Corso di Laurea in Scienza dei Materiali
Laboratorio di Fisica III

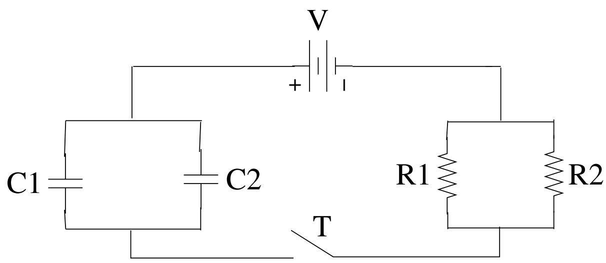
Prova scritta del 07/12/2004

- Operando con una certa sorgente radioattiva ed un certo contatore Geiger ci si attende di misurare in media $\mu = 7$ conteggi/s.

  Da esperimenti precedenti effettuati nelle stesse condizioni si sa che la distribuzione di conteggi per unità di tempo è ben rappresentata da una distribuzione di probabilità poissoniana. Trovare:

  1. la deviazione standard di tale distribuzione;
  2. la probabilità di misurare 10 conteggi/s e 4 conteggi/s;
  3. l' errore percentuale che si commette nel valutare tali probabilità utilizzando una distribuzione di probabilità gaussiana.

- Nel circuito riportato i due condensatori in parallelo, supposti ideali e perciò privi di resistenza, hanno una capacità equivalente $C_{eq} = 1\ \mu F$ e capacità singole tali per cui $C_1 = 4 \cdot C_2$: essi sono inizialmente scarichi. I resistori hanno resistenza $R_1 = 10\ k\Omega$ e $R_2 = 15\ k\Omega$. Il generatore di tensione ha resistenza interna trascurabile rispetto a quella del carico esterno e fornisce una forza elettromotrice pari a $V_0 = 10$ V. All' istante t = 0 l' interruttore T viene chiuso.



  Valutare:

  1. lo schema del circuito equivalente;
  2. la costante di tempo τ del circuito equivalente;
  3. il valore delle singole capacità dei due condensatori;
  4. la dipendenza dal tempo della carica totale che, dopo la chiusura dell'interrut-tore, si accumula sulle piastre dei condensatori;

5. la carica sulle armature di C_1 all' istante $t^* = 5\ ms$ dopo la chiusura dell' interruttore T;
6. la carica totale che asintoticamente si viene ad accumulare sulle piastre dei due condensatori in parallelo;
7. gli istanti t_{09} e t_{01} nei quali la carica totale risulta rispettivamente il 90% e il 10% del valore finale. Calcolare il tempo necessario perchè si produca tale variazione di carica.
8. l' energia immagazzinata in C_1 e C_2 separatamente all' istante t_{09} e quale è la potenza dissipata per effetto Joule nella resistenza equivalente allo stesso istante.

SOLUZIONI

- 1. $\sigma = \sqrt{\mu} = 2.65$;
  2. $P(x,\mu) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}$, che fornisce: $P(x = 10, \mu) = 0.071$ e $P(x = 4, \mu) = 0.091$;
  3. per effettuare valutazioni con la distribuzione di probabilità gaussiana occorre tenere presente che essa è una distribuzione di probabilità continua, mentre la poissoniana è discreta: ciò implica che, nel caso della gaussiana, la probabilità di ottenere 10 conteggi andrà valutata come quella di ottenere tra 9.5 e 10.5 conteggi. Si avrà allora:

     $\mu = 7$, $\sigma = 2.65$ $9.5 = \mu + t_1\sigma \rightarrow t_1 = 0.94$ e $10.5 = \mu + t_2\sigma \rightarrow t_2 = 1.32$

     Usando la tabella dell' integrale normale degli errori:

     $P_G(9.5 < x < 10.5, \mu, \sigma) = \int_{9.5}^{10.5} P_G(x,\mu,\sigma)dx = \int_{t_1}^{t_2} P_G(t,0,1)dt$ $= \int_0^{t_2} P_G(t,0,1)dt - \int_0^{t_1} P_G(t,0,1)dt = 0.4066 - 0.3264 = 0.0802$

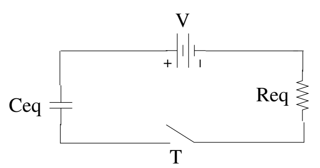
     e similmente per la probabilità di ottenere 4 conteggi/s:

