto  $L$  dato da

$$L = c \Delta t = c \frac{l}{v} = nl$$

La quantità  $nl$  viene chiamata **cammino ottico** percorso nel tempo  $\Delta t$ . Se un raggio luminoso attraversa più materiali diversi il cammino ottico totale risulta

$$L = n_1 l_1 + n_2 l_2 + \dots = \sum_i n_i l_i = tc$$

dove  $n_i$ ,  $l_i$  e  $t$  sono l'indice di rifrazione, il cammino percorso nel mezzo  $i$  dalla luce e il tempo totale impiegato.

Le leggi sperimentali che descrivono il comportamento della luce in un mezzo isotropo e all'interfaccia tra mezzi isotropi diversi possono essere derivate, nei casi in cui è valida la approssimazione dell'Ottica geometrica, a partire dal **principio di Fermat**:

*La traiettoria seguita da un raggio luminoso per andare da un punto A ad un punto B è quella che, secondo le leggi dell'Ottica geometrica, corrisponde ad un cammino ottico totale stazionario (massimo o minimo) rispetto a variazioni infinitesime attorno alla traiettoria (ovvero ad un tempo stazionario).*

Applichiamo il principio di Fermat a tre semplici situazioni.

1. **Raggio luminoso attraverso un mezzo omogeneo e isotropo.** La traiettoria da un punto A a un altro B è rettilinea, quindi corrisponde ad un cammino ottico minimo.
2. **Riflessione di un raggio luminoso.**

Nella figura 4.8 si considerino due punti A e B in uno stesso mezzo omogeneo: a causa della presenza di una superficie riflettente, oltre al raggio luminoso rettilineo da A a B esiste un raggio luminoso riflesso, ACB, che congiunge i due punti. Il tempo impiegato dalla luce a compiere questo percorso, composto da due tratti rettilinei che rappresentano i minimi cammini fino o a partire dal punto di incidenza C, è

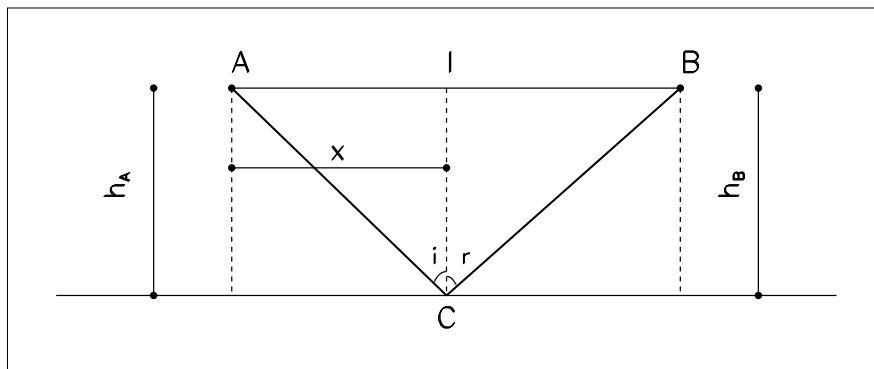


Figura 4.8:

dato da:

$$t = \frac{1}{v} \left( \sqrt{h_A^2 + x^2} + \sqrt{h_B^2 + (l - x)^2} \right)$$

indicando con  $x$  la ascissa del punto C rispetto al punto A, mentre il punto B é ad una ascissa  $l$  dallo stesso; sia  $h_A$  l'ordinata del punto A ed  $h_B$  l'ordinata del punto B. Si avrá:

$$t = \frac{AC}{v} + \frac{CB}{v}$$

La variazione del tempo di percorrenza per variazione unitaria del cammino, cioè per variazione unitaria della ascissa  $x$  del punto C é:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v} \left( \frac{x}{\sqrt{h_A^2 + x^2}} - \frac{l - x}{\sqrt{h_B^2 + (l - x)^2}} \right)$$

In base al principio di Fermat, il cammino effettivamente seguito dal raggio luminoso é quello che minimizza il tempo di percorrenza:

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

cióé:

$$\frac{1}{v} \left( \frac{x}{AC} - \frac{l - x}{CB} \right) = 0$$

Dato che  $\frac{x}{AC} = \sin i$  e  $\frac{l-x}{CB} = \sin r$ , la condizione precedente implica:

$$\sin i = \sin r$$

ovvero  $i = r$ , come richiesto dalla seconda legge della riflessione: i raggi luminosi si riflettono secondo il cammino ottico minimo.

