Corso di Laurea in Scienza dei Materiali
Laboratorio di Fisica II

Prova scritta del 06/07/2004

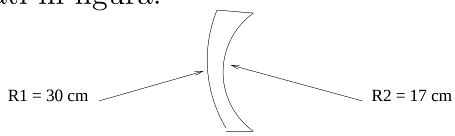
1. (a.a. 2002-2003 e 2001-2002)

   Che errore percentuale si commette approssimando con una distribuzione gaussiana la probabilità di ottenere 1 o 2 successi descritta da una distribuzione poissoniana con valor medio $\mu = 0.4$?

   Scrivere esplicitamente l' espressione della distribuzione gaussiana che meglio approssima la poissoniana considerata.

2. (a.a. 2002-2003 e 2003-2004)

   Trovare la distanza focale (in aria) di una lente realizzata con un materiale con indice di rifrazione n = 1.612 e con raggi di curvatura R_1 e R_2 come indicati in figura.

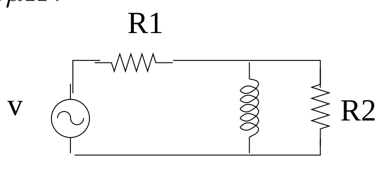
   

   Dire se si tratta di una lente convergente o divergente.

   Trovare la coordinata dell' immagine che essa crea di un oggetto posto a s =7 cm da essa, dire se tale immagine è reale o virtuale e se risulta rimpicciolita o ingrandita.

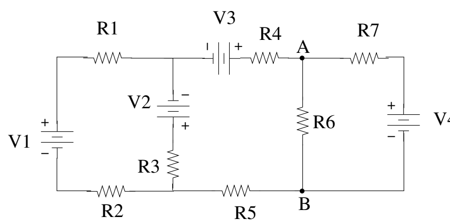
3. (a.a. 2001-2002, 2002-2003 e 2003-2004)

   Calcolare modulo e fase rispetto a v della tensione ai capi dell' induttore L, sapendo che la frequenza del generatore di funzioni vale $f = 500$ Hz, la tensione erogata ha valore efficace $V_{eff} = 15V$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 350\Omega$, $L = 5\mu H$.

4. (a.a. 2001-2002, 2002-2003 e 2003-2004)

   Trovare la tensione ai capi di R_6 nel circuito rappresentato in figura. Si tenga conto che $V_1 = 10V$, $V_2 = 5V$, $V_3 = 8V$, $V_4 = 2V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 15\Omega$, $R_5 = 20\Omega$, $R_6 = 5\Omega$ e $R_7 = 8\Omega$.

SOLUZIONI

1. La distribuzione di probabilità corretta e' la distribuzione poissoniana:

$$P(x, \mu = 0.4) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} = \frac{0.4^x \cdot e^{-0.4}}{x!} \tag{1}$$

che, per $x = 1$ fornisce: $P(1, 0.4) = 0.2681$ e per $x = 2$ fornisce: $P(2, 0.4) = 0.0536$; dunque la probabilità di avere 1 o 2 successi sarà data da $P(1, 0.4) + P(2, 0.4) = 0.2681 + 0.0536 = 0.3217$

Dato che la deviazione standard della distribuzione poissoniana suindicata vale $\sigma = \sqrt{\mu} = 0.63$, la distribuzione gaussiana che meglio la approssima sarà:

$$P(x, \mu = 0.4, \sigma = 0.63) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} = 0.633 \cdot e^{-(x-0.4)^2/0.79} \tag{2}$$

essendo la Gaussiana una distribuzione continua, la probabilità di ottenere 1 o 2 conteggi dovrà essere calcolata come la probabilità gaussiana cumulativa di ottenere un numero di conteggi compreso tra 0.5 e 2.5; per utilizzare i valori tabulati dell'integrale normale degli errori

$$P(t) = \int_{\mu}^{\mu+t\sigma} f_{\mu,\sigma}(x) dx \tag{3}$$

occorre determinare il valore degli estremi dell'intervallo di integrazione:

$0.5 = \mu + t_1\sigma \quad \rightarrow t_1 = (0.5 - \mu)/\sigma = 0.16$

$2.5 = \mu + t_2\sigma \quad \rightarrow t_2 = (2.5 - \mu)/\sigma = 3.33$

Allora:

$$\begin{aligned} P(0.5 \le x \le 2.5) &= \int_{\mu+t_1\sigma}^{\mu+t_2\sigma} f_{\mu,\sigma}(x) dx = \\ &= \int_{\mu}^{\mu+t_2\sigma} f_{\mu,\sigma}(x) dx - \int_{\mu}^{\mu+t_1\sigma} f_{\mu,\sigma}(x) = \\ &= 49.98\% - 6.36\% = 43.62 \end{aligned} \tag{4}$$

che corrisponde ad un errore percentuale di:

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{0.4362 - 0.3217}{0.3217} = 0.356 \qquad (5)$$

ossia un errore percentuale del 35.6% in eccesso rispetto al valore corretto.