     $\mu = 7$, $\sigma = 2.65$ $3.5 = \mu + t_3\sigma \rightarrow t_3 = -0.94$ e $4.5 = \mu + t_4\sigma \rightarrow t_4 = -1.32$ $P_G(3.5 < x < 4.5, \mu, \sigma) = \int_{3.5}^{4.5} P_G(x,\mu,\sigma)dx = \int_{t_4}^{t_3} P_G(t,0,1)dt = \int_{t_4}^{0} P_G(t,0,1)dt - \int_{t_3}^{0} P_G(t,0,1)dt = 0.4066 - 0.3264 = 0.0802$

     dove si è sfruttato il fatto che la gaussiana è una distribuzione simmetrica rispetto al valore medio.

     Confrontando i valori ottenuti con gaussiana e poissoniana si ha:

	P	G	errore %	in
10 cont./s	7.1 %	8.02 %	+ 12.96 %	eccesso
4 cont/s	9.1 %	8.02 %	- 15.21 %	difetto

- 1. 

dove $C_{eq} = C_1 + C_2 = 1.0\ \mu F$ e $R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 6.0\ k\Omega$

2. $\tau = R_{eq} C_{eq} = 6 \cdot 10^{-3}\ s$
3. $C_1 = 800\ nF$, $C_2 = 200\ nF$
4. sapendo che $V(t) = V_0[1 - e^{-t/\tau}]$, si ha $Q = C_{eq} V(t) = C_{eq}[1 - V_0 e^{-t/\tau}] = 10\ e^{-t/6 \cdot 10^{-3}\ s}\ \mu C$
5. sapendo che la tensione ai capi delle due capacità è la stessa in ogni istante, dato che i due condensatori sono in parallelo, per $t = t^*$ si potrà scrivere:

   $V(t^*) = V_0[1 - e^{-t^*/\tau}] = 10\ V[1 - e^{-5ms/6ms}] = 5.654\ V$. Allora $Q_1 = C_1 \cdot V(t^*) = 4.52 \cdot 10^{-6}\ C$
6. $Q_T = C_{eq} V_0 = 10^{-5}\ C$
7. $Q(t) = C_{eq} \cdot V(t) = C_{eq} \cdot V_0[1 - e^{-t/\tau}]$

   $Q(t_{01}) = 0.1 * Q_T = 0.1 \cdot C_{eq} \cdot V(t_{01}) = 0.1 \cdot C_{eq} \cdot V_0[1 - e^{-t_{01}/\tau}]$ da cui

   $ln\left[1 - \frac{Q_T \cdot 0.1}{C_{eq} V_0}\right] = -\frac{t_{01}}{6\ ms}$

   $t_{01} = -\ ln\left[1 - \frac{Q_T \cdot 0.1}{C_{eq} V_0}\right] \cdot 6\ ms = 0.632\ ms$

   analogamente:

   $Q(t_{09}) = 0.9 * Q_T = 0.9 \cdot C_{eq} \cdot V(t_{09}) = 0.9 \cdot C_{eq} \cdot V_0[1 - e^{-t_{09}/\tau}]$ da cui

   $ln\left[1 - \frac{Q_T \cdot 0.9}{C_{eq} V_0}\right] = -\frac{t_{09}}{6\ ms}$

   $t_{09} = -\ ln\left[1 - \frac{Q_T \cdot 0.9}{C_{eq} V_0}\right] \cdot 6\ ms = 13.816\ ms$

   $\Delta t = t_{09} - t_{01} = 13.184\ ms$
8. l' energia immagazzinata in un condensatore è data da $E_C = 1/2 C V_C^2$; a t_{09} si ha $V_C(t_{09}) = V_0[1 - e^{-t_{09}/\tau}] = 10\ V[1 - e^{-13.816ms/6ms}] = 9\ V$ e tale risulta tanto ai capi di C_1 quanto ai capi di C_2; perciò:

   $E_{C1} = 1/2\ C_1\ V_C(t_{09})^2 = 2.62 \cdot 10^{-3} J$ e $E_{C2} = 1/2\ C_2\ V_C(t_{09})^2 = 6.56 \cdot 10^{-4} J$

   Dato poi che la tensione ai capi del generatore è costante, a t_{09} la caduta di potenziale sulla R_{eq} sarà data da: $V_R = V_0 - V_C(T_{09}) = 1\ V$ per cui $W_R = V_R^2 / R_{eq} = 1.67 \cdot 10^{-4} W$.