Corso di Laurea in Scienza dei Materiali
Laboratorio di Fisica III

Prova scritta del 24/04/2003

(3 punti)

Una compagnia di assicurazioni ha effettuato uno studio statistico sugli incidenti automobilistici che avvengono negli spostamenti urbani nelle grandi città, arrivando alla conclusione che ogni volta che il conducente medio usa l'automobile per muoversi ha una probabilità del 98% di arrivare a destinazione senza avere provocato incidenti.

Se il singolo abitante, munito di patente, di una grande città effettua, in media, 48 spostamenti in automobile in un mese nell'area urbana, quale è la probabilità che la compagnia di assicurazioni debba liquidare 2 danni da lui causati nell'arco del mese?

Quale è la differenza tra i valori calcolati assumendo una distribuzione binomiale di probabilità ed una distribuzione poissoniana? Che cosa se ne deduce?

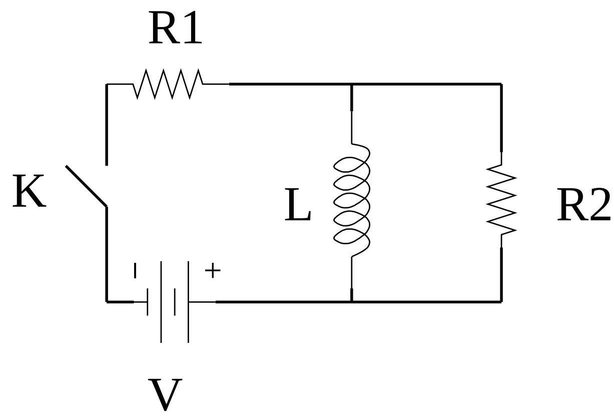
(3 punti)

Un raggio luminoso emesso dalla torcia di un sommozzatore che sta camminando sul fondo di un laghetto coperto da uno strato di ghiaccio incide sulla superficie della lastra ghiacciata con un angolo $\theta_1 = 65.5°$. Si assumano i seguenti valori di indici di rifrazione: $n_1 = 1.33$ per l'acqua, $n_2 = 1.31$ per il ghiaccio, $n_3 = 1.00$ per l'aria soprastante. Dire con quale angolo il raggio luminoso esce dalla lastra di ghiaccio. (Commentare il risultato).

(4 punti)

Dato il circuito riportato in figura, si supponga che l'interruttore K venga chiuso all'istante t = 0.

- Dire quanto vale e dove circola la corrente nei primi istanti del transitorio.
- Dire quanto vale e dove circola la corrente dopo che il transitorio si è esaurito.
- Calcolare quanto vale la costante di tempo del circuito (suggerimento: applicare il teorema di Thevenin).



SOLUZIONI

- La distribuzione di probabilità che meglio descrive il caso in questione è la Binomiale:

$$P(x, n, p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} \tag{1}$$

dove:

n è il numero di prove, nel presente caso $n = 48$;

x è il numero di successi in n prove, nel presente caso $x = 2$;

p è la probabilità di successo nella singola prova, nel presente caso $p = 0.02$ (successo = incidente).

Allora

$$P(2, 48, 0.02) = \frac{48!}{2!46!} 0.02^2 0.98^{46} = 0.178 \tag{2}$$

Dato che $x << n$ perchè $p << 1$ si può pensare di descrivere in modo sufficientemente corretto la probabilità voluta anche usando una distribuzione Poissoniana. In questo caso:

$$P(x, \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} \tag{3}$$

dove:

μ è il valore medio di eventi atteso, in questo caso $\mu = n \cdot p = 0.96$;

x è il numero di eventi, nel presente caso $x = 2$;

$$P(2, 0.96) = \frac{0.96^2}{2!} e^{-0.96} = 0.176 \tag{4}$$

Lo scarto tra il valore corretto (binomiale) e la stima ottenuta con la distribuzione poissoniana è:

$$\Delta_{\%} = \frac{0.178 - 0.176}{0.178} = 0.011$$

Si può pertanto concludere che la distribuzione poissoniana fornisce una buona stima della probabilità voluta, il che indica che l'evento cercato può essere considerato come "evento raro".

- Sulla prima superficie della lastra, quella che separa acqua e ghiaccio: $n_1\ sin(\theta_1) = n_2\ sin(\theta_2)$, da cui $\theta_2 = 67.50°$.

  Sulla seconda superficie della lastra, tra ghiaccio ed aria: $n_2\ sin(\theta_2) = n_3\ sin(\theta_3)$, ma in questo l'angolo limite per la riflessione totale vale: $sin(\theta_L) = \frac{n_3}{n_2} = 49.76°$, per cui l'angolo θ_2 di incidenza è maggiore dell'angolo limite e il raggio viene completamente riflesso nella lastra, non esce in aria.

  Quando giunge all'interfaccia ghiaccio–acqua si ha di nuovo $n_1\ sin(\theta_1) = n_2\ sin(\theta_2)$, per cui esso esce di nuovo verso l'acqua, con un angolo uguale a θ_1, ad una distanza rispetto al primo punto di incidenza data da: $D = 2\ d\ tg(\theta_2) = 4.828\ \cdot d$ avendo indicato con d lo spessore della lastra di ghiaccio.

- All'inizio del transitorio l'induttanza si comporta come un circuito aperto per cui la corrente passa tutta nel ramo in cui si trova la resistenza R_2: I = V/$(R_1 + R_2)$

  Alla fine del transitorio l'induttanza si comporta come un corto circuito e perciò esclude il ramo dove si trova la resistenza R_2: I = V/R_1.

  La costante del circuito può essere calcolata con il teorema di Thevenin, considerando come "circuito esterno" l'induttanza; allora la resistenza equivalente è data dal parallelo delle due resistenze R_1 e R_2:

$$R_{Th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{5}$$

e la costante di tempo risulta $\tau = L/R_{Th}$. La corrente che fluisce nella induttanza cresce da zero con una costante di tempo pari a τ fino a raggiungere il valore I = V/R_1. Il generatore, pertanto, eroga la corrente I = V/($R_1 + R_2$) a all'inizio del transitorio e poi aumenta tale corrente fino al valore I = V/R_1.