2. Dalla equazione del costruttore di lenti, conoscendo i due raggi di curvatura e l' indice di rifrazione del materiale della lente, si ottiene:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1.612-1)\left(\frac{1}{0.3} - \frac{1}{0.17}\right) m^{-1}$$

che fornisce $f = -0.641\ m$. La lente risulta essere divergente: la sua distanza focale è, infatti, negativa e, già dal disegno si può vedere che essa è più sottile al centro che al bordo.

Dalla equazione delle lenti:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

si ottiene poi la posizione dell' immagine che essa fornisce dell' oggetto posto a $s = 7cm$ da essa:

$$s' = \frac{fs}{s-f} = -6.31cm$$

Tale immagine risulta, dunque, virtuale dato che, essendo s' negativa essa si forma nello spazio degli oggetti. La dimensione dell' immagine è legata a quella dell' oggetto da:

$$G = \frac{y'}{y} = \frac{-s'}{s} = 0.9$$

per cui risulta che l' immagine è diritta (G positivo) e rimpicciolita (G minore di 1).

3. L' impedenza equivalente del circuito vale:

$$\begin{aligned} z_{eq} &= R_1 + z_{\parallel} = R_1 + \frac{R_2(j\omega L)}{R_2 + j\omega L} \cdot \frac{R_2 - j\omega L}{R_2 - j\omega L} = \\ &= R_1 + \frac{R_2\omega^2 L^2 + jR_2^2\omega L}{R_2^2 + \omega^2 L^2} = \\ &= 100\Omega + \frac{350(3141.6)^2(5\cdot 10^{-6})^2 + j350^2 \cdot 3141.6 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{350^2 + (3141.6)^2(5\cdot 10^{-6})^2}\Omega = \\ &= 100\Omega + \frac{0.0864 + j1924.23}{122500}\Omega \end{aligned} \tag{6}$$

da cui:

$z_{\parallel} \simeq j0.0157\Omega$, $Z_{\parallel} \simeq 0.0157\Omega$, $tg\phi_{\parallel} = \pi/2$

$z_{eq} = (100 + j0.0157)\Omega$, $Z_{eq} = 100.0157\Omega$, $tg(\phi_{eq}) = \frac{0.0157}{100} \rightarrow \phi_{eq} = 0.000157\ rad \simeq 0$

Per la legge di Ohm generalizzata, la corrente sarà data da:

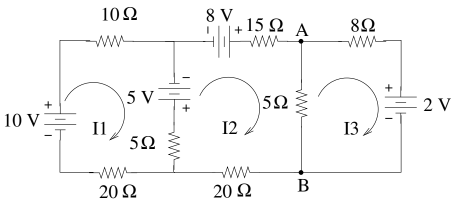
$$\begin{aligned} i &= \frac{v}{z_{eq}} = \frac{V}{Z_{eq}e^{j\phi_{eq}}} = \frac{V}{Z_{eq}}e^{-j\phi_{eq}} = \\ &= (0.212e^{-j0.000157})A \simeq 0.212A \end{aligned} \tag{7}$$

La tensione ai capi dell' induttore sarà data da:

$$v_L = i \cdot z_{\parallel} \simeq 0.212A \cdot j0.0157\Omega \simeq j0.0033V \tag{8}$$

da cui si ricava: $V_L = 0.0033V$ e $\phi_L = \pi/2$.

4. Applicando l' analisi di maglia al circuito si ottiene:



$$[I_1(10+5+20) - I_2 5 - 0]V = (10+5)V \tag{9}$$

$$[-I_1 5 + I_2(15+5+5+20) - I_3 5]V = (8-5)V \tag{10}$$

$$[0 - I_2 5 + I_3(5+8)]V = -2V \tag{11}$$

Risolvendo questo sistema si ha:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & -5 & 0 \\ 3 & 45 & -5 \\ -2 & -5 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 35 & -5 & 0 \\ -5 & 45 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{8545}{19275}A = 0.443A$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 35 & 15 & 0 \\ -5 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 35 & -5 & 0 \\ -5 & 45 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{1990}{19275}A = 0.103A$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 35 & -5 & 15 \\ -5 & 45 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 35 & -5 & 0 \\ -5 & 45 & -5 \\ 0 & -5 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{-2200}{19275}A = -0.114A$$

La corrente che attraversa il resistore R_6, da A verso B, vale $I(R_6) = I_2 - I_3 = 0.217A$, per cui la differenza di potenziale ai capi di R_6 risulta: $V_A - V_B = 0.217A \cdot 5\Omega = 1.085V$