Appendice A

Operatori Scalari e Vettoriali

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano individuato da una terna di assi coordinati (x, y, z) con versori $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$; per definizione di versori valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{j} \;&=\; \vec{i} \cdot \vec{k} \;=\; \vec{j} \cdot \vec{k} \;=\; 0 \\ \vec{i} \cdot \vec{i} \;&=\; \vec{j} \cdot \vec{j} \;=\; \vec{k} \cdot \vec{k} \;=\; 1 \end{aligned} \tag{A.1}$$

In tale sistema di riferimento si definisce *prodotto scalare (o interno)* di due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, di componenti (u_x, u_y, u_z) e (v_x, v_y, v_z), la quantità:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \;=\; u_x v_x \;+\; u_y v_y \;+\; u_z v_z \tag{A.2}$$

e *prodotto vettoriale (o esterno)* dei due vettori la quantità:

$$\vec{u} \times \vec{v} \;= \vec{i}(u_y v_z - u_z v_y) + \; \vec{j}(u_z v_x - u_x v_z) + \; \vec{k}(u_x v_y - u_y v_x) \tag{A.3}$$

che è anche lo sviluppo del determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} \quad \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Si definisce *prodotto misto* dei vettori $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{t}$ la quantità:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{t} \;=\; \vec{v} \cdot \vec{t} \times \vec{u} \;=\; \vec{t} \cdot \vec{u} \times \vec{v} \tag{A.4}$$

che gode della proprietà ciclica, e *doppio prodotto esterno*:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{t}) \;=\; (\vec{u} \cdot \vec{t})\; \vec{v} \;-\; (\vec{u} \cdot \vec{v})\; \vec{t} \tag{A.5}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{t} \times \vec{z}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} \times (\vec{t} \times \vec{z}) \\ &= \vec{u} \, [\, (\vec{v} \cdot \vec{z}) \, \vec{t} \, - \, (\vec{v} \cdot \vec{t}) \, \vec{z} \,] \\ &= (\vec{u} \cdot \vec{t})(\vec{v} \cdot \vec{z}) \, - \, (\vec{u} \cdot \vec{z})(\vec{v} \cdot \vec{t}) \end{aligned} \tag{A.6}$$

e

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{t} \times \vec{z}) \; = \; (\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{z}) \, \vec{t} \, - \, (\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{t}) \, \vec{z} \tag{A.7}$$

Se indichiamo con f, un generico campo scalare, possiamo definire l'operatore vettoriale *nabla* ∇, come:

$$\nabla \; \equiv \; \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \; + \; \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \; + \; \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \tag{A.8}$$

ed in funzione di questo l'operatore vettoriale *gradiente*:

$$\nabla \, f \equiv \; \vec{i} \, \frac{\partial f}{\partial x} \; + \; \vec{j} \, \frac{\partial f}{\partial y} \; + \; \vec{k} \, \frac{\partial f}{\partial z} \tag{A.9}$$

Consideriamo, ora, un campo scalare $U(x, \; y, \; z)$; se partendo da un punto $P \; = \; (x, \; y, \; z)$ si esegue uno spostamento infinitesimo:

$$d\vec{s} \; = \; \vec{i} \, dx \; + \; \vec{j} \, dy \; + \; \vec{k} \, dz \; = \; \vec{n} \, ds \tag{A.10}$$

con $(ds)^2 \; = \; (dx)^2 \; + \; (dy)^2 \; + \; (dz)^2$, la variazione corrispondente di U è:

$$\begin{aligned} dU &= U(x+dx, y+dy, z+dz) \; - \; U(x,y,z) \\ &= \frac{\partial U}{\partial x} dx \; + \; \frac{\partial U}{\partial y} dy \; + \; \frac{\partial U}{\partial z} dz \\ &= \nabla U \cdot d\vec{s} \; = \; \nabla U \cdot \vec{n} ds \end{aligned} \tag{A.11}$$

In un punto $P \; = \; (x, \; y, \; z)$ la *derivata direzionale* di U nella direzione specificata dal versore $\vec{n}$ è definita come:

$$\frac{dU}{ds} \; \equiv \; \nabla U \cdot \vec{n} \tag{A.12}$$

cioè è la componente del vettore ∇U nella direzione orientata fissata dallo spostamento $d\vec{s}$. Da questa ultima relazione si ricava che:

1. il gradiente di U è un vettore di modulo uguale al valore assoluto massimo della derivata direzionale;

2. la direzione e il verso coincidono con quelli per i quali la derivata direzionale è massima;

3. in ogni punto il vettore gradiente è perpendicolare alla superficie di valore $U = cost$ passante per il punto considerato.