### 3. Rifrazione d un raggio luminoso

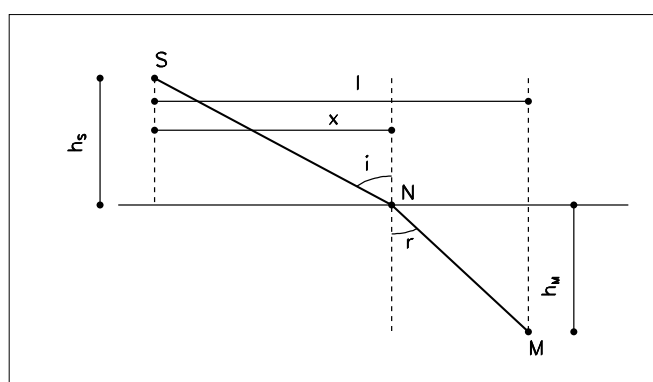


Figura 4.9:

Nella figura 4.9 si considerino due punti S e M in due mezzi omogenei separati da una superficie piana: sia  $h_S$  l'ordinata del punto S nel primo mezzo, con indice di rifrazione  $n_1$  e velocità di propagazione  $v_1$ , e  $h_M$  l'ordinata del punto M nel secondo mezzo, con indice di rifrazione  $n_2$  e velocità di propagazione  $v_2$ ; sia  $x$  l'ordinata del punto N di incidenza del fascio sulla superficie rifrangente rispetto al punto S e  $l$  l'ordinata del punto M rispetto a S. In ciascuno dei due mezzi il minimo cammino è rettilineo fino a o a partire da N e il tempo di percorrenza è dato da:

$$t = \frac{SN}{v_1} + \frac{NM}{v_2}$$

$$t = \frac{\sqrt{h_S^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_M^2 + (l-x)^2}}{v_2}$$

#### 4.3. PRINCIPI DI FERMAT E DI HUYGENS–FRESNEL – FACOLTATIVO 157

Per variazioni unitarie del cammino, cioè della ascissa  $x$  del punto N, la variazione del tempo di percorrenza é data da:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 \sqrt{h_S^2 + x^2}} - \frac{l - x}{v_2 \sqrt{h_M^2 + (l - x)^2}}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_1 SN} - \frac{l - x}{v_2 NM} = \frac{\sin i}{v_1} - \frac{\sin r}{v_2}$$

In base al principio di Fermat:

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

cióé

$$\frac{\sin i}{v_1} = \frac{\sin r}{v_2}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

come richiesto dalla seconda legge di Snellius–Descartes: i raggi luminosi si rifrangono secondo il minimo cammino ottico.

Anche il principio di reciprocità può essere ricavato a partire dal principio di Fermat, considerando che se per andare da un punto A ad un punto B si é trovato il cammino ottico minimo, per andare da B ad A il tempo minimo sarà impiegato sullo stesso percorso.

Un esempio di cammino ottico massimo si ha considerando una superficie sferica cava riflettente al suo interno: il raggio che parte da un punto qualunque della superficie, A, ritorna in A dopo aver percorso per due volte il diametro della sfera; ogni altro percorso ha lunghezza minore di quello effettivo, che corrisponde in questo caso a cammino ottico massimo.

Le leggi della propagazione rettilinea, riflessione e rifrazione possono anche essere fatte derivare da un altro principio, valido non solo nella approssimazione di Ottica geometrica, il **principio di Huygens**: *A un generico istante, ogni punto di un fronte d'onda può essere considerato come una sorgente puntiforme di onde sferiche secondarie: la posizione del fronte d'onda dopo un tempo  $\Delta t$  coincide con la superficie involuppo di tutte le onde secondarie al tempo in questione.*