Corso di Laurea in Scienza dei Materiali
Laboratorio di Fisica III

Prova scritta del 24/03/2004

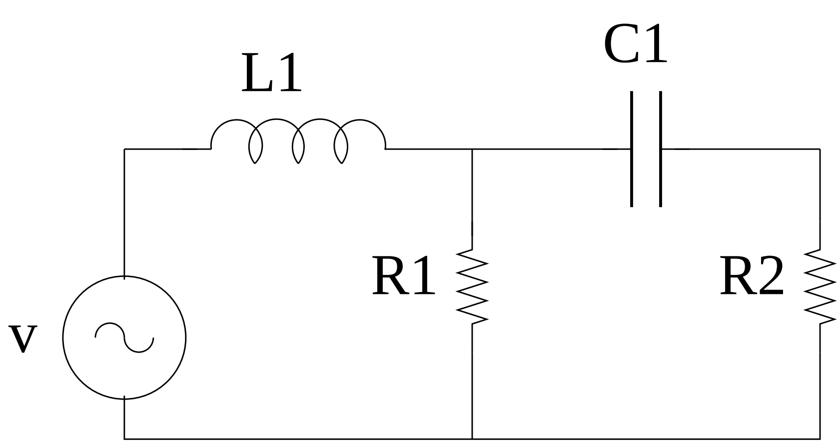
- (4 punti)

  Il conteggio medio atteso in un certo esperimento é $\mu = 7$. Assumendo che i risultati dell'esperimento siano descritti da una distribuzione di probabilitá poissoniana:

  1. valutare la probabilitá di ottenere 9 conteggi in una prova;
  2. utilizzare la approssimazione gaussiana per stimare la probabilitá di ottenere 9 conteggi e valutare lo scarto percentuale (o errore percentuale) rispetto al valore corretto;
  3. valutare poi, sia utilizzando la distribuzione di probabilitá poissoniana che quella gaussiana, la probabilitá di ottenere 9 conteggi o meno in una prova.
  4. dal confronto tra i valori ottenuti con le due distribuzioni nei punti 2 e 3 commentare la bontá della approssimazione gaussiana.

- (6 punti)

  Nel circuito riportato un figura $L_1 = 10\mu$H, $C_1 = 100$ pF, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 200\Omega$; il generatore di tensione alternata fornisce una ampiezza di 1.5 V ed opera ad una frequenza di 10 kHz. Trovare la tensione ai capi della resistenza R_2 in modulo e fase (suggerimento: applicare il teorema di Thevenin).



SOLUZIONI

- 1.

$$P(x=9,\mu=7)=\frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}=\frac{7^9 e^{-7}}{9!}=0.1014 \qquad (1)$$

2. $\mu_G=\mu=7$; $\sigma_G=\sqrt{\mu}=2.646$; essendo la Gaussiana una distribuzione continua, la probabilità di ottenere 9 conteggi dovrà essere calcolata come la probabilità gaussiana cumulativa di ottenere un numero di conteggi compreso tra 8.5 e 9.5; per utilizzare i valori tabulati dell'integrale normale degli errori

$$P(t)=\int_{\mu}^{\mu+t\sigma} f_{\mu,\sigma}(x)dx \qquad (2)$$

occorre determinare il valore degli estremi dell'intervallo di integrazione:
$8.5=\mu+t_1\ \sigma \quad \rightarrow t_1=(8.5-\mu)/\sigma=0.57$
$9.5=\mu+t_2\ \sigma \quad \rightarrow t_2=(9.5-\mu)/\sigma=0.94$
Allora:

$$\begin{aligned} P(8.5\leq x\leq 9.5) &= \int_{\mu+t_1\sigma}^{\mu+t_2\sigma} f_{\mu,\sigma}(x)dx = \\ &= \int_{\mu}^{\mu+t_2\sigma} f_{\mu,\sigma}(x)dx - \int_{\mu}^{\mu+t_1\sigma} f_{\mu,\sigma}(x) = \\ &= 32.64\% - 21.57\% = 11.07\% \end{aligned} \qquad (3)$$

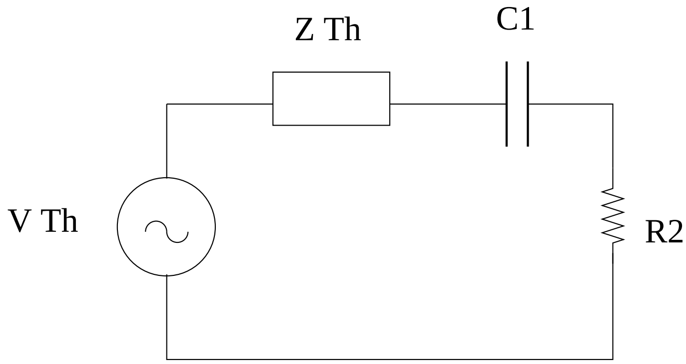
che corrisponde ad uno scarto del 9.2 % in eccesso rispetto al valore corretto, calcolato prima

3. Per la distribuzione poissoniana si tratta di calcolare la seguente somma: $\sum_{x=0}^{x=9} P(x,\mu=7)=\sum_{x=0}^{x=9}\frac{7^x e^{-7}}{x!}=0.8299$
Per la distribuzione gaussiana occorrera', in analogia a quanto fatto prima, valutare la probabilita' cumulativa di ottenere tra -0.5 conteggi e 9.5 conteggi, per cui: $t_1=-2.83$, $t_2=0.94$ e, ricordando che la distribuzione gaussiana è simmetrica rispetto al valor medio:

$$\begin{aligned} P(-0.5\leq x\leq 9.5) &= \int_{\mu}^{\mu+t_2\sigma} f_{\mu,\sigma}(x)dx + \int_{\mu}^{\mu+t_1\sigma} f_{\mu,\sigma}(x) = \\ &= 32.64\% + 49.77\% = 82.41\% \end{aligned} \qquad (4)$$

che corrisponde ad uno scarto dello 0.7 % in difetto rispetto al valore corretto, calcolato prima

- Applichiamo il teorema di Thevenin, considerando come circuito “esterno” il ramo che contiene la capacità C_1 in serie alla resistenza R_2; in questo modo il circuito si riduce a:



La tensione di Thevenin equivalente è data da:

$$v_{Th} = \frac{vR_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{vR_1(R_1 - j\omega L_1)}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} = (1.5 - j0.0094)V \tag{5}$$

La impedenza di Thevenin equivalente è data da:

$$z_{Th} = \frac{R_1 \; j\omega L_1}{R_1 + j\omega L_1} = \frac{(R_1 \; j\omega L_1)(R_1 - j\omega L_1)}{R_1^2 + \omega^2 L_1^2} = (0.004 + j0.6283)\Omega \tag{6}$$

La tensione ai capi di R_2 sara' allora, per la regola della partizione di tensione, data da:

$$v_{R2} = \frac{v_{Th} R_2}{z_{Th} + R_2 - \frac{j}{\omega C_1}} = (1.42 \cdot 10^{-5} + j0.0019)V \tag{7}$$

Il modulo di tale tensione vale: $V_{R2} = 1.9 \cdot 10^{-3} V$, la fase vale: $\varphi = atg \frac{0.0019}{1.42 \cdot 10^{-5}} = 1.563 \; rad \; = \; 89.57°$.

v_{R2} è in anticipo di quasi $\pi/2$ rispetto a v.