Due grandezze frequentemente usate in relazione ad un generico campo vettoriale $\vec{v}$ sono l'operatore scalare *divergenza*:

$$\nabla \cdot \vec{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{A.13}$$

(che si ottiene applicando formalmente la definizione dell'operatore ∇ scalarmente al vettore $\vec{v}$) e l'operatore vettoriale *rotore* tale che:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} \equiv & \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \vec{j} \\ & \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned} \tag{A.14}$$

che, di nuovo, si ottiene applicando formalmente l'operatore ∇ vettorialmente al vettore $\vec{v}$ e che si può ottenere anche come lo sviluppo del determinante:

$$\nabla \times \vec{v} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Per la linearità dell'operatore ∇ si ha:

$$\nabla (f + g) = \nabla f + \nabla g \tag{A.15}$$

$$\nabla (f g) = f \nabla g + g \nabla f \tag{A.16}$$

$$\nabla \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \equiv \nabla \cdot \vec{u} + \nabla \cdot \vec{v} \tag{A.17}$$

$$\nabla \times (\vec{u} + \vec{v}) = \nabla \times \vec{u} + \nabla \times \vec{v} \tag{A.18}$$

$$\nabla \cdot (f \vec{u}) = \vec{u} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \vec{u} \tag{A.19}$$

$$\nabla \times (f \vec{u}) = \nabla f \times \vec{u} + f \nabla \times \vec{u} \tag{A.20}$$

Si definisce anche l'operatore *di Laplace o laplaciano* ∇^2 come:

$$\nabla \cdot \nabla f \equiv \nabla^2 f \tag{A.21}$$

ovvero

$$\nabla^2 \;\equiv\; \frac{\partial^2}{\partial x^2} \;+\; \frac{\partial^2}{\partial y^2} \;+\; \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{A.22}$$

Il laplaciano può essere applicato sia ad un campo scalare:

$$\nabla^2 f \;=\; \nabla \cdot \nabla f \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \;+\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \;+\; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{A.23}$$

sia ad un campo vettoriale:

$$\nabla^2 \vec{u} \;=\; \nabla\nabla \cdot \vec{u} \;-\; \nabla \times \nabla \times \vec{u} \;=\; \nabla^2 u_x\, \vec{i} \;+\; \nabla^2 u_y\, \vec{j} \;+\; \nabla^2 u_z\, \vec{k} \tag{A.24}$$

Le formule (A.9), (A.13)–(A.21) seguono per diretta applicazione dell'operatore ∇ a campi scalari e vettoriali; un po' più elaborata è, invece, la dimostrazione delle seguenti utili proprietà:

$$\nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) \;=\; (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{v} \;+\; (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{u} \;+\; \vec{u} \times (\nabla \times \vec{v}) \;+\; \vec{v} \times (\nabla \times \vec{u}) \tag{A.25}$$

$$\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \;=\; \vec{v} \cdot (\nabla \times \vec{u}) \;-\; \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \tag{A.26}$$

$$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{v}) \;=\; \vec{u}(\nabla \cdot \vec{v}) \;-\; \vec{v}(\nabla \cdot \vec{u}) \;+\; (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{u} \;-\; (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{v} \tag{A.27}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{u} \;=\; \nabla\nabla \cdot \vec{u} \;-\; \nabla^2 \vec{u} \tag{A.28}$$

Si dimostra anche facilmente che:

$$\nabla \times \nabla f \;=\; 0 \tag{A.29}$$

che si esprime dicendo che il vettore ∇f è sempre *irrotazionale*, qualunque sia lo scalare f. Infine:

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{u} \;=\; 0 \tag{A.30}$$

che si esprime dicendo che $\nabla \times \vec{u}$ è sempre *solenoidale*, qualunque sia il vettore $\vec{u}$. Se un vettore, oltre che irrotazionale, cioè tale che $\vec{v} \;=\; \nabla f$, è anche solenoidale, cioè tale che $\nabla \cdot \vec{u}$, allora si ha anche:

$$\nabla^2 f \;\equiv\; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \;+\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \;+\; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) f \;=\; 0 \tag{A.31}$$